有限生成群のなす位相空間

見村万佐人（東北大学大学院理学研究科）
MIMURA, Masato
Mathematical Institute, Tohoku University

概要

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定したとき，k 元生成群 G と k 元からなる順序つき生成集合 $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ の組 $(G; S) = (G; s_1, \ldots, s_k)$ を元とする空間 $\mathcal{G}(k)$ が定まる．Grigorchuk が考察したように，$\mathcal{G}(k)$ にはコンパクトで距離化可能な位相が自然に入る．本稿ではこの位相空間 $\mathcal{G}(k)$ と群性質について知られていることを議論する．最後に，$\mathcal{G}(k)$ 上での LEF 近似を用いて示された筆者の結果も述べる．

1　k-マークつき群のなす位相空間 $\mathcal{G}(k)$

本稿では $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし，特に断りがない限りは k を 1 つ固定する．$[k]$ で k 元集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ を表わす．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$ を自然数全体のなす集合とする．

G を k 元生成群とする．つまり，ある $s_1, s_2, \ldots, s_k \in G$ があって $\{s_1, \ldots, s_k\}$ が群として（逆元も用いてよい）G を生成するとする．このとき，これらの元 $s_1, \ldots, s_k$ を順序つきで $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ とかいたものを G の **k-マーク**（k-marking）ということにする．k 元生成群 G とその k-マークの組 $\mathbf{G} = (G; S) = (G; s_1, \ldots, s_k)$ を **k-マークつき群**（k-marked group）という[*1]．ここで，$s_1, \ldots, s_k$ の中に同じ元があってもよいし，単位元 e_G があってもよい[*2]．

2 つの k-マークつき群 $\mathbf{G} = (G; s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $\mathbf{H} = (H; t_1, t_2, \ldots, t_k)$ の間の射（マークつき群の準同型写像）とは，群の準同型写像 $\phi\colon G \to H$ であって，全ての $i \in [k]$ に対し，

$$\phi(s_i) = t_i$$

を満たすものとする．以下の 2 点に注意する．

- このような写像 ϕ は自動的に全射群準同型 $\phi\colon G \twoheadrightarrow H$ となる．したがって，上の射 $\phi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ を**マークつき群の商写像**（marked group quotient map）といい，このような ϕ が存在するとき $\mathbf{H}$ を $\mathbf{G}$ の**マークつき商群**（marked group quotient）という．
- 射を定義するときに k-マークの元の順序を用いている．

[*1] 後述するように，正確にはこの適切な同値関係での同値類を k-マークつき群という．

[*2] 後ほど，（マークの濃度 k を固定しない）「マークつき群全体のなす位相空間」を考える際に，後者の注意は重要となる．2 章の末部を参照されたい．

2 つの k-マークつき群 $\mathbf{G},\mathbf{H}$ が同型であるとは，これらの間にマークつき群の間の同型写像が存在することをいう．これは，上のマークつき群の商写像 $\phi\colon \mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{H}$ で $\phi\colon G \to H$ が群の同型写像であるものが存在する，ということ同値である．このようなとき，$\mathbf{G} \cong \mathbf{H}$ とかく．以下，k-マークつき群 $\mathbf{G}$ のこの同型 $\cong$ による同型類 $[\mathbf{G}]$ のことも単に 'k-マークつき群' という[*3]．

例 1.1. (1) 自由アーベル群 $\mathbb{Z}^2$ はその標準基底により生成される．このとき，2-マークつき群 $(\mathbb{Z}^2; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ と $(\mathbb{Z}^2; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ は同型である．従って，同型類として 2-マークつき群を指すとき，これらは同一の 2-マークつき群となる．

(2) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする．$\mathbb{Z}$-係数の n 次特殊線型群は

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z}) : \ \det M = 1\}$$

（ここで，$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$-係数の n 次正方行列全体のなす環で，$\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 上の群算法は行列の積演算である）として定義される群である．本例では以下，$n = 3$ として $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ を考える．

$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ は有限生成群である．実際，このことは以下のようにしてわかる：$i \neq j$ を $[3]$ の元，$r \in \mathbb{Z}$ とするとき，$e_{i,j}(r) \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ を対角成分が 1, (i,j)-成分が r で残りの成分が全て 0 であるようなものとする．例えば，

$$e_{3,1}(2019) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2019 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．このような形の $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ の元を**基本行列**（elementary matrix）という[*4]．$\mathbb{Z}$ がユークリッド整域であることから，基本行列を左右からかけていくことによりガウスの掃き出しができる．$r \in \mathbb{Z}$ に対し $e_{i,j}(r) = (e_{i,j}(1))^r$ であることとあわせて，6 元集合 $\{e_{i,j}(1) : \ i \neq j \in [3]\}$ は $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ の生成集合であることがわかる[*5]．

今，$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ の 2 元 $A = e_{1,2}(1)$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．本稿では詳細を略すが，A と B（およびそれらの逆元）の積としてどの $e_{i,j}(1)$, $i \neq j \in [3]$, も書くことができる．例えば，

$$e_{1,3}(1) = [A, B^{-1}AB]$$

である．ここで本稿での群交換子（group commutator）は

$$[g,h] := g^{-1}h^{-1}gh$$

[*3] '群 G' といったとき，実際にはその群の同型類を指していることも多い．ここでも同様である．

[*4] 名前が示唆するように，基本行列は行列の基本変形と対応している．$e_{i,j}(r)$ を左からかけることは i 行目に j 行目の r 倍を加える基本変形，右からかけることは j 列目に i 列目の r 倍を加える基本変形と対応する．

[*5] 同様の議論で，全ての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し，$\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ が有限生成であることがわかる．

と定める．以上の議論により，(A,B) は $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ の 2-マークである．順序を変えることにより，2 つの 2-マークつき群 $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});A,B)$, $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});B,A)$ を得る．このとき，

$$(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});A,B)\ncong(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});B,A)$$

である．実際，A の位数は ∞ であるが B の位数は 3 であり，B を A に移すような群準同型写像は存在しない．

$\mathcal{G}(k)$ を，k-マークつき群（の同型類）$[\mathbf{G}]$（$[\mathbf{G}]$ を以下では単に $\mathbf{G}$ と略記する）全体の集合と定める．Grigorchuk [Gri84] は，この空間 $\mathcal{G}(k)$ に自然に入る位相空間の構造を考察した．以下，この位相を定式化する．

F_k を階数が k の（非可換）自由群とする．$\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ を F_k の自由基底とする．このとき，（同型類でない，具体的な）k-マークつき群 $\mathbf{F_k}=(F_k;a_1,a_2,\ldots,a_k)$ を考える*6．このとき，（具体的な）k-マークつき群 $\mathbf{G}=(G;s_1,s_2,\ldots,s_k)$ に対し，次の対応

$$[\mathbf{G}]\quad\longleftrightarrow\quad(\pi\colon\mathbf{F_k}\twoheadrightarrow\mathbf{G})/\sim$$

が存在する．ここで，$\pi\colon\mathbf{F_k}\twoheadrightarrow\mathbf{G}$ は $\mathbf{F}_k$ から $\mathbf{G}$ へのマークつき群の商写像であり（$\mathbf{F_k}$ が自由マークつき群であることからこのような射は存在し一意的である），$\sim$ は π をさらに k-マークつき群の同型写像 $\phi\colon\mathbf{G}\overset{\cong}{\to}\mathbf{H}$ で後から合成したものを全て同一視するという同値関係である．この状況で $\phi\circ\pi$ と π の（群準同型写像としての）核は同一であり，上の対応は次の対応

$$[\mathbf{G}]\quad\longleftrightarrow\quad\mathrm{Ker}\{\pi\colon\mathbf{F_k}\twoheadrightarrow\mathbf{G}\}\quad(\trianglelefteq F_k)$$

を誘導する．この対応は，同一視

$$\mathcal{G}(k)\quad=\quad\{N\subseteq F_k:\ N\trianglelefteq F_k\}\qquad(☆)$$

を導く．ここで，$N\trianglelefteq G$ は，N が群 G の正規部分群であることを表わす．実際，上の商写像 $\pi\colon F_k\twoheadrightarrow G$ が与えられたとき $\mathrm{Ker}(\pi)$ は F_k の正規部分群である．逆に，F_k の正規部分群 N が与えられたとき，k-マークつき群を $\mathbf{G}=(F_k/N;a_1N,a_2N,\ldots,a_kN)$ とおくとき，マークつき群の商写像 $\pi\colon\mathbf{F_k}\to\mathbf{G}$（の $\sim$ による同値類）が得られる．

(☆) において，その右辺は Tychonoff 積（直積）$\{0,1\}^{F_k}$ の部分集合とみなせることに注意しよう．F_k が可算集合であることから $\{0,1\}^{F_k}$ に入る Tychonoff 位相（直積位相）はコンパクトかつ距離化可能である．(☆) の右辺の集合は $\{0,1\}^{F_k}$ の部分集合として $N\subseteq F_k$ が「正規な」「部分群である」ことを要請しているが，これは Tychonoff 位相での閉条件である*7．従って，(☆) の右辺の集合には Tychonoff 位相空間 $\{0,1\}^{F_k}$ の閉部分空間として，コンパクトかつ距離化可能な位相が入る．以上の議論により，(☆) の対応を通じて，$\mathcal{G}(k)$ にも自然にコンパクトかつ距離化可能な位相空間としての構造が入る．

*6 このマークつき群のことを，**自由 k-マークつき群**（free k-marked group）といったりする．

*7 実際，「部分群である」ことは e_{F_k} を含むことと $(h_1,h_2)\mapsto h_1^{-1}h_2$ という操作で閉じていること，「正規である」ことはさらに各 $g\in F_k$ に対し $h\mapsto g^{-1}hg$ なる操作で閉じていることとして定式化できる．これらすべての条件は Tychonoff 位相での閉集合を与える条件である．あとは共通部分をとればよい．

定義 1.2 (位相空間 $\mathcal{G}(k)$)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する．このとき，上のようにして構成される（コンパクトかつ距離化可能な）位相空間 $\mathcal{G}(k)$ を，**k-マークつき群のなす（位相）空間**（the space of k-marked groups）という．

$\mathcal{G}(k)$ の上述の位相は**ケイリー位相**（Cayley topology）などと呼ばれる．

補足 1.3. 一般に局所コンパクト群 G に対し，G の閉部分群全体のなす空間にシャボティ位相（Chabauty topology）と呼ばれるコンパクトでハウスドルフな位相を入れることができる．G が離散群のとき，この位相は $\{0,1\}^G$ 上の Tychonoff 位相の，部分群全体のなす空間への制限と一致する．$\mathcal{G}(k)$ のケイリー位相は，$G = F_k$ に関するシャボティ位相の，さらに正規部分群全体のなす空間への制限とみなすこともできる．

以上の構成は数学的には曇りのないものであるが，$\mathcal{G}(k)$ のケイリー位相がどのようなものであるかは初見ではわかりにくい．（実際，(☆) の対応において，位相を定義するのに右辺の F_k の正規部分群の構造を用いている．一方，$\mathcal{G}(k)$ の元として捉えるときはその正規部分群で割った商群を考える．このような「商群 $\leftrightarrow$ 正規部分群（核）」という双対操作で (☆) の同一視が与えられている．そのため，$\mathcal{G}(k)$ 自身の位相として上で定めたものがどのようなふるまいをするか，を捉えるのは全く自明ではない．）次節でより幾何的（・組合せ論的）なこの位相の特徴づけを行なうが，ここでは群の表示を用いたより代数的・モデル理論的な捉え方を紹介する．

k-マークつき群（の同型類）$\mathbf{G} = (G; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ に対し，上のようにしてマークつき群の商写像から定まる群商写像 $\pi\colon F_k \twoheadrightarrow G$ が定まった．F_k の各元 $w \in F_k$（これを，$\{a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, \ldots, a_k^{\pm}\}$ をアルファベットとする**語**（word）といったりする）に対し，$\pi(w) = e_G$ が成立するとき，マークつき群 $\mathbf{G}$ は**関係 w を満たす**という；そうでないとき，$\mathbf{G}$ は**関係 w を満たさない**という．例えば，$k = 2$ で $\mathbf{F_2} = (F_2; a, b)$ とおくとき，関係 $w_1 := a^{-1}b^{-1}ab$ を満たす 2-マークつき群 $\mathbf{G}$ は台集合である群 G が可換であるようなものと一致する[*8]．また，$w_2 := b^3$ とおくと，2-マークつき群 $\mathbf{G}$ が関係 w_2 を満たすことは $\mathbf{G}$ のマークの 2 番目の元が単位元か位数 3 の元であることと同値である．例えば，例 1.1(2) の 2-マークつき群 $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}); A, B)$ と $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}); B, A)$ に対し，前者の 2-マークつき群は関係 w_2 を満たす．他方，後者は関係 w_2 を満たさない．

$\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ が関係 $w (\in F_k)$ を満たすことと，(☆) の対応において $\mathbf{G}$ と対応する $N \trianglelefteq F_k$ が w を元として含むことは同値である．従って，以下のように $\mathcal{G}(k)$ の位相を捉えることができる．

命題 1.4 ($\mathcal{G}(k)$ の位相の代数的・モデル理論的な解釈)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する．各 $w \in F_k$ に対し，$\mathcal{G}(k)$ の分割

$$\mathcal{G}(k) = \{\mathbf{G} : \mathbf{G} \text{ は関係 } w \text{ を満たす}\} \sqcup \{\mathbf{G} : \mathbf{G} \text{ は関係 } w \text{ を満たさない}\}$$

は $\mathcal{G}(k)$ をともに開かつ閉な 2 つの部分集合に分割している．さらに，上の分割に現れる 2 集合を $w \in F_k$ を動かしたとき得られる $\mathcal{G}(k)$ の部分集合族は，ケイリー位相の開基を与える．

このことから次のことがわかる．ここで，$\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ が**有限表示**（finitely presented）であると

[*8] 群が可換群であることと，そのある生成集合に対しそれらの元がどれも可換であるということは同値である．このことに注意せよ．

は，ある有限個の $w_1,\ldots,w_n \in F_k$ が存在して，$\mathbf{G}$ に (☆) の意味で対応する正規部分群 $N \trianglelefteq F_k$ が $\{w_1,\ldots,w_n\}$ の F_k 内での正規閉包と一致する[*9]ことをいう．より直観的にわかりやすい（が数学的に厳密にするにはもう少し説明が要る）形で言い換えると，$\mathbf{F_k}$ に関係 $w_1,w_2,\ldots,w_n$ を課してできる k-マークつき群が $\mathbf{G}$ と同型になることをいう．この定式化だと $\mathbf{G}$ の有限表示性は台集合となる群 G のみならずそのマークに依っているように思える．しかし，実は $\mathbf{G}$ の有限表示性は台集合となる群 G のみによって決まる性質である，従って，（有限生成群の）群性質であることが証明できる[*10]．実はより強く，有限生成群の有限表示性は群の擬等長（quasi-isometry）で不変な性質であることが知られている．擬等長の概念および上で述べた事実の証明に関しては，幾何学的群論の文献である [dlH00] をあげておく．例えば $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ は全ての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し有限表示であることが知られている．

補題 1.5 (有限表示性の，マークつき商群を用いた特徴づけ)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する．$\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ に対し，その（自分自身も含む）マークつき商群全体のなす $\mathcal{G}(k)$ の部分集合を $\mathcal{Q}_{\mathbf{G}}$ とおく．

このとき，$\mathbf{G}$ が有限表示であることと，$\mathcal{Q}_{\mathbf{G}}$ が $\mathcal{G}(k)$ の開部分集合であることは同値である．

Proof. まず ($\Rightarrow$) を示す．$\mathbf{G}$ を有限表示とし，$w_1,w_2,\ldots,w_n$ を $\mathbf{G}$ の表示を与える有限個の関係とする．各 $j \in [n]$ に対し $\mathcal{Q}_{w_j}$ で関係 w_j を満たす k-マークつき群全体のなす部分集合を表わすとき，

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{G}} = \bigcap_{j \in [n]} \mathcal{Q}_{w_j}$$

である．命題 1.4 より上式の右辺は開集合の有限個の共通部分であるので $\mathcal{G}(k)$ の開集合である．

次に ($\Leftarrow$) を示す．対偶を示そう．$\mathbf{G}$ が有限表示でないとする．このとき，その仮定から関係の無限列 $w_0 = e_{F_k}, w_1, w_2, \ldots$ であって，以下を満たすものが存在する[*11]．ここで $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ とする．

- その $n \in \mathbb{N}$ に対しても，$\mathbf{G}$ は関係 w_n を満たす．
- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbf{G}_n$ を自由マークつき群 $\mathbf{F_k}$ に関係 $w_0,w_1,\ldots,w_n$ を入れてできる群とする．（より数学的に厳密にいうと，$w_0,w_1,\ldots,w_n$ で正規部分群として生成される群 $N_n \trianglelefteq F_k$ と (☆) により対応する $\mathcal{G}(k)$ の元が $\mathbf{G}_n$ である．）このとき，$\mathbf{G}_n$ は関係 w_{n+1} を満たさない．特に，$\mathbf{G}_n \not\cong \mathbf{G}$ である．

[*9] 一般に，群 G とその部分集合 T に対し，T の G 内での**正規閉包**（normal closure）$\langle\langle T \rangle\rangle_G$ とは，T を含む G の正規部分群で包含に関して最小のものを指す．つまり，上の条件は，$w_1,w_2,\ldots,w_n$ とその逆元のほかにそれらの共役としてかける元も全て考えたときに，全ての $g \in F_k$ をそれらを用いた積として表わせる，ということと同値である．

[*10] 本稿で扱う内容だけからも示すことができる．補題 1.5 と補題 3.2 を組み合わせよ．

[*11] このような列が存在することは以下のようにしてわかる．$\mathbf{G}$ の満たす関係を全てもってきてこれを列として並べることができる（これが可算個しかないことは，関係 w をその語長に応じて並べることでわかる）．これで 1 番目と 3 番目の条件は満たされる．この中から部分列 $(w_n)_n$ を以下のようにして帰納的に抜き出してこよう．$w_0 = e_{F_k}$ とせよ．$w_0,w_1,\ldots,w_n$ が決まったとき，上のようにして作った $\mathbf{G}_n$ が満たす関係を上で取ってきた列から削除して，まだ残っている関係のうち番号が一番小さいような関係を w_{n+1} とせよ．このようにとることで，2 番目の条件も満たされる．ここで，$\mathbf{G}$ が有限表示でないことから，$w_0,\ldots,w_n$ から w_{n+1} を作る操作で w_{n+1} を取れなくなることは決してないことに注意せよ．

- 関係 $w_0, w_1, w_2, \ldots$ を全て $\mathbf{F_k}$ に入れてできる k-マークつき群（正確には上と同様に定義される）は $\mathbf{G}$ と同型である．

このとき，命題 1.4 による $\mathcal{G}(k)$ の位相の解釈を考えると，上のようにして定義される k-マークつき群の列 $(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbf{G}$ に $\mathcal{G}(k)$ で収束することがわかる．一方，2 番目の条件より，どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても $\mathbf{G}_n \notin \mathcal{Q}_{\mathbf{G}}$ である．ケイリー位相が距離化可能であることより，以上からこのとき $\mathcal{Q}_{\mathbf{G}}$ が $\mathcal{G}(k)$ の開集合でないことがわかる． □

上の証明で見たように，$\mathbf{G}$ が有限表示でないときは，全ての項が異なるようなマークつき群のマークつき群の商写像による列

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{F_k} \twoheadrightarrow \mathbf{G}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{G}_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathbf{G}_n \twoheadrightarrow \mathbf{G}_{n+1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \quad \mathbf{G}$$

で，ケイリー位相によって $\mathbf{G}$ への収束列となるものが必ず存在する．特に，有限表示でない $\mathbf{G}$ は $\mathcal{G}(k)$ の孤立点ではない．$\mathcal{G}(k)$ の孤立点に関しての研究も行なわれている： [dCGP07] を参照されたい．（実は，孤立点であることはマークの取り方に依らず，（有限生成）群の性質である：後述の補題 3.2 を参照せよ．）

2　ケイリー位相の幾何学的・組合せ論的特徴づけ

k-マークつき群 $\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ に対し，**ケイリー図式**および**ケイリーグラフ**と呼ばれる幾何学的かつ組合せ論的対象を定義することができる[*12]．本章ではケイリー図式を用いてケイリー位相での k-マークつき群の点列の収束を特徴づける[*13]．

定義 2.1 (ケイリー図式，ケイリーグラフ)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する．

(1) k-マークつき群 $\mathbf{G} = (G; S) = (G; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ に対し，**ケイリー図式**（Cayley diagram）$\mathrm{CayD}(\mathbf{G}) = \mathrm{CayD}(G; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ を以下のようにして構成する：頂点集合を $V = G$ とし，向きつき辺集合 $\overrightarrow{E}_D = \{\vec{e}_{g,i}\}$ を $g \in G$，$i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ で添え字付けて，各 $\vec{e}_{g,i}$ を

$$\vec{e}_{g,i} = (g, gs_i)$$

とおく．つまり，$\vec{e}_{g,i}$ は g を始点とし gs_i を終点とする向きつき辺である．向きつき辺 $\vec{e}_{g,i}$ の色を i とおくことにより，$\overrightarrow{E}_D$ の各辺を k 元集合 $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ で色づける．このようにしてできる，辺に向きおよび k 色の色付けの情報を載せたグラフ（これを本稿では図式と呼ぶ）を $\mathbf{G}$ のケイリー図式という．

---

*12 以下で見るようにケイリー図式とケイリーグラフは別物であり，ケイリーグラフがもっている情報量はケイリー図式のそれより一般に真に少ない．補足 2.3 を参照せよ．幾何学的群論の文脈ではケイリー図式の意味で ‘ケイリーグラフ’ という用語を用いることはまれである．ただし，そのような用語の濫用を行なっている文献もあるにはあるので注意されたい．

*13 このように $\mathcal{G}(k)$ 上の点列の収束をケイリー図式を用いて特徴づけられることが，この位相が ‘ケイリー位相’ と文献によって呼ばれる背景にあるのではないかと思われる．

(2) ケイリー図式 $\mathrm{CayD}(\mathbf{G}) = \mathrm{CayD}(G; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ から辺の向きおよび $[k]$ の元による色付けの情報をすべて忘れてできる無向グラフを**ケイリーグラフ**（Cayley graph）という．

ケイリー図式 $\mathrm{CayD}(\mathbf{G})$ において，その（向きを忘れてできる）無向グラフ $\mathrm{Cay}(\mathbf{G})$ における最短道距離（shortest path metric）を導入することで，その頂点集合 G を距離空間 $(G, d_{\mathbf{G}})$ と思うことができる*14．ここで，連結無向グラフ上の 2 頂点の間の最短道距離とは，それらの頂点を結ぶグラフ上の道の辺の本数の最小値（2 頂点が同じである場合は 0）として定める．

ケイリー図式において，各頂点からはどの色 $i \in [k]$ に対しても，色 i でその頂点から出ていく辺がちょうど 1 本，色 i でその頂点に入る辺がちょうど 1 本ある．従って，各頂点の次数は $2k$ である*15．$[k]$ を色の集合とするような 2 つの図式の間の**同型写像**とは，頂点集合の間の全単射であって辺の有無，向き，色（$\in [k]$）を全て保つもののことをいう．上で述べた各頂点の近傍の記述より，$[k]$ を色の集合とするケイリー図式同士の同型写像は，1 つの頂点の行き先を指定すると，存在するとしても一意に決まる*16．これは，一般に（辺の向きや色の情報のない）グラフの間の同型写像が 1 つの頂点の行き先を指定したとしても一般には一意的にはまったく決まらないことと好対照である．

ケイリー図式（およびケイリーグラフ）はともに頂点推移的な図式（およびグラフ）である．実際，群の左掛け算による作用

$$G \curvearrowright G; \quad g \cdot h := gh$$

は，ケイリー図式の図式としての（上の意味での）自己同型（および，ケイリーグラフのグラフ自己同型）を誘導する．実際，群の左掛け算と右掛け算は可換であるので，$\vec{e}_{hg,s}$ は辺 $\vec{e}_{g,s}$ を h の左掛け算で移したものと思えることに注意せよ*17．

例 2.2 (ケイリー図式・ケイリーグラフの例). (1) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とする．巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ において，$S = (1 \bmod n)$ はその 1-マークである．このときのケイリー図式 $\mathrm{CayD}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; 1 \bmod n)$ は n-サイクル C_n にサイクルをなすように向きをつけた図式と同型な（1 色からなる）図式

*14 上のようにして定まる G 上の距離は，G のその生成集合 $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ に関する左不変な語距離（word metric）と同一のものである．

*15 ここで，自己ループの次数への寄与は 2 つ分として計算している．また，マーク $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ に次数 2 の元 s がある場合，辺 (g, gs) と辺 (gs, g) はともに s の色のついた g と gs を結ぶ辺となるが，本稿の流儀ではこれら 2 本の辺はそのまま扱う．つまり，これらを 1 本に縮約しない．こうして，このときはケイリーグラフに多重辺が現れる．マークに共通の元が 2 つ以上現れるときも辺の縮約を行なわないので，このときもケイリーグラフに多重辺ができることになる．

*16 実際，この同型写像が一方の図式のある頂点 v を他方の図式のある頂点 v' に移すとする．このとき，各色 $i \in [k]$ に対し，v から色 i で出る一意的な辺に注目することで，その終点がこの同型写像で v' のどの近傍の点に移らなければいけないかが一意的に決まる．色 i で v に入る点に注目しても同様の議論ができる．こうして v の近傍に属する頂点が同型写像で v' の近傍のどの点に移らないといけないかが完全に決まる．これを繰り返して全体に同型写像を延ばすことができるとき，同型写像は一意的に存在する．これを繰り返した際にどこかで齟齬が生じた場合，v を v' に移す図式の同型写像は存在しない．

*17 他方，群が非可換である場合，一般には群の右掛け算による作用 $G \curvearrowleft G$ は図式／グラフとしての自己同型を誘導しないことに注意せよ．ただし，マーク S が正規であるとき，つまり，各 $g \in G$ に対し $g^{-1}Sg$ と S がマークとしての順序を取り換えると等しくなるとき，この右掛け算による作用はケイリーグラフへの自己同型を誘導する．しかし，その場合でもこの自己同型は一般には辺の色を変えてしまうため，群が可換でない限りはケイリー図式の自己同型とはならない．

である．

(2) $\mathrm{CayD}(\mathbb{Z};1)$ は 2-正則木 T_2（無限路）に無限路の向きをなすように辺の向きをつけた図式と同型な図式である．

(3) $\mathrm{CayD}(\mathbb{Z}^2;\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$ は $\mathbb{Z}^2$-グリッドにおいて，水平方向の辺を左から右への向きに色 $1\in[2]$ で，垂直方向の辺を下から上の向きに色 $2\in[2]$ で塗ってできる図式と同型である．

(4) $\mathbf{F_2}=(F_2;a,b)$ とおく．ケイリー図式 $\mathrm{CayD}(F_2;a,b)$ は 4-正則木（4-regular tree）T_4 の適切な向き，$[2]$ を色の集合とする辺配色での図式と同型である[*18]．

(5) 例 1.1(2) の 2-マークつき群 $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});A,B)$, $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});B,A)$ において，ケイリー図式 $\mathrm{CayD}(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});A,B)$, $\mathrm{CayD}(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});B,A)$ は実際に図で描こうと思うと困難を極めるが，数学的にはちゃんと定まった図式である．これらの図式は辺の色集合 $[2]$ において $1\in[2]$ で塗った辺と $2\in[2]$ で塗った辺を入れ替えることにより移り合う．しかし，一般に，$[k]$ を色の集合とする 2 つの図式の同型写像において辺の色を入れ替えることは許されていない．
この 2 つのケイリー図式 $\mathrm{CayD}(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});A,B)$, $\mathrm{CayD}(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});B,A)$ は（$[2]$ を色の集合とする図式として）同型でない．実際，前者には $2\in[2]$ を辺の色とするもので長さ 3 の（向きまで込みの）サイクルがあるが，後者にはそのようなものはない[*19]．

ケイリー図式からは群のマークの元とその逆元の間の（全ての長さの）群算法表を復元することができる．この意味で，ケイリー図式は‘マークつき群そのものを覚えている’といえる．より正確には，2 つの k-マークつき群 $\mathbf{G}=(G;s_1,s_2,\ldots,s_k)$, $\mathbf{H}=(H;t_1,t_2,\ldots,t_k)$ が（マークつき群として）同型であることと，ケイリー図式 $\mathrm{CayD}(\mathbf{G})$, $\mathrm{CayD}(\mathbf{H})$ が（$[k]$ を色の集合とする図式として）同型であることは同値である．特に，ケイリー図式から元の群（の同型類）を復元できる．

補足 2.3. 他方，異なる群において，それぞれのマークをうまくとるとできるケイリーグラフが同型になってしまうことは大いにあり得る．有限群，無限群でそれぞれ例を与える．

(1) G_1, G_2 を位数が等しい有限群とする．位数を n とする．このとき，G_1 の $(n-1)$-マーク S_1 を $G_1\setminus\{e_{G_1}\}$ に好きに順序をつけたもの，G_2 の $(n-1)$-マーク S_2 を $G_2\setminus\{e_{G_2}\}$ に好きに順序をつけたものとする．このとき，できるケイリーグラフ $\mathrm{Cay}(G_1;S_1)$, $\mathrm{Cay}(G_2;S_2)$ はどちらも頂点数が n の完全グラフの各辺を 2 重辺にしたようなグラフとなる[*20]．

(2) (1) の構成をうまく利用することで，無限群での例も作れる．その際，群の間の**（制限）リース積**（(restricted) wreath product）という構成が役に立つ．G, H を離散群とする．このと

[*18] 向き，配色は，実は上述の各点の周りでの局所的な条件を満たすようにすると，同型を除いて一意的に決まってしまう．このことには木にサイクルがないことが効いている．

[*19] この議論は，例 1.1(2) において $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});A,B)$ と $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z});B,A)$ が同型でないことを示したときの議論とまさに同一である．

[*20] この構成を少し変形することで，$G_1\times(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ と $G_2\times(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ のケイリーグラフで，ともに n 頂点の完全 3 部グラフ $K_{n,n,n}$ となるようなものを作ることができる．これは多重辺や自己ループのない例を与える．

き，G と H の（制限）リース積とは，半直積

$$G \wr H := (\oplus_{h\in H} G) \rtimes H$$

ことである．ここで $\oplus_{h\in H} G$ は G のコピー H 分の直和（つまり，高々有限個の H の元を除いて $g_h = e_G$ となっているような $(g_h)_{h\in H}$ の形の元のなす群[*21]），半直積を定める H の作用は H のそれ自身に対する右掛け算 $H \curvearrowleft H$ による直和の成分のシフトとする．$\oplus_{h\in H} G$ の元は $f\colon H \to G$ で高々有限個の H の元を除いて $f(h) = e_G$ となる写像（群準同型性を要請しない）と同一視できる．$g \in G$, $h \in H$ に対し，$g\delta_h \in \oplus_{h\in H} G$ をこの同一視のもとで，$f(h) = g$ を満たし他の H の元は e_G に移す写像の表わす元とする．特に $e_G\delta_{e_H}$（これは，全ての $h \in H$ の元を e_G に写す写像である）のことを $\mathbf{e}$ と書くことにする[*22]．

今，G_1, G_2 を $\#G_1 = \#G_2 = n \in \mathbb{N}$ となる有限群とする．このとき，$G_1 \wr \mathbb{Z}$, $G_2 \wr \mathbb{Z}$ の $2n$-マーク S_1, S_2 をそれぞれ以下で定める：S_1 を $\{(g\delta_0, 1), (g\delta_0, 2) \colon\ g \in G_1\}$ を好きな順序で並べたマーク，S_2 を $\{(g\delta_0, 1), (g\delta_0, 2) \colon\ g \in G_2\}$ を好きな順序で並べたマークとする[*23]．このとき，対応するケイリーグラフ $\mathrm{Cay}(G_1; S_1)$, $\mathrm{Cay}(G_2; S_2)$ はともに多重辺やループのないグラフで，しかもグラフとして同型なものになっている[*24]．

補足 2.3(2) の例は次の意味で示唆的である：Gromov の幾何学的群論における著名な結果 [Gro81] により，ケイリーグラフの体積増大度（後述の R-閉球体の濃度の $R \to \infty$ での挙動）が多項式的増大であるような有限生成群は，指数有限の部分群として冪零群を含むことが知られている．体積増大が多項式的であるという条件はグラフの擬等長で保たれるので，特に「指数有限の部分群として冪零群を含む」という有限生成群の性質も擬等長で保たれることが従う．特に ‘グラフの等長’ は擬等長の特別な場合であり，上の「」という性質は有限生成群のケイリーグラフによって判定できる性質であることも従う．このように Gromov の定理は体積増大度という幾何学的な性質から有限生成群の代数的な性質を導いている，という意味で大変趣のある定理である．この定理を見ると，自然に思える問題意識として，『指数有限の部分群として可解群を含む』という有限生成群の群性質に関して同様のことができないか，と考えるのではないだろうか．しかし，この『』を考えたとたんに枠組みが崩壊してしまう．実際，補足 2.3(2) の例において，位数の等しい有限群 G_1, G_2 を一方を可換群でもう一方を可換からほど遠い群（例えば，非可換単純群）ととることができる[*25]．このとき，$G_1 \wr \mathbb{Z}$ は可解群である．一方，$G_2 \wr \mathbb{Z}$ は上の『』を満たさない．従って，グラフの擬等長を考える以前に，同型なケイリーグラフをもつような例で，性質『』をもつものともたないものが混在するような例が作れてしまう．このことは，幾何学的群論において，冪零の世界と可解の世界でワイルドさに大きな開きがあることを示唆している．

[*21] ‘制限’ しないリース積はここで直和の代わりに直積 $\prod_{h\in H} G$ をとる．こうしてしまうと H が無限群，G が非自明群であるとき ‘非制限’ リース積は連続濃度以上の群となってしまい，有限生成群の枠組みに乗らない．

[*22] $\mathbf{e}$ は群 $\oplus_{h\in H} G$ の単位元である．

[*23] これらがマークとなっていることを証明されたい．

[*24] この構成で $\mathbb{Z}$ は他の有限生成無限群に取り換えることもできる．

[*25] 例えば，$G_1 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathrm{Alt}(6)$ など．ここで $\mathrm{Alt}(n)$ は n 次交代群を表わす．

定義 2.4 (ケイリー図式の（閉）球体)．$R \in \mathbb{N}$ に対し，ケイリー図式 $\mathrm{CayD}(\mathbf{G})$ の単位元 e_G 中心の **R-閉球体**（R-closed ball）$B_{\mathbf{G}}(e_G, R)$ を以下のような図式として定める．：頂点集合を $\{g \in G: \ d_{\mathbf{G}}(e_G, g) \leq R\}$ とするような図式 $\mathrm{CayD}(\mathbf{G})$ の誘導部分図式とする．つまり，辺集合は始点・終点がともに上の頂点集合に属するような $\mathrm{CayD}(\mathbf{G})$ の辺全体からなる集合とし，これらの辺に対し，その向きや色（$\in [k]$）の情報を全て保持する．

さらに，上の図式において，閉球体の中心 e_G を特別視して，$B_{\mathbf{G}}(e_G, R)$ を中心 e_G の情報も保持した図式（点つき図式）とみなす．

ケイリー図式の頂点推移性より，閉球体を考えるときに実質的に単位元中心のものだけを考えれば十分であることに注意せよ．以上の準備をもとに，$\mathcal{G}(k)$ の（ケイリー）位相のケイリー図式を用いた特徴づけを述べる．ここで，ケイリー位相は距離化可能であるので，点列の収束を指定することで位相が指定されることに留意されたい．

命題 2.5 (ケイリー位相の幾何学的・組合せ論的特徴づけ)．$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する．$\mathcal{G}(k)$ 上の点列 $(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $\mathbf{G}_\infty \in \mathcal{G}(k)$ に対し，ケイリー位相で $\lim_{n\to\infty} \mathbf{G}_n = \mathbf{G}_\infty$ となることと以下が成り立つことは同値である：「どんな $R \in \mathbb{N}$ に対してもある $n_R \in \mathbb{N}$ が存在し，全ての $n \geq n_R$ なる $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$B_{\mathbf{G}_n}(e_{G_n}, R) \cong B_{\mathbf{G}_\infty}(e_{G_\infty}, R)$$

である．」

ここで，上の閉球体の間の同型は，点つき（$[k]$ を色の集合とする）図式としての同型である．つまり，頂点集合の間の全単射で閉球体の中心を保つものが存在し，この写像が図式としての同型を誘導する．

Proof. $\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ と (☆) により対応する $N_{\mathbf{G}} \trianglelefteq F_k$ をとる．各 $R \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbf{F_k}$ の R-閉球体の頂点集合を $W_R(:= \{g \in F_k : d_{\mathbf{F_k}}(e_{F_k}, g) \leq R\})$ とおく．このとき $\mathbf{G}$ の R-閉球体 $B_{\mathbf{G}}(e_G, R)$ の点つき図式の情報は $N_{\mathbf{G}} \cap W_{2R}$ で完全に決定されることに注意せよ．実際，$B_{\mathbf{G}}(e_G, R)$ の頂点集合 V_R とおこう．$\pi\colon F_k \twoheadrightarrow F_k/N_{\mathbf{G}} \simeq G$ をマークつき群の商写像から定まる群の商写像とするとき，$x, y \in V_R$ に対してある $w, z \in W_R$ が存在し $x = \pi(w)$, $y = \pi(z)$ とおける．このとき，$x^{-1}y = \pi(w^{-1}z)$ であり，$w^{-1}z \in W_{2R}$ であるので，$x, y \in V_R$ がいつ 1 点につぶれているかは $N \cap W_{2R}$ の情報はあれば完全に決定できる．このことから，上の主張を確認するのはたやすい．

ケイリー位相の (☆) の対応を用いた定義より，$\lim_{n\to\infty} \mathbf{G}_n = \mathbf{G}_\infty$ であることは，全ての $R \in \mathbb{N}$ に対して，R に応じて十分大きい $n \in \mathbb{N}$ では $N_{\mathbf{G}_n} \cap W_R = N_{\mathbf{G}_\infty} \cap W_R$ が成り立つということと同値である．（$\#W_R < \infty$ かつ $\bigcup_{R\in\mathbb{N}} W_R = F_k$ であることに注意せよ．）以上のことから，命題で主張した同値性を得る．$\square$

命題 2.5 で記述したケイリー位相での収束の特徴づけは，「ケイリー図式の**点つき図式としての局所収束**」（local convergence as rooted diagrams）と呼ばれることもある．‘局所’ というのは R-閉球体の挙動のみを（各固定した $R \in \mathbb{N}$ で）観測していることに由来する．‘局所’ であることのイメージが掴みやすい例として，例 2.9 と例 2.10 をそれぞれ参照されたい．

系 2.6. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．$\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ を有限マークつき群とするとき，$\mathbf{G}$ は孤立点である．

Proof. ケイリー位相は距離化可能なので，「$\mathcal{G}(k)$ 上の $\mathbf{G}$ への収束列 $(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，十分大きい n では常に $\mathbf{G}_n = \mathbf{G}$ となっている」ことを示すことが必要十分である．G が有限群なので，$R := \sup_{g\in G} d_{\mathbf{G}}(e_G, g)$ は有限値である．この R に対し命題 2.5 を適用する．このとき，$n \geq n_R$ なる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{G}_n = \mathbf{G}$ であることを示すことはたやすい． □

例 2.7 ($\mathcal{G}(1)$ の決定)．命題 2.5 を用いて，1-マークつき群のなす空間 $\mathcal{G}(1)$ の構造を決定しよう．1 元生成群は巡回群であるので，あり得る群は有限巡回（マークつき）群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; 1 \bmod n)$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ および無限巡回（マークつき）群 $(\mathbb{Z}; 1)$ である[26]．このうち，無限巡回群以外は系 2.6 より $\mathcal{G}(1)$ の孤立点である．

以下，ケイリー位相での次の収束

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; 1 \bmod n) = (\mathbb{Z}; 1)$$

が成り立つことを示す．これにより，$\mathcal{G}(1)$ が完全に把握できたことになる．$R \in \mathbb{N}$ に対し，$n_R := 2R + 1$ とおく．このとき，$n \geq n_R$ なる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; 1 \bmod n)$ のケイリー図形における単位元中心の R-閉球体は中心から左右に長さ R ずつ伸びる長さ $2R$ の道に左から右に流れるように辺の向きを入れたものと（点つき辺 1 色図式として）同型である．これは，$\mathrm{CayD}(\mathbb{Z}; 1)$ の R-閉球体においても同様である．従って，命題 2.5 により，上の収束が示される．

ケイリー位相による収束が‘局所’収束といわれる理由は上の例からもわかる．大域的に見ると $\mathrm{CayD}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; 1 \bmod n)$ はサイクルであるが，n が R に対して十分大きい状況で R-閉球体のみを見ると，それは無限路 $\mathrm{CayD}(\mathbb{Z}; 1)$ の R-閉球体と区別がつかない．このように，‘局所的な’視点でどんどん大きくなっていく半径 R に関して閉球体の区別がつかなくなっていくような列が極限のマークつき群への収束列である．より‘局所的な’収束であることの意味がはっきりする例として，例 2.9 を挙げる．

$\mathcal{G}(1)$ の位相構造は上のように決定できた．しかし，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ での $\mathcal{G}(k)$ の把握は，どの k においても大変困難である．1 元生成群は巡回群であり分類ができたが，2 元生成群を分類するということは「全ての可算群（の同型類）を分類する」という問題と同程度に無理である．ここで，**可算群**（countable group）とは高々可算濃度をもつ群のことを指す．実際，例えば Higman–Neumann–Neumann の埋め込み定理 [HNN49] より，どんな可算群も（それに応じたある）2 元生成群に部分群として埋め込むことができることが知られている．例えば次の問題は，2019 年時点で未解決だと思われる．

問題 2.8. $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする．$\mathcal{G}(k_1)$ と $\mathcal{G}(k_2)$ が同相になるのはどのような組 (k_1, k_2) のときであろうか？

$\mathcal{G}(k)$ はカントール集合 $\{0,1\}^{F_k}$ の閉部分集合であるが，一般に孤立点の存在がその解析を困難にしている．例えば系 2.6 より有限マークつき群は全て孤立点である．$\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ を台集合

[26] $n = 1$ のときの有限巡回群は自明群である．

の群としてもつ k-マークつき群を考えると，これは $\mathcal{G}(k)$ の孤立点ではない．（後述の例 3.3(2) を参照せよ）しかし，$\mathcal{G}(k)$ の孤立点を全て除去すると，このマークつき群は孤立点となる．実際，Margulis の正規部分群定理から，$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ の自分同型を除く商写像は有限商群へのものである．$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ が有限表示群であることから，補題 1.5 より上の主張が従う．一般に $\mathcal{G}(k)$ の Cantor–Bendixson ランクに関しても研究が行なわれており，どんな $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ においてもこれが ω^{ω} 以上であることが知られている（[Cor11]）．

例 2.9 (‘局所的な’ 収束を表わす例)．以下の例は Romain Tessera 氏から教わった例である．ケイリー位相での収束が ‘局所的である’ ことの理解に役立つ例だと思われるので，本稿でも紹介する．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathcal{G}(2)$ の元を $\mathbf{G}_n = (\mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z}; 1, n+1)$ とおく[*27]．ここで，本来はマークの各元に ‘mod 2^{n+1}’ をつけるべきだが省略している．このとき $(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{G}(2)$ 上の（ケイリー位相に関する）収束列であることを示せる．この収束列の極限として現れる 2-マークつき群はどのような群であろうか．

ここでは，命題 1.4 と命題 2.5 の ‘ハイブリッド’ のような形で説明を行なう．$\mathbf{G}_n$ の 2-マークを $(1, n+1) =: (a_n, b_n)$ とおく．$G_n = \mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z}$ は加法群であるが，その群演算を乗法的に書くことにする．これら 2-マークの元 (a_n, b_n) の間には，例えば $a_n^{2^{n+1}} = e_{G_n}$ なる関係がある．これは，ケイリー図形 $\mathrm{Cay}(\mathbf{G}_n)$ に関する言明としては「$1(\in [2])$ の色のついた辺を順の向きに 2^{n+1} 回進むともとの点に戻る」と対応する．しかし，$n \to \infty$ で $2^{n+1} \to \infty$ であるので，この関係は ‘局所的な’ 見方では観察することはできない : 例 2.7 での議論を思い返してみよう．同様にして，b_n の適切な正の整数乗も e_{G_n} と等しいが，このことも ‘局所的には’ 観察できない．また，a_n と b_n の間には，$a_n^{n+1} = b_n$ という関係もある．これはケイリー図形の言葉に変換すると，「1 の色のついた辺を順の向きに $n+1$ 回進むことと，2 の色のついた辺を順の向きに 1 回進むことが同じ移動を表わす」ということである．この関係も今までと同様に，$n \to \infty$ で $n+1 \to \infty$ であることから ‘局所的な’ 見方では観察できない．

では，(a_n, b_n) 上の関係のうちどのようなものが観測できるのであろうか．それは，可換性 :「$a_n b_n = b_n a_n$」である．（ケイリー図形の言葉では，「1 の色のついた辺を順の向きに進んだあとに 2 の色のついた辺を順の向きに進むことと，進む辺の色の選び方を逆（2 の色のあとに 1 の色）としたときの操作が全く同じ移動を表わす」という主張と対応する．）この関係（ないし，ケイリー図形における主張）を観測するには，半径 2 の閉球体をとればよい．このため，この関係は ‘局所的な’ 見方でも観測することができる．

本稿では行なわないが，以上の議論を数学的に正当化することができ，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{G}_n = (\mathbb{Z}^2; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

であることが示せる[*28]．例 2.7 で見た有限巡回群の無限巡回群への収束では，各 R に対

[*27] 1 番目の元だけで群を生成できるが，マークには冗長な元があっても全く構わないのであった．

[*28] 興味のある読者は，例えば $n = 4$ のときに，実際に $\mathrm{CayD}(\mathbf{G}_n)$ を描き，その 2-閉球体が $\mathbb{Z}^2$ の標準格子の 2-閉球体と点つき図式として同型であることを確かめてほしい．同様のことを各 R に対し $n \geq 2R$ で行なうことがで

し $n \geq 2R+1$ ととれば R-閉球体を極限のものと同型にできた．$n=2R+1$ のときの $\mathrm{CayD}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};1)$ の直径[*29]は $R+1$ であるので，あまり ‘局所的’ という感覚が湧かなかった読者もいるかもしれない．しかし本例では，各 R に対し $n_R=2R$ が命題 2.5 の最良の評価である．一方，$n \geq 2R$ では $\mathrm{CayD}(\mathbf{G}_n)$ の直径は $\frac{2^{2R}}{2R+1}$ 以上で，これは閉球体を極限のマークつき群と同型にできる直径 R と比べてはるかに大きい．このように，命題 2.5 の条件を満たす n_R をとるとき，R-閉球体はケイリー図形全体のうちで非常に小さい部分となっていることはしばしば起こる．これはケイリー位相のおける収束を ‘局所的な’ 収束というときに，もっておくべき正しいイメージである．

本例は次の意味でも面白い．全く同様の議論により，$\mathcal{G}(2)$ 上での（ケイリー位相に関する）収束

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{Z};1,n+1)=(\mathbb{Z}^2;\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$$

も示せる．従って，ケイリー位相に関するマークつき群の極限をとったときに，ある種の ‘次元’[*30]が真に増加することが起こり得る．

例 2.10 (マークつきリース積における収束). 補足 2.3(2) で述べた（制限）リース積 $G \wr H$ と関連する記号を思い出そう．今，G が k-マーク $(s_1,\ldots,s_k)$, H が l-マーク $(t_1,\ldots,t_l)$ をもつとき，

$$((s_1\delta_{e_H},e_H),(s_2\delta_{e_H},e_H),\ldots,(s_k\delta_{e_H},e_H),(s_2\delta_{e_H},e_H),(\mathbf{e},t_1),(\mathbf{e},t_2),\ldots,(\mathbf{e},t_l))$$

が $G \wr H$ の $(k+l)$-マークを与えることを容易に証明できる．こうして，$\mathbf{G}\in\mathcal{G}(k)$, $H\in\mathcal{G}(l)$ に対して，その ‘マークつきリース積’ $\mathbf{G}\wr\mathbf{H}\in\mathcal{G}(k+l)$ を上の $(k+l)$-マークを入れることにより定義できる．なお，上の記号 ‘$\mathbf{G}\wr\mathbf{H}$’ は本稿だけの記号であることに注意されたい．

このとき，‘局所的な’ 議論を行なうことにより，以下を証明することができる．

補題 2.11. $k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．$\mathbf{G}_n\to\mathbf{G}_\infty$ を $\mathcal{G}(k)$ 上の（ケイリー位相での，以下同様）収束列，$\mathbf{H}_n\to\mathbf{H}_\infty$ を $\mathcal{G}(l)$ 上の収束列とする．このとき，$\mathcal{G}(k+l)$ 上で，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{G}_n\wr\mathbf{H}_n=\mathbf{G}_\infty\wr\mathbf{H}_\infty$$

が成り立つ．

実は補題 2.11 は次章で述べる「LEF 群」との関係で興味深い．補足 3.4(3) を参照されたい．

一般に $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して，埋め込み $\iota_k\colon\mathcal{G}(k)\hookrightarrow\mathcal{G}(k+1)$ を，

$$\iota_k\colon\mathcal{G}(k)\hookrightarrow\mathcal{G}(k+1)\colon(G;s_1,\ldots,s_k)\mapsto(G;s_1,\ldots,s_k,e_G)$$

により定義することができる．命題 2.5 および命題 1.4 を考えると ι_k が像への同相写像で，かつ，$\iota_k(\mathcal{G}(k))$ が $\mathcal{G}(k+1)$ の開集合であることがわかる．実際，後者の主張は $\mathbf{F_{k+1}}=$

きる．

[*29] 連結グラフの**直径**（diameter）とは，2 頂点間の（最短道）距離の上限のことをいう．

[*30] 上の収束列の例だと，自由アーベル群としてのランクと捉えてもよいし，**漸近次元**（asymptotic dimension）と捉えてもよい．

$(F_{k+1}; a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ において，$\iota_k(\mathcal{G}(k))$ が関係 a_{k+1} を満たすような $\mathcal{G}(k+1)$ の元全体のなす集合と一致していることからわかる．帰納系 $(\mathcal{G}(k) \xrightarrow{\iota_k} \mathcal{G}(k+1))_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ における帰納極限 $\mathcal{G}$ は**「マークつき群全体のなす位相空間」**（the space of marked groups）と呼ばれる．この空間の位相は局所コンパクト，σ-コンパクトで距離化可能である．各 $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$ に対してある $k_{\mathbf{G}} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在し，$\mathbf{G}$ の $\mathcal{G}$ における開かつ閉な近傍として $\mathcal{G}(k_{\mathbf{G}})$ と同相なものがとれる．

3 LEF 群

代数構造を有限代数構造で '近似' する，という理論は Mal'cev [Mal73] によって始められたとされる．特に群構造に対しこれを考えたものが **LEF 群**である．ここで，'LEF' は "Locally Embeddable into (the class of) Finite groups" の略である．LEF 群に関しては，Stëpin による論文 [Stë84] および Vershik と Gordon によって書かれた [VG97] が基本的な文献となる．次の概念はどちらも一般の群に対して定義されるが[*31]，本稿ではマークつき群に対し定義を行なう．

定義 3.1 (LEF 群と RF（剰余有限）群)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし，$\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ とする．

(1) $\mathbf{G}$ が **LEF**（Locally Embeddable into Finite groups）**（マークつき）群**であるとは，$\mathcal{G}(k)$ 上の有限マークつき群の列 $(\mathbf{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって，$\lim_{n \to \infty} \mathbf{G}_n = \mathbf{G}$ を満たすものが存在することをいう．
このときの列 $(\mathbf{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を，$\mathbf{G}$ の **LEF 近似**（LEF approximation）という．

(2) $\mathbf{G}$ が**剰余有限（マークつき）群**（Residually Finite marked group．以下，剰余有限群を **RF 群**と書く）であるとは，$\mathbf{G}$ の LEF 近似であって，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbf{G}_n$ が $\mathbf{G}$ のマークつき商群であるようなものが存在することをいう．

以上の定義からは，LEF 性質も RF 性質もマークつき群の性質に思える．しかし，以下の補題より，これらは（マークに依らない）群の性質であることがわかる．定義より一般に，RF 群であることは LEF 群であることより強いことに注意せよ．

補題 3.2. $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．$\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$, $\mathbf{G}' \in \mathcal{G}(l)$ を（マークを忘れた台集合としての）群が同型であるようなマークつき群とする．このとき，$\mathbf{G} \in \mathcal{G}(k)$ の開かつ閉集合 U で $x \in U$ を満たすもの，$\mathcal{G}(l)$ の開かつ閉集合 $V \ni \mathbf{G}'$，同相写像 $\Phi \colon U \xrightarrow{\approx} V$ で，以下を満たすものが存在する：全ての $\mathbf{H} \in U$ に対し，$\mathbf{H}$ と $\Phi(\mathbf{H})$ の台集合としての群が同型である．

Proof. ここでは証明のアイディアのみを述べる．各 $R \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{N}_{\mathbb{G}}(R) \subseteq \mathcal{G}(k)$ をケイリー図形の R-閉球体が $\mathbf{G}$ のものと点つき図式として同型であるような k-マークつき全体のなす集合と定義しよう．すると，命題 2.5 で述べたことから，これは $\mathbf{G}$ の $\mathcal{G}(k)$ の開近傍でかつ閉集

[*31] 例えば，LEF 群の定義は以下である：群 G が LEF であるとは，どんな空でない有限集合 $S \subseteq G$ に対しても有限群 H_S と単射な写像 $\psi_S \colon S \to H_S$ であって，ψ_S が部分的に準同型（partial homomorphism）となるものが存在することをいう．ここで，$\psi_S \colon S \to H_S$ が「部分的に準同型」であるとは，「$s, t \in S$ が $st \in S$ を満たすとき，$\psi_S(st) = \psi_S(s)\psi_S(t)$ を満たす」ことをいう．

合である．$\mathbf{G}, \mathbf{G}'$ に共通する台集合の群を G とおく．このとき，全ての $R \in \mathbb{N}$ に対してある $R' \in \mathbb{N}$ が存在し，$B_{\mathbf{G}}(e_G, R')$ の頂点集合（$\subseteq G$）が $B_{\mathbf{G}'}(e_G, R)$ を含むようにできる．以上の観察をうまく用いると，補題 3.2 の条件を満たすような U, V, Φ を構成することができる． □

LEF 性質と RF 性質は有限生成部分群に遺伝することも，補題 3.2 と類似の議論から証明できる[*32]．

例 3.3. (1) 例 2.7 および例 2.9 より $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}^2$ はともに LEF 群である．特に，例 2.9 の列 $(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は自由アーベル群 $\mathbb{Z}^2$ とその標準基底からなる 2-マークつき群の面白い LEF 近似を与える．

上の 2 つの例となっている LEF 近似は，ともに極限のマークつき群のマークつき商群からなる列であることがわかる．従って，$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}^2$ はより強く RF 群である．

(2) 例 1.1(2) のマークつき群 $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}); A, B)$ をとる．その LEF 近似を次のようにして構成できる：$p_0 < p_1 < \cdots < p_n < \cdots$ を素数の無限列とする．このとき，mod p 還元による写像はマークつき群の商写像

$$(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}); A, B) \twoheadrightarrow \mathbf{G}_n := (\mathrm{SL}(3,\mathbb{F}_{p_n}); A \bmod p_n, B \bmod p_n)$$

を誘導する．ここで，素数 p に対し，$\mathbb{F}_p$ は位数 p の有限体を表わす．このとき，$(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}); A, B)$ の LEF 近似である．実際，$\mathbf{G}_n$ のケイリー図形は $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}); A, B)$ のケイリー図形を ‘mod p_n で折りたたんでできる’（有限）ケイリー図形である．各 R に対し，n を十分大きくとれば，単位元中心の R-閉球体上では，この ‘mod p_n による折りたたみ’ による情報のロスが全くないようにできる[*33]．以上から命題 2.5 の条件が満たされる．こうして $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}); A, B)$ の LEF 近似が得られる．構成からこの LEF 近似はもとのマークつき群のマークつき商群として与えられているので，$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ はさらに強く RF 群である．

この例を見ればわかるように，群が RF 群であるかどうかはマークに依らない形で簡単に読み替えることができる．実際，（一般に有限生成とは限らない）群 G が RF であることは，「その群の指数有限の正規部分群全体のなす族の共通部分が自明部分群 $\{e\}$ である」こととして特徴づけられる．

補足 3.4 (LEF だが RF でない群の例). 上で述べたように，一般には LEF 性質は RF 性質より真に弱い．ここでは，これに関連することをまとめる．

(1) 実は次のことがわかる．最初にこのことに気づいたのは誰であるかは不明だが，少なくとも [VG97] には記述されている．

補題 3.5. G を有限表示群とする．このとき，G が LEF 群であることと G が RF 群であることは同値である．

---

*32 上で述べたように，これらの性質は有限生成とは限らない一般の群に対しても定義できる．例えば上の注で述べた一般の群に対する LEF 性質の定義を用いると，この性質が一般の部分群に遺伝することは明らかである．

*33 例えば，以下のように議論を行なえばよい．$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ の $\{A, B\}$ に関する語長で長さが R 以下のものの個数は（R を固定すれば）有限個であるので，そのような各元に関する $3 \times 3 = 9$ 個の成分（$\in \mathbb{Z}$）の絶対値の取り得る値の最大値も有限である．この値を N_R とおくとき，$p_n > 2N_R$ となるように n を決めればよい．

Proof. 有限表示群 G が LEF であるとき RF であることを示せばよい．このことは，補題 1.5 の ($\Rightarrow$) を考えると直ちに従う． □

補題 3.5 から，LEF 群でないような群の例を挙げることもできる．有限表示で RF 群でないような群はそのような例である[*34]．LEF 性質は部分群に遺伝するので，有限表示とは限らない群であってもこうした群を部分群として含む群は LEF 群でない．

(2) 有限表示と限らない群に対しては，LEF 性質は RF 性質よりも真に弱い．そのような例を挙げる．$n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{Sym}(n)$ を $[n]$ 上の対称群とする．よく知られているように，互換と巡回置換からなる組 $(\sigma_n, \tau_n) := ((12), (12\cdots n))$ は $\mathrm{Sym}(n)$ の 2-マークとなる．こうしてできる有限 2-マークつき群 $(\mathrm{Sym}(n); \sigma_n, \tau_n)$ の $n \to \infty$ での（ケイリー位相での）収束先を求めよう．

ここでは数学的に厳密な議論ではなく，直観的な議論のみを述べる．$[n]$ の各元をサイクル上に反時計回りに配置するとき，σ_n は 0 と 1 の互換，τ はこのサイクルを反時計回りに回転することに伴う巡回置換とみなせる．このサイクルが $n \to \infty$ で ‘局所的な’ 観点からは $\mathbb{Z}$ の元を一直線上に左から右に並べた直線に ‘収束’ していたのだった．（例 2.7 参照．）従って，$n \to \infty$ での極限的には，σ_∞ はこの直線上での 0 と 1 の互換，τ_∞ はこの直線上での ‘右に 1 ずらす’ ことによる置換[*35]となると考えられる．σ_∞, τ_∞ はともに $\mathbb{Z}$ を集合と思ったときの対称群（全ての全単射のなす群）$\mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ の元である．よって，$G_\infty = \langle \sigma_\infty, \tau_\infty \rangle (\leqslant \mathrm{Sym}(\mathbb{Z}))$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} \mathbf{G}_n = (G_\infty; \sigma_\infty, \tau_\infty)$ である．（以上のことは，厳密に証明することもできる．）

$\mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z})$ を有限台をもつ $\mathbb{Z}$ 上の置換全体のなす群（つまり，$\mathbb{Z}$ 上の全単射で，高々有限個の元を除いて動かさないようなもの全体のなす群）とすると，これは $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ の正規部分群である．$\sigma_\infty \in \mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z})$ だが $\tau_\infty \notin \mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z})$ であることに注意すると，G_∞ が半直積

$$G_\infty = \mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$$

の形の群であることがわかる．ここで，$\mathbb{Z}$ による $\mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z})$ への作用は τ_∞ での共役をとる（集合 $\mathbb{Z}$ 上のシフトと対応する）で与えられる．以上より上記の群 $\mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ は LEF 群である．

他方，この群 $\mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ は RF 群ではない．実際，この群は $\mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z})$ のうち偶置換のみのなす部分群 $\mathrm{Alt}(\mathbb{Z})$（無限交代群）を部分群として含む．全ての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 5}$ に対し $\mathrm{Alt}(n)$ が単純群であったことから，$\mathrm{Alt}(\mathbb{Z})$ も単純群であることがわかる．従って，$\mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ の有限商群をとるとき，無限群 $\mathrm{Alt}(\mathbb{Z})$ の部分は全て自明群に潰さなければならない．これは $\mathrm{Sym}_{<\aleph_0}(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ が RF 群でないことを示している．

(3)「LEF であるが RF でない群」は（制限）リース積を用いて系統的に作ることができる．補題 2.11 より，LEF 群 G, H に対し $G \wr H$ も LEF 群である[*36]．一方，Gruenberg [Gru57]

[*34] 例えば，Richard Thompson の群 F, T, V などがそのような例である．
[*35] つまり，$\mathbb{Z} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{Z}$ なる置換．
[*36] これは G, H が有限生成でなくても成り立つ．

が示したように，H が無限群のとき，$G \wr H$ が RF 群であることは「G および H が RF 群，**かつ，G はアーベル群であること**」と同値である．以上より，例えば $\mathrm{Alt}(6) \wr \mathbb{Z}$ は LEF であるが RF でない群の一例である．

補足 2.3(2) での議論と併せることにより，与えられた有限生成群が RF であるか，ということはケイリーグラフを見るだけでは判断ができないことがわかる．実際，そこで見たように，マークをうまくとると，対応する $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$ のケイリーグラフと対応する $\mathrm{Alt}(6) \wr \mathbb{Z}$ のケイリーグラフを同型にできる．前者の群は RF 群であるが，後者の群は RF 群ではない[*37]．

上記の Gruenberg の結果より次のことが特にわかる：「$(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をそれぞれ RF マークつき群 $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ のマークつき商群からなる LEF 近似とする．このとき，（補題 2.11）より，$(\mathbf{G}_n \wr \mathbf{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbf{G} \wr \mathbf{H}$ の LEF 近似となる．しかし，G がアーベル群でないとき，この LEF 近似はマークつき商群から来るもので**ない**．」このことは一見不思議に見えるのではないだろうか？「G がアーベル群でないことが上の主張においてどのように問題を引き起こしているか」を考えることは，興味のある読者にとって大変良い演習問題となるはずである．この演習問題を解くと，例 2.10 もケイリー位相での収束が ‘局所的’ であることをよく表わしていることの理解は深まると思われる．

4 Lubotzky–Weiss の予想と主結果

本稿の著者は $\mathcal{G}(k)$，より詳細にはマークつき群の LEF 近似を用いて，以下の結果を得た．本結果は，「コンパクト（距離化可能）群 K の有限生成稠密部分群が**従順**（amenable）**群**にも **Kazhdan の性質** (T)（Kazhdan's property (T)）をもつ群にもなり得るのは，K は有限群のときに限るのではないか？」という Lubotzky–Weiss の予想 [LW93] の予想と関係している．群の従順性および性質 (T) に関しては [BdlHV08] を参照せよ[*38]．この予想自体は 2010 年に Ershov と Jaikin-Zapirain [EJZ10] によって反例が構成されているが，今回の結果ではさらに強烈な反例を作れることを明らかにした．

定理 A ([Mim19], [Mim18])**.** H を可算濃度をもつ RF 群とする[*39]．（この 2 条件を満たす限り，好きな H をとってきてよい．）このとき，次の (i), (ii) がともに成立する．

(i) ［コンパクト群の有限生成稠密部分群の多様性 : [Mim19]］あるコンパクト群 K と $t, w \in K$ が存在し，以下を満たす．

[*37] より非自明であるが，与えられた有限生成群が LEF 群であるか，ということもケイリーグラフを見るだけでは判断がつかないことが知られている．これらの結果は，この種の「ケイリー位相での近似」において，辺の向き付けおよび色付けの重要性を裏付けるものだと思えるのではないだろうか．

[*38] 大まかなイメージとしては，従順群は ‘柔らかい’（flexible）群，性質 (T) をもつ群は ‘剛性の強い’（rigid）群である．可算群に対し，「従順であり，かつ，性質 (T) をもつ群のクラス」と「有限群のクラス」は完全に一致する．

[*39] 有限生成とは限らない群の RF 性は，例えば例 3.3(2) で述べたようにして定義されたのであった．

(1) $\Lambda_1 := \langle t^3, w\rangle$ は K の稠密部分群であり，群の分解

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow \Lambda_1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\wr\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

をもつ．ここで $F \leqslant \Lambda_1$ は「F のどんな有限部分集合 S に対しても，S の Λ_1 内での正規閉包 $\langle\langle S\rangle\rangle_{\Lambda_1}$（有限表示性の定義の項を思い出そう）が有限群である」ような（正規）部分群である．

(2) $\Lambda_2 := \langle t, w\rangle$ は H を部分群として含む．

(ii)［Lubotzky–Weiss の予想の激しい反例 : [Mim18]］ p を奇素数とする．コンパクト群

$$\mathcal{K} = \prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \mathrm{SL}(4n, \mathbb{F}_p)$$

（Tychonoff 位相で副有限群とみなせる）の 2 つの部分群 Σ_1, Σ_2 が存在し，以下を満たす．

(1) Σ_1, Σ_2 はともに，$\mathcal{K}$ の有限生成稠密部分群である．

(2) Σ_1 は群の分解

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow \Sigma_1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\wr\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

をもつ．ここで $F \leqslant \Sigma_1$ は (i)(1) の $F \leqslant \Lambda_1$ と同様の条件を満たす．

(3) Σ_2 は性質 (T) をもち，H を部分群として含む．

補足 4.1. (1) 有限生成群の部分群は可算群である．また，コンパクト（ハウスドルフ）群の有限生成部分群は RF 群であることが知られている*40．RF 性は部分群に遺伝することを思い出そう．以上より，定理 A の H に関する仮定はどちらの (i), (ii) でも必要でもある．

(2) (i)(1), (ii)(2) の F は特に有限群の増大和である．こういう群は従順群でかつ，漸近次元（例えば，[NY12] を見よ）が 0 であることが知られている．以上のことから，(i) の Λ_1, (ii) の Σ_1 はともに従順群で，漸近次元が 1 である．さらに，田中亮吉氏（東北大学理学部）との共同研究によって，これらの群は全ての有限対称生成集合に関して Liouville 性をもつ*41ことも示される．Liouville 性質をもつような群は従順群の中でも非常に小さいクラスであることが知られている*42．

(3) (i) の Λ_2 も (1) より K の稠密な部分群である．[Mim19, Theorem A] の構成では，この Λ_2 は（残念ながら）性質 (T) を決してもたない．

(4) (i) の K は（現状の構成法では）H の取り方に依る．他方，(ii) の $\mathcal{K}$ は定理 A での記述のように，H の取り方に依らずに構成できる．

上の「可算 RF 群 H」として，例えば以下のようなものをそれぞれとることができる．

(1) 群の有限表示は可算個しかない．そのため $\mathbb{N}$ で順序付けして，$(H_m)_{m\in\mathbb{N}}$ をその中で RF 群となるものの列挙として取ることができる．このとき，その直和 $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} H_m$ は条件を満た

*40 有限生成線型群に関する Mal'cev の定理と，コンパクト群に関する有名な Peter–Weyl の定理から従う．

*41 とってきた生成集合に対し調和であるような，群上の有界関数は定数関数に限られる．

*42 例えば，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\wr\mathbb{Z}^3$ は従順群であるが Liouville 性質をもたない．

す．連結閉 3 次元位相多様体の基本群は有限表示な RF 群であることが知られており[*43]，この枠組みにのる．

(2) 可算群に対し，Yu（郁国梁）の**性質 A**（property A）と呼ばれる，'漸近次元の有限性の無限次元化' ともみなせる性質が定義された．（詳細は [NY12] を参照せよ．）Osajda [Osa18] は有限生成 RF 群 H で，性質 A をもたないものを構成した．性質 A は部分群に遺伝することが知られている．従って，この Osajda による群を H とおいて定理 A を適用したときに得られる群 Λ_2, Σ_2 は，ともに性質 A をもたない．性質 A を群の性質と思ったとき，これは群の従順性を極限まで弱めたものと捉えることができる[*44]．この意味で，Λ_1 と Λ_2 は，同じコンパクト群の有限生成稠密部分群でありながら対照的である．（Σ_1 と Σ_2 は，Σ_2 がさらに性質 (T) をもつためますます対照的である．）

定理 A の証明は本稿では紹介できないが，キーとなるのは LEF（マークつき）群の LEF 近似である．LEF 近似 $(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき，**対角積**（diagonal product）という操作によって RF 群をコンパクト群 $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ の（位相を忘れた）部分群として構成することができる．定理 A の証明の粗筋は，うまい有限群の列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，そのマークの列をうまく 2 系統取ることで，それぞれの系統の列で Λ_1 と Λ_2（ないしは Σ_1 と Σ_2）を対角積として実現する，というものである．詳細に興味がある読者は [Mim19] および [Mim18] を参照されたい．Wilson の定理 [Wil80] により，可算 RF 群が 2 元生成 RF 群に埋め込めることが知られており，これを用いて有限生成群の LEF 近似の話にすべてを押し込めることができる．

また，酒匂宏樹氏（新潟大学自然科学系）との共同研究で，$\mathcal{G}(k)$ 上のマークつき有限群の列の集積点と粗い幾何（coarse geometry）との関係を得た；[MS19a], [MS19b] を参照されたい．

参考文献

[BdlHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR 2415834

[Cor11] Yves Cornulier, *On the Cantor-Bendixson rank of metabelian groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 2, 593–618. MR 2895067

[dCGP07] Yves de Cornulier, Luc Guyot, and Wolfgang Pitsch, *On the isolated points in the space of groups*, J. Algebra **307** (2007), no. 1, 254–277. MR 2278053

[dlH00] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000. MR 1786869

[EJZ10] Mikhail Ershov and Andrei Jaikin-Zapirain, *Property (T) for noncommutative*

[*43] RF であることは特に非自明である．Perelman による有名な幾何化予想の解決によって RF 性が従う．

[*44] 例えば，群の性質 A と同値な条件として，ある空でないコンパクトハウスドルフ空間上の Anantharaman-Delaroche の意味での従順な群作用（同相写像による）を許容するというものがある．他方，群の従順性は，全ての空でないコンパクトハウスドルフ空間上のあらゆる群作用が上の意味で従順であることと同値である．

universal lattices, Invent. Math. **179** (2010), no. 2, 303–347. MR 2570119

[Gri84] R. I. Grigorchuk, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), no. 5, 939–985. MR 764305

[Gro81] Mikhael Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1981), no. 53, 53–73. MR 623534

[Gru57] K. W. Gruenberg, *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1957), 29–62. MR 0087652

[HNN49] Graham Higman, B. H. Neumann, and Hanna Neumann, *Embedding theorems for groups*, J. London Math. Soc. **24** (1949), 247–254. MR 32641

[LW93] A. Lubotzky and B. Weiss, *Groups and expanders*, Expanding graphs (Princeton, NJ, 1992), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 95–109. MR 1235570

[Mal73] A. I. Mal'cev, *Algebraic systems*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, Posthumous edition, edited by D. Smirnov and M. Taĭclin, Translated from the Russian by B. D. Seckler and A. P. Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 192. MR 0349384

[Mim18] Masato Mimura, *An extreme counterexample to the Lubotzky–Weiss conjecture*, preprint, arXiv:1809.08918v4 (2018).

[Mim19] ———, *Amenability versus non-exactness of dense subgroups of a compact group*, J. London Math. Soc. (2) **100** (2019), no. 2, 592–622.

[MS19a] Masato Mimura and Hiroki Sako, *Group approximation in Cayley topology and coarse geometry, part I: Coarse embeddings of amenable groups*, J. Topol. Anal., online published, doi:10.1142/S1793525320500089 (2019).

[MS19b] ———, *Group Approximation in Cayley Topology and Coarse Geometry, Part II: Fibred Coarse Embeddings*, Anal. Geom. Metr. Spaces **7** (2019), no. 1, 62–108. MR 4015193

[NY12] Piotr W. Nowak and Guoliang Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012. MR 2986138

[Osa18] Damian Osajda, *Residually finite non-exact groups*, Geom. Funct. Anal. **28** (2018), no. 2, 509–517. MR 3788209

[Stë84] A. M. Stëpin, *A remark on the approximability of groups*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1984), no. 4, 85–87. MR 759888

[VG97] A. M. Vershik and E. I. Gordon, *Groups that are locally embeddable in the class of finite groups*, Algebra i Analiz **9** (1997), no. 1, 71–97. MR 1458419

[Wil80] John S. Wilson, *Embedding theorems for residually finite groups*, Math. Z. **174** (1980), no. 2, 149–157. MR 592912