中間述語論理における選言特性と存在特性および Kripke 完全性に関する注意*

静岡大学・理学部数学教室 鈴木信行
Nobu-Yuki Suzuki
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Shizuoka University

2020 年 2 月 21 日

概 要

An intermediate predicate logic $\mathbf{L}$ is said to have the *disjunction property* (DP) if for every A and every B, $\mathbf{L} \vdash A \vee B$ implies that $\mathbf{L} \vdash A$ or $\mathbf{L} \vdash B$. An intermediate predicate logic $\mathbf{L}$ is said to have the *existence property* (EP) if for every $\exists x A(x)$, $\mathbf{L} \vdash \exists x A(x)$ implies that there is a v such that $\mathbf{L} \vdash A(v)$. These properties are proof-theoretically interesting and are regarded as characteristic features of constructivity of intuitionistic theories such as intuitionistic logic $\mathbf{H}_*$ At present, we have limited knowledge of DP and EP of intermediate predicate logics. In this note, we report some results on Kripke completeness in connection with DP and EP. We have two concepts of Kripke completeness: Kripke-base-completeness and Kripke-frame-completeness. These two concepts are shown to have different effects in relation to DP and EP.

1 はじめに

筆者は近年、選言特性 (disjunction property, DP) と存在特性 (existence property, EP) を中間述語論理において考察してきた。本稿では、これらと Kripke 意味論に関するある知見を簡略に報告する。

*本研究は、日本学術振興会の科学研究費補助金 (C) No.16K05252 および研究拠点形成事業 (A. 先端拠点形成型) 助成を受けたものです。The author thanks the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS), Grand-in-Aid for Scientific Research (C) No.16K05252, and Core-to-Core Program (A. Advanced Research Networks) for supporting the research. 本稿は、筆者の現在進行中の研究の要旨です。This is an extended abstract of the author's work in progress.

DP と EP は、証明論的にきれいな性質であり、直観主義的理論の構成性を特徴づけるものと考えられている。これらは様々な直観主義的な形式的体系 (例えば、直観主義的算術 HA) などにおいて考察されている。（それぞれの体系に応じて、性質の述べ方は少しずつ異なる。）これらを中間述語論理で考える。すると、これらが直観主義論理そのものを特徴づける性質とは言えないこと、すなわち、これらを持つ中間述語論理が存在することが解った。もちろん、どちらも持たない中間述語論理も存在する。つまり、DP と EP は中間述語論理において non-trivial な研究対象である。

今までに、DP を持ち EP を持たない中間述語論理や、EP を持ち DP を持たない中間述語論理が存在することが解っている。いまのところ、「こういう中間述語論理が存在する・構成できる」ということを通して、DP や EP が自明でないことや互いに独立であることが示されている段階である。より深い研究のため、実例を一生懸命に集める事が主になっており、まだまだ進捗は遅い。そして、Kripke 意味論的完全性といえば、論理を数学的に研究するうえで重要な性質であることは言うを俟たないのだから、これと DP や EP との関係は、考察しておくべき問題であろう。本稿では、これらと Kripke 意味論的完全性について、今解っていることを紹介する。

本稿で報告する内容を大づかみな標語的に述べれば、以下のふたつである。

(1) Kripke base 完全性があれば、EP は DP を導く (命題 2.9, *cf.* S[17])。

(2) Kripke 枠完全性と「DP や EP を持つかどうか」は独立 (命題 3.4)。

すなわち、DP と EP との関連という観点から見ると、Kripke base 完全性と Kripke 枠完全性は異なった影響を与える。

できるだけ self-contained にするため、次の小節で基本的な定義などを与えるが、S[14] などからの引用である。必要に応じて引用元にあたって参照して欲しい。第 2 節では、Kripke 意味論を簡潔に説明し、Kripke base 完全性と Kripke 枠完全性を導入する。また、中間述語論理における DP と EP を考えるうえで重要となる Z 正規性を導入し、上記の標語のひとつ目を紹介する。第 3 節では、2 種類の Kripke 枠不完全性に関する結果を紹介し、もうひとつの標語が示される。第 4 節は、まとめである。

1.1 中間述語論理、選言特性、存在特性

繰り返しになるが、S[14] などからの引用である。順序は S[14] と異なる。

定義 1.1 (S[14]) 言語として pure first-order language $\mathscr{L}$ を用いる。この $\mathscr{L}$ は、論理記号として $\vee$ (disjunction), $\wedge$ (conjunction), $\supset$ (implication), $\neg$ (negation), そして量化子として $\exists$ (existential quantifier) と $\forall$ (universal quantifier) を持つ。また、可算個の個体変数と、各 $m < \omega$ について m 変数 (m-ary) の述語変数 (predicate variable) を持つ。ここで、0 変数の述語記号は、命題変数のことである。注意すべきは、$\mathscr{L}$ には個体定数も関数記号もないし、等号 (=) も持たない。

定義 1.2 (S[14]) $\mathscr{L}$ の論理式の集合 **L** は、以下の 3 条件を満たすとき、**中間述語論理** (intermediate predicate logic) であるという。

(Q1) **L** は、直観主義述語論理 $\mathbf{H}_*$ で証明可能な論理式をすべて含む。
(Q2) **L** に含まれる論理式は、すべて古典述語論理 $\mathbf{C}_*$ で証明可能である。
(Q3) **L** は、以下の 3 つの推論規則に関して閉じている:
modus ponens (from A and $A \supset B$, infer B), generalization (from A, infer $\forall x A$), uniform substitution[1] for predicate variable.

$\mathscr{L}$ の論理式の集合 **L** が (Q1) と (Q3) を満たすとき、**超直観主義的述語論理** (super-intuitionistic predicate logic) という。

この定義は、論理 **L** と、**L** で証明可能な論理式の全体 $\{A : \mathbf{L} \vdash A\}$ とを同一視したものになっている。そこで今後は、「論理式 A は論理 **L** で証明可能」「$\mathbf{L} \vdash A$」などの表現を特に断らずに使う。また、述語論理 **L** と論理式 A (論理式の集合 S) に対して、**L** と $\{A\}$ (**L** と S, resp.) を含む最小の超直観主義的述語論理を $\mathbf{L} + A$ ($\mathbf{L} + S$, resp.) で表す。

本稿の主題である DP と EP を導入しよう。

定義 1.3 (S[14]) 中間述語論理 **L** が、*disjunction property* (DP) を持つとは、**L** で証明可能な任意の $A \vee B$ に対して、$\mathbf{L} \vdash A$ または $\mathbf{L} \vdash B$ が成り立つこととする。記号的に書くと:

$\mathbf{L} \vdash A \vee B \Rightarrow \mathbf{L} \vdash A$ または $\mathbf{L} \vdash B$

定義 1.4 (S[14]) 論理式 A が論理式 B と**合同** (congruent) であるとは、(1) A が B から束縛変数の alphabetic change によって得られ、(2) その alphabetic change によって個体変数の自由な出現箇所 (free occurrences) は、どれも新しく束縛されない、こととする。(cf. Kleene [5, p.153]).

中間述語論理 **L** が、*existence property* (EP) を持つとは、**L** で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ に対して、$A(x)$ と合同な $\widetilde{A}(x)$ と、$\widetilde{A}(x)$ の x に代入可能な個体変数 v が存在して、$\widetilde{A}(v)$ が **L** で証明可能であることとする。

簡単のため、今後混同の虞が無い限り、合同な論理式を特に区別せずに書くことにする。また、個体変数の代入可能性を随時暗黙に仮定することにしよう[2]。すると、**L** が EP を持つとは、任意の $\exists x A(x)$ に対して、次が成立することである、と書ける。

$\mathbf{L} \vdash \exists x A(x) \Rightarrow$ ある個体変数 v が存在して $\mathbf{L} \vdash A(v)$

[1] Church [1] の Š を参照。

[2] 自由変数と束縛変数を言語の設計の始めから区別する体系 (e.g., Gentzen [4], Prawitz [10]) であれば、この辺りはあまり気にしないで記述できる。以下はその様な言語で書かれていると思って読む方が解りやすい。ただ、本稿では中間述語論理の諸文献の常道に従って、pure language $\mathscr{L}$ を用いる。それに伴って正確を期せば、一部の記述が煩瑣になってしまうので、このようにさせていただく。

直観主義述語論理は、DP と EP を共に持っている。また、DP と EP は、直観主義論理の構成性を示す顕著な特徴と考えられている。では、中間述語論理において、これら 2 つの性質のは、どうなっているのだろうか？まず、注意としては、DP と EP は、「直観主義論理の構成性」を示す特徴であっても、中間論理において、直観主義論理を特徴づける性質ではない。次の命題を見よ。

命題 1.5
(1-1) CD を次で定義する。
$CD \ : \ \forall x(p(x) \vee q) \supset (\forall x p(x) \vee q)$ (p は 1 変数述語変数、q は命題変数)
$\mathbf{H}_* + CD$ は DP と EP を持つ。(Komori [6], Nakamura [8])
(1-2) DP と EP を持つ中間述語論理が非可算無限個存在する。(Ferrari-Miglioli [2], S[13])

(2-1) F を次で定義する。
$F \ : \ \exists x(p(x) \supset \forall y p(y))$ (p は 1 変数述語変数)
$\mathbf{H}_* + F$ は DP を持ち EP を持たない。(Minari [7], Nakamura [8])
(2-2) DP を持ち EP を持たない中間述語論理が非可算無限個存在する。(S[18])

(3-1) GJ, Z を次で定義する。
$GJ \ : \ \bigwedge_{i=0}^{2} ((p_i \supset \bigvee_{j \neq i} p_j) \supset \bigvee_{j \neq i} p_j) \supset \bigvee_{i=0}^{2} p_i$
$Z \ : \ \exists x p(x) \supset \forall x p(x)$
(p_0, p_1, p_2 は命題変数, p は 1 変数述語変数)
$\mathbf{H}_* + CD + GJ \vee Z$ は EP を持ち DP を持たない。(S[17])
(3-2) EP を持ち DP を持たない中間述語論理が非可算無限個存在する。(S[17])

(4-1) 古典論理 $\mathbf{H}_* + p \vee \neg p$ は EP も DP も持たない。(Folklore)
(4-2) DP も EP も持たない中間述語論理が非可算無限個存在する。(S[18])

まとめて言えば、次のようになる。

命題 1.6 中間述語論理において、*DP* と *EP* は独立である。

DP と EP を「持つ・持たぬ」で分ければ次のような 4 つの区画からなる表が書ける。実は、すべての区画に 2^ω 個の中間述語論理が存在することが解っている (S[13, 18])。

表 1: DP, EP「持つ・持たぬ」表

		DP	
		Yes	No
EP	Yes		
	No		

2 Kripke 意味論と Z 正規性

まず、Kripke 意味論を簡潔に説明し、Kripke base 完全性と Kripke 枠完全性を導入する。また、中間述語論理における DP と EP を考えるうえで重要となる Z 正規性を導入し、この概念を経由することにより、ふたつめの標語が得られることを紹介する。

空でない集合 U の各元 $u \in U$ に対して、その name $\overline{u}$ を用意する。$\mathscr{L}[U]$ で $\mathscr{L}$ に個体定数記号の集合 $\{\overline{u}\ ;\ u \in U\}$ を付加した言語を表す。以下では、誤解の虞が無ければ、$\overline{u}$ を単に u と書く。

定義 2.1 最小元 $0_{\mathbf{M}}$ を持つ半順序集合 $\mathbf{M} = (M, \leq)$ を *Kripke base* と呼ぶ。空でない集合 S に対して、写像 $D : M \to 2^S$ が次の条件を満たすとき、$\mathbf{M}$ 上の *domain* と呼ぶ。

任意の $a, b \in M$ に対して、$a \leq b$ ならば $\varnothing \neq D(a) \subseteq D(b)$.

Kripke base $\mathbf{M}$ と $\mathbf{M}$ 上の domain D の組 $\mathcal{K} = \langle \mathbf{M}, D \rangle$ を **Kripke 枠** (*Kripke frame*) と呼ぶ。

直観的には、$D(a)$ は、世界 $a \in M$ における個体領域である。$a \leq b$ であれば、$\mathscr{L}[D(a)]$ の文 (sentence) は $\mathscr{L}[D(b)]$ の文でもある。元 $a \in M$ と $\mathscr{L}[D(a)]$ の素文 (atomic sentence) の間の 2 項関係 $\models$ が Kripke 枠 $\mathcal{K} = \langle \mathbf{M}, D \rangle$ 上の *valuation* であるとは、次の条件を満たすことである。

任意の $a, b \in M$ と $\mathscr{L}[D(a)]$ の任意の素文 A に対して、$a \leq b$ かつ $a \models A$ ならば $b \models A$.

関係 $\models$ を、元 $a \in M$ と $\mathscr{L}[D(a)]$ の文の間の 2 項関係に、以下の帰納法で拡張する。

- $a \models A \wedge B$ if and only if $a \models A$ and $a \models B$,
- $a \models A \vee B$ if and only if $a \models A$ or $a \models B$,
- $a \models A \supset B$ if and only if for every $b \in M$ with $a \leq b$, either $b \not\models A$ or $b \models B$,
- $a \models \neg A$ if and only if for every $b \in M$ with $a \leq b$, $b \not\models A$,
- $a \models \forall x A(x)$ if and only if for every $b \in M$ with $a \leq b$ and every $u \in D(b)$, $b \models A(\overline{u})$,
- $a \models \exists x A(x)$ if and only if there exists $u \in D(a)$ such that $a \models A(\overline{u})$.

論理式 A の**普遍閉包** (*universal closure*) を $\overline{A}$ で表す。$\mathscr{L}$ の論理式 A が Kripke 枠 $\mathcal{K} = \langle \mathbf{M}, D \rangle$ で *valid* であるとは、$\mathcal{K}$ 上の任意の valuation $\models$ に対して $0_{\mathbf{M}} \models \overline{A}$ となることである。Kripke 枠 $\mathcal{K}$ で valid な $\mathscr{L}$ の論理式の全体を $L(\mathcal{K})$ と書く。

命題 2.2 任意の *Kripke* 枠 $\mathcal{K}$ に対して、$L(\mathcal{K})$ は超直観主義的述語論理である。

Kripke 枠のクラス $\mathscr{C}$ が超直観主義的述語論理 $\mathbf{L}$ を**特徴付けする** (*characterize*) とは、$\mathbf{L} = \bigcap\{L(\mathcal{K}) \,;\, \mathcal{K} \in \mathscr{C}\}$ となることである。$\mathbf{L}$ を特徴付けする Kripke 枠のクラス $\mathscr{C}$ が存在するとき、$\mathbf{L}$ は、**Kripke 枠完全** (*Kripke-frame-complete*) であるという。

$\mathscr{F}$ を Kripke bases のクラスとする。$\mathscr{F}$ から定まる Kripke 枠のクラス $\{\langle \mathbf{M}, D\rangle \,;\, \mathbf{M} \in \mathscr{F}$ かつ D は $\mathbf{M}$ 上の domain$\}$ が $\mathbf{L}$ を特徴付けするときも、$\mathscr{F}$ は $\mathbf{L}$ を特徴付けするという。$\mathbf{L}$ を特徴付けする Kripke bases のクラス $\mathscr{F}$ が存在するとき、$\mathbf{L}$ は、**Kripke base 完全** (*Kripke-base-complete*) であるという。

命題 1.5 (3-1) の $\mathbf{H}_* + CD + GJ \vee Z$ は、やや「無理やり」な感じがする。詳細は略するが、これを作るときに、下記の eEP という不自然かつ強力な性質を利用している。

定義 2.3 (S[14, 15]) 論理 $\mathbf{L}$ が、*extreme existence property* (eEP) を持つとは、$\mathbf{L}$ で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ に対して、<u>新しい</u>個体変数 v が存在して、$A(v)$ が $\mathbf{L}$ で証明可能であることとする。

補題 2.4 *$\mathbf{L}$ が EP を持ち、$\mathbf{K}$ が eEP を持てば、$\mathbf{L} \cap \mathbf{K}$ は EP を持つ。*

この補題により、$\mathbf{L}$ と $\mathbf{K}$ が論理式の集合として比較不能で、$\mathbf{L}$ が DP と EP を持ち、$\mathbf{K}$ が eEP を持てば、$\mathbf{L} \cap \mathbf{K}$ は EP を保持したままで DP を持たない。この様な $\mathbf{L}$ と $\mathbf{K}$ の存在を示せばよいのである。S[17] では、これを実行している。

実は、この eEP の働きをうまく「抑制」することができれば、肯定的な結果が得られる。まず、eEP について基本的な次の補題を見る。

補題 2.5 (S[14, 15]) *任意の論理 $\mathbf{L}$ に対して、以下の 3 条件は同値:*

(1) $\mathbf{L}$ は *eEP* を持つ;

(2) $\mathbf{L} \vdash \exists x p(x) \supset \forall x p(x)$;

(3) $\mathbf{L} \vdash p(x) \supset p(y)$.

ここで、p は 1 変数述語変数で、x と y は相異なる個体変数である。

この $p(x) \supset p(y)$ を Z と表す。Z は量化子を打ち消す作用を持つので、S[17] では quantifier annihilation axiom と呼んでいる。そこで次の定義を見よう。

定義 2.6 (S[17]) 次の推論規則を (ZR) と呼ぶ:

$$\frac{A \vee (p(x) \supset p(y))}{A}(Z\mathrm{R})$$

ここで、p は 1 変数述語変数で、x と y は相異なる個体変数で、A に出現しないものある。論理 $\mathbf{L}$ は、(ZR) について閉じているとき、**Z-正規** (Z-normal) であるという。

(ZR) は、述語論理の自然な規則と言えよう。この (ZR) が妥当な論理では、Z を $\vee$ との関連上で矛盾と同等に扱っており、補題 2.5 から eEP の働きを抑制していると考えることができる。もし、論理が Z-正規ならば、eEP を持たない。(しかし、Z-正規でない論理で Z が証明可能でない論理も存在する。) そして次が示される。

定理 2.7 (S[17]) 論理 $\mathbf{L}$ は Z-正規であるとする。$\mathbf{L}$ が *EP* を持てば *DP* を持つ。

Z-正規性の自然さは、意味論的にも納得できる:

命題 2.8 (S[17]) *Kripke base* 完全な論理は、Z-正規である。

この命題 2.8 より、意味論的議論の場合には多くの場合、自然に定理 2.7 の仮定が満たされ、「具体的な例で EP を持つことを示そうとすると、同じアイデアで DP が示されてしまう」という経験も理解できると言えよう。

そして、これを言い換えると「はじめに」で述べた標語のひとつが得られる。

命題 2.9 *Kripke base* 完全な中間述語論理では、*EP* は *DP* を導く。

3 Kripke 枠完全性と不完全性

1.1 節でも述べたが、DP と EP を「持つ・持たぬ」で分けた 4 つの区画からなる表が書ける。表 2 には、Kripke 枠完全性が明らかな直観主義論理 $\mathbf{H}_*$、古典論理 $\mathbf{C}_*$、$\mathbf{H}_* + CD$ が具体的に書き込んである。そして、(Yes,No), (No,Yes) に書いてある論理 $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ は、以下で見るように、意味論的に定める論理である。定義から自動的に Kripke 枠完全である。公理化は残念ながら不明である。この表から、Kripke 枠完全性は、DP と EP の「持つ・持たぬ」を含意しないことが解る。

表 2: Kripke 枠完全

		DP	
		Yes	No
EP	Yes	$\mathbf{H}_*$, $\mathbf{H}_* + CD$	$\mathbf{L}_1$
	No	$\mathbf{L}_2$	$\mathbf{C}_*$

定義 3.1 Kripke 枠のクラス $\mathscr{P}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}_2$ を次で定める。

(0) $(\mathbf{M}, D)$ が $\mathscr{P}$ のメンバーである $\Leftrightarrow$ $D(a)$ $(a \in \mathbf{M})$ はすべて singleton である。

(1) $(\mathbf{M}, D)$ が $\mathscr{B}$ のメンバーである $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}$ が有限二分木 (finite binary tree) である。

(2) $(\mathbf{M}, D)$ が $\mathscr{C}$ のメンバーである $\Leftrightarrow$

$\mathscr{B}$ のメンバーであり、$a \in \mathbf{M}$ が極大元でなければ $D(a)$ は singleton である。

命題 3.2 *(1)* $\mathbf{L}_1$ を $\mathscr{P}$ と $\mathscr{B}$ の合併クラスで特徴づけられる論理とすると、$\mathbf{L}_1$ は *EP* を持ち、*DP* を持たない。

(2) $\mathbf{L}_2$ を $\mathscr{C}$ で特徴づけられる論理とすると、$\mathbf{L}_2$ は *DP* を持ち、*EP* を持たない。

次の表は、Kripke 枠不完全な論理たちの表である。ここで、Lin^* は、$\forall x \forall y\{(r(x) \supset r(y)) \vee (r(y) \supset r(x)))\}$ なる sentence である (r は 1 変数述語変数)。この表から、Kripke 枠不完全性は、DP と EP の「持つ・持たぬ」を含意しないことが解る。

表 **2**: Kripke 枠不完全

		DP	
		Yes	No
EP	Yes	$\mathbf{H}_* + CD + GJ$	$\mathbf{H}_* + CD + GJ \vee Z$
	No	$\mathbf{H}_* + F$	$\mathbf{H}_* + F \wedge Lin^*$

上段のふたつの論理が Kripke 枠不完全であることは、次の志村の定理およびその証明をよく見ることから従う。(詳細は省略する。)

命題 3.3 (志村の定理 Shimura[11]) $\mathbf{L}$ を *Kripke* 枠完全な論理で $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{H}_* + CD + GJ + K$ であるとする。このとき、$\mathbf{L}$ の命題部分は直観主義論理と一致する。

下段のふたつの論理が Kripke 枠不完全であることは、Komori[6] の Theorem 5.5 およびその証明をよく見ることから従う。(*cf.* S[16])

これらふたつの表から、DP と EP を「持つ・持たぬ」は、Kripke 枠完全を含意しないことが解る。まとめて言えば、次のようになる。

命題 3.4 *Kripke* 枠完全性と「*DP* や *EP* を持つかどうか」は独立である。

これでふたつめの標語が示された。

4 おわりに

中間述語論理における選言特性・存在特性と Kripke 意味論に関する結果を報告した。Kripke base 完全性は DP と EP の関係に影響を与える。(Kripke base 完全であれば、EP が DP を導く。) 一方、Kripke 枠完全性は DP および EP と独立である。

中間述語論理では、選言特性と存在特性とは互いに独立であった。これらの性質は、直観主義述語論理の構成性を表す「金看板」であるが、中間述語論理においては「ふ

たつ一組」ではない。これは、いかなる事情によるものであろうか? 現在解っていることは、極めて限られており、もう少し明らかになって欲しい。

中間述語論理のなかには、奇妙なものたちが多く存在する。例えば、Z-正規でなく Z が証明可能でない論理 (eEP を持たない論理) は、多く存在することが解っている。これらは、かなり不思議な論理であり、その "生態" について興味がある。

月並みな言い方になってしまい、恐縮であるが、今後の研究の進展に期待する。

参考文献

[1] Church, A., **Introduction to Mathematical Logic I**, Princeton University Press, Princeton (1956).

[2] Ferrari, M. and Miglioli, P., (1993) *Counting the maximal intermediate constructive logics*, **Journal of Symbolic Logic**, Vol.58(1993), 1365–1401.

[3] Gabbay, D. M., Shehtman, V. B. and Skvortsov, D. P., **Quantification in non-classical logic. Vol. 1**, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 153. Elsevier, Amsterdam (2009).

[4] Gentzen, G., *Untersuchungen über das logische Schließen*, **Mathematische Zeitschrift** 39(1934-35), 176–210, 405–431.

[5] Kleene, S. C., *Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms*, **Journal of Symbolic Logic** 27(1962), 11–18. (*An addendum*, the same journal 28(1963), 154–156.)

[6] Komori, Y., *Some results on the super-intuitionistic predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 15 (1983), 13–31.

[7] Minari, P., *Disjunction and existence properties in intermediate predicate logics*, **Atti del Congresso Logica e Filosofia della Scienza, oggi. San Gimignano, dicembre 1983. Vol.1 – Logica.** (1986), 7–11. CLUEB, Bologna (Italy).

[8] Nakamura, T., *Disjunction property for some intermediate predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 15(1983), 33–39.

[9] Ono, H., *A study of intermediate predicate logics*, **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences** 8(1972/73), 61–649,

[10] Prawitz, D., **Natural deduction. A proof-theoretical study**, Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy, No. 3 Almqvist & Wiksell, Stockholm 1965. (Reprint: Dover Publications, 2006)

[11] Shimura, T., *Kripke incompleteness of predicate extensions of Gabbay-de Jongh'ss logic of the finite binary trees*, **Bulletin of Section of Logic, University of Łódź**, 31(2002), 111–118.

[12] Suzuki, N.-Y., *A remark on the delta operation and the Kripke sheaf semantics in super-intuitionistic predicate logics*, **Bulletin of Section of Logic, University of Łódź**, 25(1996), 21–28.

[13] Suzuki, N.-Y., *Algebraic Kripke sheaf semantics for non-classical predicate logics* **Studia Logica** 63(1999), 387–416.

[14] Suzuki, N.-Y., 中間述語論理における *Existence Property* に関する注意, 京都大学数理解析研究所講究録 No. 1950 (2015), 40–51.

[15] Suzuki, N.-Y., *Some weak variants of the existence and disjunction properties in intermediate predicate logics*, **Bulletin of the Section of Logic** (2017), 93–109.

[16] 鈴木信行, 「Kripke 枠不完全かつ代数的不完全な中間述語論理をたくさん作っていた」日本数学会, 2019 年度秋季総合分科会（数学基礎論分科会）

[17] Suzuki, N.-Y., *A negative solution to Ono's problem P52: Existence and disjunction properties in intermediate predicate Logics*, to appear.

[18] Suzuki, N.-Y., *A note on disjunction and existence properties in predicate extensions of intuitionistic logic —An application of Jankov formulas to predicate logics—*, submitted.

〒 422–8529
静岡市駿河区大谷 836
静岡大学理学部数学教室
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp

Department of Mathematics
Faculty of Science
Shizuoka University
Ohya 836, Suruga-Ku
Shizuoka, 422–8529
JAPAN
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp