粗コンパクト化と Gromov 積の一般化 (Coarse compactificatinos and a generalization of Gromov products)

首都大学東京大学院理学研究科 深谷 友宏
Tomohiro Fukaya
Graduate School of Science, Tokyo Metropolitan University

愛媛大学大学院理工学研究科 尾國 新一
Shin-ichi Oguni
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

愛媛大学大学院理工学研究科 山内 貴光
Takamitsu Yamauchi
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

固有な距離空間に対して, その Higson コンパクト化より小さい距離化可能なコンパクト化を粗コンパクト化という. 例えば, 固有かつ測地的な Gromov 双曲空間の Gromov コンパクト化は粗コンパクト化である. この Gromov コンパクト化は Gromov 積を用いて定義できる. 本稿では, 論文 [3] に基づき, 与えられた固有距離空間の粗コンパクト化たちと "1 対 1 対応" するにように Gromov 積を一般化できることを紹介する.

1 粗コンパクト化と Gromov コンパクト化

距離空間が**固有**であるとは, 任意の有界閉集合がコンパクトであるときをいう. 固有な距離空間に対して定まる粗不変なコンパクト Hausdorff 空間として, Higson コロナと呼ばれる Higson コンパクト化の境界 (剰余) がよく知られている ([8],[9]).

定義 1.1. (X, d) を固有な距離空間とする. X 上の有界連続関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が **Higson 関数** (**Higson function, slowly oscillating function**) であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $R > 0$ に対して, X の有界集合 B が存在して「$x, x' \in X \setminus B$ かつ $d(x, x') < R$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$」が成り立つときをいう. (X, d) 上の Higson 関数全体のなす C^* 環を $C_h(X)$ で表す. Gelfand-Naimark の定理によって, X のコンパクト化 hX であって, hX 上の複素数値連続関数全体のなす C^* 環 $C(hX)$ が $C_h(X)$ と同型である

ものが存在する．このコンパクト化 hX を (X,d) の **Higson コンパクト化** (**Higson compactification**) といい, hX の境界 $hX \setminus X$ を (X,d) の **Higson コロナ** (**Higson corona**) という．

2 つの距離空間 (X,d) と (Y,ρ) が**粗同値** (**coarsely equivalent**) であるとは, 次の 2 条件を満たす (連続とは限らない) 写像 $f: X \to Y$ が存在するときをいう．

(1) 単調非減少な 2 つの関数 $\rho_-, \rho_+ : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, $\lim_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$ かつ, 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\rho_-(d(x,x')) \leq \rho(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d(x,x')).$$

(2) $Y = \bigcup_{x\in X} \overline{B}_\rho(f(x), S)$ を満たす $S > 0$ が存在する．ここで, $\overline{B}_\rho(f(x), S) = \{y \in Y : \rho(f(x), y) \leq S\}$ である．

2 つの固有な距離空間 (X,d) と (Y,ρ) が粗同値であれば, それらの Higson コロナ $hX \setminus X$ と $hY \setminus Y$ は同相である ([8, Corollary 5.12], [9, Corollary 2.42])．この意味で, Higson コロナは粗不変なコンパクト Hausdorff 空間である．一方, 非有界かつ固有な距離空間の Higson コンパクト化は可算離散空間 $\mathbb{N}$ の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\mathbb{N}$ を部分空間として含むため ([7, Theorem 3]), 一般に距離化可能でない．そのため, 粗コンパクト化とよばれる Higson コンパクト化より小さい距離化可能なコンパクト化を考えることがある．

定義 1.2. 固有な距離空間 X に対して, その Higson コンパクト化より小さい距離化可能なコンパクト化, すなわち, 連続写像 $f: hX \to \overline{X}$ が存在して, f の X への制限写像 $f{\restriction}_X$ が X の恒等写像 id_X と一致する距離化可能な X のコンパクト化 $\overline{X}$ を**粗コンパクト化** (**coarse compactification**) という．粗コンパクト化 $\overline{X}$ の境界 $\overline{X} \setminus X$ を**コロナ** (**corona**) という．

粗コンパクト化の代表例として, 固有かつ測地的な Gromov 双曲空間の Gromov コンパクト化 ([5, 1.8]) が挙げられる．Higson-Roe [6] は, 粗幾何学の中心的な予想である粗 Baum-Connes 予想が固有かつ測地的な Gromov 双曲空間に対して正しいことを, Gromov コンパクト化の境界を用いて証明した．このコロナを用いた粗 Baum-Connes 予想へのアプローチは, 測地的な Gromov 双曲空間や Busemann 空間 (従って CAT(0) 空間), および systolic 複体を含む粗凸空間 (例 2.7 参照) へ拡張されている [2].

Gromov コンパクト化は次で定められる．以下, 非負実数全体のなす集合を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で表す．

例 **1.3.** (X,d) を距離空間とし, $x_0 \in X$ とする.

$$(x \mid y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x_0,x) + d(x_0,y) - d(x,y)), \quad x,y \in X$$

で定まる 2 変数関数 $(\cdot \mid \cdot)_{x_0} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を, x_0 における **Gromov 積** (**Gromov product**) という. 距離空間 (X,d) が **Gromov 双曲空間** (**Gromov hyperbolic space**) であるとは, ある $\delta \geq 0$ が存在して, 任意の $x,y,z \in X$ に対して

$$\min\{(x \mid y)_{x_0}, (y \mid z)_{x_0}\} \leq (x \mid z)_{x_0} + \delta. \tag{1.1}$$

が成り立つときをいう. 距離空間 (X,d) が**測地的** (**geodesic**) であるとは, 任意の $x,y \in X$ に対して等長写像 $\gamma : [0,d(x,y)] \to X$ が存在して, $\gamma(0) = x$ かつ $\gamma(d(x,y)) = y$ を満たすときをいう.

(X,d) を固有かつ測地的な Gromov 双曲空間であるとし, $(\cdot \mid \cdot)_{x_0}$ を $x_0 \in X$ における Gromov 積とする.

$$S_\infty(X) = \{(x_i) \in X^{\mathbb{N}} : (x_i \mid x_j)_{x_0} \to \infty \text{ as } i,j \to \infty\} \tag{1.2}$$

とし, $S_\infty(X)$ における関係 $\sim$ を, $(x_i),(y_i) \in S_\infty(X)$ に対して

$$(x_i) \sim (y_i) \iff (x_i \mid y_i)_{x_0} \to \infty \text{ as } i \to \infty \tag{1.3}$$

で定める. 距離空間 (X,d) が Gromov 双曲空間であることから, $\sim$ は同値関係である. X の無限遠境界 ∂X を $\partial X = S_\infty(X)/\sim$ で定め, $\overline{X} = X \cup \partial X$ とおく. $\overline{X}$ の位相を以下で定める. まず, Gromov 積 $(\cdot \mid \cdot)_{x_0}$ を

$$(x \mid y)_{x_0} = \begin{cases} (x \mid y)_{x_0} & \text{if } x,y \in X, \\ \inf\{\liminf_{i\to\infty}(x_i \mid y_i)_{x_0} : (x_i) \in x, (y_i) \in y\} & \text{if } x,y \in \partial X, \\ \inf\{\liminf_{i\to\infty}(x_i \mid y)_{x_0} : (x_i) \in x\} & \text{if } x \in \partial X, y \in X. \end{cases} \tag{1.4}$$

によって (∞ に値をとりうる) 2 変数関数 $(\cdot \mid \cdot)_{x_0} : \overline{X} \times \overline{X} \to [0,\infty]$ に拡張する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$V_n = \{(x,y) \in \overline{X} \times \overline{X} : (x \mid y)_{x_0} > n\} \cup \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < 1/n\} \tag{1.5}$$

とおく. このとき集合族 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ は集合 $\overline{X}$ における一様構造の基底である. $\overline{X}$ はこの一様構造によって位相が与えられるとする. このとき $\overline{X}$ は距離化可能であり, X は $\overline{X}$ の稠密な開部分空間である. さらに, X が固有かつ測地的であることから, $\overline{X}$ のコンパクト性が従う. この X のコンパクト化 $\overline{X}$ を **Gromov コンパクト化** (**Gromov compactification**) という. Gromov コンパクト化は粗コンパクト化である ([9, §6.4], [4, Chapter 7] 参照).

注意 1.4. Gromov 双曲空間が固有かつ測地的であるという仮定は, Gromov コンパクト化がコンパクトであるために必要である．実際, $\overline{X} = X$ を満たす (固有でない) 測地的かつ非有界な Gromov 双曲空間 X が [5, p.100, Counterexample] で与えられている．また, $Y = \{0\} \cup \mathbb{N}$ とおき, Y 上の距離 d_Y を $m, n \in Y$ に対して

$$d_Y(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{if } m = n \\ m+n & \text{if } m \neq n \end{cases}$$

で定めると, d_Y は Y の離散位相を生成する距離であり, 0 における Gromov 積 $(\cdot \mid \cdot)_0$ は

$$(m \mid n)_0 = \begin{cases} m & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases}$$

であるため, $\overline{Y} = Y$ である．

2 Gromov 積の一般化

(X, d) を Gromov 双曲空間とし, $(\cdot \mid \cdot)_{x_0}$ を点 $x_0 \in X$ における Gromov 積とする．このとき, 不等式 (1.1) が任意の $x, y, z \in X$ に対して成り立つような $\delta \geq 0$ が存在すると共に, $(\cdot \mid \cdot)_{x_0}$ は任意の $x, y \in X$ に対して次を満たす．

$$(x \mid y)_{x_0} \leq d(x_0, x), \qquad d(x_0, x) \leq 2(x \mid y)_{x_0} + d(x, y).$$

これらの条件の非線形版を満たす対称な 2 変数関数として, 次の概念を考える．

定義 2.1. (X, d) を距離空間とし $x_0 \in X$ とする．このとき, 対称な 2 変数関数 $(\cdot \mid \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}; (x, y) \mapsto (x \mid y)$ が次の 3 条件を満たすとき, $(\cdot \mid \cdot)$ を X 上の**前制御積** (**pre-controlled product**) とよぶ．

(CP1) 単調非減少な関数 $\rho_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$\min\{(x \mid y), (y \mid z)\} \leq \rho_1((x \mid z)).$$

(CP2) 単調非減少な関数 $\rho_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$(x \mid y) \leq \rho_2(d(x_0, x)).$$

(CP3) 単調非減少な関数 $\rho_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(x_0, x) \leq \rho_3((x \mid y), d(x, y)).$$

ここで, 2 変数関数 $\rho_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が単調非減少であるとは, $s_1 \leq s_2$ かつ $t_1 \leq t_2$ であるときに $\rho_3(s_1, t_1) \leq \rho_3(s_2, t_2)$ であることを意味する.

例 2.2. Gromov 双曲空間における Gromov 積は前制御積である.

例 1.3 と全く同様な方法で, 前制御積をもつ距離空間の無限遠境界を定義できる. 実際, (X, d) を前制御積 $(\cdot \mid \cdot)$ をもつ距離空間とする. (1.2) 式と同様に $S_\infty(X)$ を定め, $S_\infty(X)$ における関係 $\sim$ を条件 (1.3) と同様に定める. このとき, $(\cdot \mid \cdot)$ が (CP1) を満たすことから, $\sim$ は同値関係である. X の無限遠境界 ∂X を $\partial X = S_\infty(X)/\sim$ で定め, $\overline{X} = X \cup \partial X$ とおく. (1.4) 式と同様に $(\cdot \mid \cdot)$ を $\overline{X} \times \overline{X}$ 上の関数へ拡張し, (1.5) 式と同様に V_n を定める. このとき, $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ は $\overline{X}$ における距離化可能な一様構造の基底である ([3, lemma 2.6]). 以降, 集合 $\overline{X}$ は, この基底によって定まる一様構造による位相をもつとする. このとき, X は $\overline{X}$ の稠密な開部分空間である ([3, Lemma 2.8]).

注意 1.4 により, 空間 $\overline{X}$ はコンパクトであるとは限らない. $\overline{X}$ がコンパクトであるための必要十分条件について, 次が成り立つ.

定理 2.3 ([3, Theorem 1.8])**.** (X, d) を距離空間とし $(\cdot \mid \cdot)$ を X 上の前制御積とする. $(\cdot \mid \cdot)$ によって上の方法で定まる空間 $\overline{X}\,(= X \cup \partial X)$ がコンパクトであるためには, 距離空間 (X, d) が固有であり, かつ $(\cdot \mid \cdot)$ が次を満たすことが必要かつ十分である.

(CP4) 単調非減少な関数 $\rho_4 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し, 任意の $R \geq 0$ と $x \in X \setminus \overline{B}_d(x_0, \rho_4(R))$ に対して $y \in \overline{B}_d(x_0, \rho_4(R))$ があって $(x \mid y) \geq R$ を満たす.

ここで, $\overline{B}_d(x_0, \rho_4(R)) = \{y \in X : d(x_0, y) \leq \rho_4(R)\}$ である.

定義 2.4. 条件 (CP4) を満たす前制御積を**制御積** (**controlled product**) とよぶ. また, 距離空間 (X, d) が固有で $(\cdot \mid \cdot)$ が制御積であるとき, $(\cdot \mid \cdot)$ によって上の方法で定まる X のコンパクト化 $\overline{X}\,(= X \cup \partial X)$ を, 制御積 $(\cdot \mid \cdot)$ に関する (X, d) の **Gromov コンパクト化**という.

例 2.5. 測地的な距離空間における Gromov 積は (CP4) を満たす ([3, Example 2.12]). 従って, 固有かつ測地的な Gromov 双曲空間における Gromov 積は制御積である.

例 2.6. (X, d) を非有界かつ固有な距離空間とし, $x_0 \in X$ とする. 関数 $(\cdot \mid \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を, 各 $x, y \in X$ に対して

$$(x \mid y) = \min\{d(x_0, x), d(x_0, y)\}$$

で定める．このとき, $(\cdot\mid\cdot)$ は制御積であり, 対応する Gromov コンパクト化は一点コンパクト化である ([3, Examples 1.6 and 2.13]).

例 2.7. 深谷-尾國 [2] は, 測地的な Gromov 双曲空間や Busemann 空間 (従って CAT(0) 空間), および systolic 複体を含む距離空間のクラスとして次の粗凸空間を導入し, 固有な粗凸空間に対して粗 Baum-Connes 予想が正しいことを証明した.

定義 2.8. (X,d) を距離空間とし, 定数 $\lambda\geq 1$, $k\geq 0$, $E\geq 1$, $C\geq 0$ と単調非減少な関数 $\theta\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ および (λ,k)-擬測地線分の族 $\mathcal{L}$ を固定する．ここで, 写像 $\gamma:[0,t_\gamma]\to X$ が **(λ,k)-擬測地線分** (**(λ,k)-quasi-geodesic segment**) であるとは, 任意の $s,t\in[0,t_\gamma]$ に対して

$$\frac{1}{\lambda}|t-s|-k\leq d(\gamma(t),\gamma(s))\leq\lambda|t-s|+k$$

が成り立つときをいう．次の 3 条件が成り立つとき, (X,d) を **$(\lambda,k,E,C,\theta,\mathcal{L})$-粗凸空間**, または単に**粗凸空間** (**coarsely convex space**) という.

(i)^q 任意の $x,y\in X$ に対して, $\gamma(0)=x$ かつ $\gamma(t_\gamma)=y$ を満たす $\gamma\in\mathcal{L}$ が存在する.

(ii)^q 任意の $\gamma,\eta\in\mathcal{L}$, $t\in[0,t_\gamma]$, $s\in[0,t_\eta]$, $c\in[0,1]$ に対して

$$d(\gamma(ct),\eta(cs))\leq cEd(\gamma(t),\eta(s))+(1-c)Ed(\gamma(0),\eta(0))+C.$$

(iii)^q 任意の $\gamma,\eta\in\mathcal{L}$, $t\in[0,t_\gamma]$, $s\in[0,t_\eta]$ に対して

$$|t-s|\leq\theta(d(\gamma(0),\eta(0))+d(\gamma(t),\eta(s))).$$

(X,d) を $(\lambda,k,E,C,\theta,\mathcal{L})$-粗凸空間とする．点 $x_0\in X$ を固定し,

$$\mathcal{L}_{x_0}=\{\gamma\in\mathcal{L}:\gamma(0)=x_0\}$$

とする． $D\geq\max\{C+1,\lambda\theta(0)+k\}$ を満たす定数 $D>0$ に対して, 関数 $(\cdot\mid\cdot)^D:\mathcal{L}_{x_0}\times\mathcal{L}_{x_0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ および $(\cdot\mid\cdot)^D:X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を次で定める ([2, Definitions 4.6 and 4.11]).

$$\begin{aligned}(\gamma\mid\eta)^D&=\sup\{t\in[0,\min\{t_\gamma,t_\eta\}]:d(\gamma(t),\eta(t))\leq D\},\ \gamma,\eta\in\mathcal{L}_{x_0},\\(x\mid y)^D&=\sup\{(\gamma\mid\eta)^D:\gamma,\eta\in\mathcal{L}_{x_0},\,x=\gamma(t_\gamma),\,y=\eta(t_\eta)\},\ x,y\in X.\end{aligned}$$

このとき, $(\cdot\mid\cdot)^D$ は制御積である ([3, Proposition 5.4]). さらに, $(\cdot\mid\cdot)^D$ に関する X の Gromov コンパクト化は, 擬測地線による理想境界 $\partial_{x_0}X$ ([2, Definition 4.4]) を付け加

えて定義されるコンパクト化 ([2, Proposition 6.6]) と同値である ([3, Remark 5.6]). ここで, X の 2 つのコンパクト化 c_1X と c_2X が同値であるとは, 同相写像 $f : c_1X \to c_2X$ が存在して $f{\restriction_X} = \mathrm{id}_X$ を満たすときをいう.

3 主結果

距離空間 (X, d) 上の 2 つの制御積 $(\cdot \mid \cdot)$ と $(\cdot \mid \cdot)'$ が粗同値 (**coarsely equivalent**) であるとは, 単調非減少な 2 つの関数 $\rho_-, \rho_+ : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, $\lim_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$ かつ, 任意の $x, y \in X$ に対して $\rho_-((x \mid y)) \leq (x \mid y)' \leq \rho_+((x \mid y))$ が成り立つときをいう. 次が本稿の主結果である.

定理 3.1 ([3, Theorem 1.12])**.** 固有な距離空間 (X, d) 上の制御積 $(\cdot \mid \cdot)$ を $(\cdot \mid \cdot)$ に関する X の Gromov コンパクト化へ対応させる対応付けは, X 上の制御積の粗同値類全体のなす集合から X の粗コンパクト化の同値類全体のなす集合への全単射を誘導する.

定理 3.1 は, 以下の議論によって示される.

命題 3.2 ([3, Proposition 4.5])**.** 固有な距離空間 (X, d) 上の制御積 $(\cdot \mid \cdot)$ に関する Gromov コンパクト化 $\overline{X}$ は粗コンパクト化である.

証明の概略. 有界連続関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が **Gromov 関数** (**Gromov function**) であることを, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $Q > 0$ が存在して「$x, y \in X$ かつ $(x \mid y) > Q$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ である」こととして定め, X 上の Gromov 関数全体のなす C^* 環を $C_g(X)$ で表す. このとき X における Gromov 関数は Higson 関数なので ([3, Proposition 4.2]), $C_g(X) \subset C_h(X)$ である. また, 関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が $f \in C_g(X)$ を満たすことと, f が Gromov コンパクト化 $\overline{X}$ 上の連続関数へ拡張できることは同値である ([3, Proposition 4.3]). よって $\overline{X}$ 上の複素数値連続関数全体のなす C^* 環を $C(\overline{X})$ とすると, $C(\overline{X}) \cong C_g(X) \subset C_h(X) \cong C(hX)$ ゆえ, 連続写像 $g : hX \to \overline{X}$ で $g{\restriction_X} = \mathrm{id}_X$ を満たすものが存在する (例えば, [1, Theorem 2.10]). □

命題 3.3 ([3, Remark 3.2, Proposition 3.4])**.** (X, d) を固有な距離空間とする. $(\cdot \mid \cdot)$ と $(\cdot \mid \cdot)'$ を X 上の制御積とし, $\overline{X}$ と $\overline{X}'$ をそれぞれ $(\cdot \mid \cdot)$ と $(\cdot \mid \cdot)'$ に関する X の Gromov コンパクト化とする. このとき, 次は同値である.

(a) 単調非減少な関数 $\rho_- : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, $\lim_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$ かつ, 任意の

$x, y \in X$ に対して $\rho_-((x \mid y)) \leq (x \mid y)'$ である.

(b) 単調非減少な関数 $\rho_+ : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して $(x \mid y) \leq \rho_+((x \mid y)')$ である.

(c) 連続写像 $f : \overline{X} \to \overline{X}'$ が存在して $f{\restriction_X} = \mathrm{id}_X$ を満たす.

証明の概略. (a) $\Rightarrow$ (b). (a) を満たす ρ_- に対して, $\lim_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$ ゆえ関数 $\rho_+ : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\rho_+(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \rho_-(s) \leq t\}$ で定義できる. このとき, ρ_+ は (b) を満たす単調非減少な関数である.

(a) $\Rightarrow$ (c). (b) が正しいとする. ∂X を $(\cdot \mid \cdot)$ に関する X の無限遠境界とし, $S'_\infty(X)$ および $\sim'$ を, それぞれ $(\cdot \mid \cdot)'$ に関する Gromov コンパクト化の定義で登場する点列の集合と $S'_\infty(X)$ における同値関係とする. このとき, 任意の $x \in \partial X$ と $(x_i), (y_i) \in x$ に対して, (b) より $(x_i), (y_i) \in S'_\infty(X)$ かつ $(x_i) \sim' (y_i)$ である. よって写像 $f : \overline{X} \to \overline{X}'$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in X, \\ [(x_i)]_{\sim'} & \text{if } (x_i) \in x \in \partial X. \end{cases}$$

で定義でき, さらに f が連続であることも示せる.

(b) $\Rightarrow$ (a). 写像 $f : \overline{X} \to \overline{X}'$ を, $f{\restriction_X} = \mathrm{id}_X$ を満たす連続写像とする. このとき, f が一様連続であることを用いて「任意の $R \geq 0$ 対して $S_R > R$ が存在して, $x, y \in X$ かつ $(x \mid y) > S_R$ ならば $(x \mid y)' > R$ である」ことを示せる. 関数 $\rho_- : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\rho_-(t) = \sup\{R \in \mathbb{R}_{\geq 0} : S_R < t\}$ で定めれば, ρ_- は (a) を満たす. □

命題 3.3 より次を得る.

系 3.4 ([3, Corollary 3.5])**.** (X, d) を固有な距離空間とする. $(\cdot \mid \cdot)$ と $(\cdot \mid \cdot)'$ を X 上の制御積とし, $\overline{X}$ と $\overline{X}'$ を, それぞれ $(\cdot \mid \cdot)$ と $(\cdot \mid \cdot)'$ に関する X の Gromov コンパクト化とする. このとき $(\cdot \mid \cdot)$ と $(\cdot \mid \cdot)'$ が粗同値であるための必要十分条件は, $\overline{X}$ と $\overline{X}'$ が同値なコンパクト化であることである.

従って, 固有な距離空間 (X, d) 上の制御積 $(\cdot \mid \cdot)$ を $(\cdot \mid \cdot)$ に関する X の Gromov コンパクト化へ対応させる対応付けは, X 上の制御積の粗同値類全体のなす集合から X の粗コンパクト化の同値類全体のなす集合への単射を誘導する. この単射が全射であることは, 次の定理より従う.

定理 3.5 ([3, Theorem 4.6])**.** 固有な距離空間 (X, d) の任意の粗コンパクト化 cX に対して, X 上の制御積 $(\cdot \mid \cdot)^c$ が存在して, cX と $(\cdot \mid \cdot)^c$ に関する Gromov コンパクト化 $\overline{X}^c$ は同値なコンパクト化である.

証明の概略. cX を固有な距離空間 (X,d) の粗コンパクト化とし, cX の位相を生成する距離 d_c と点 $x_0 \in X$ を固定する. 各 $x,y \in X$ に対して

$$n(x,y) = \max\left\{n \in \{0\} \cup \mathbb{N} : d_c(x,y) \leq 2^{-n}\operatorname{diam}(cX)\right\},$$
$$(x \mid y)^c = \min\{d(x_0,x), d(x_0,y), n(x,y)\}$$

と定める. ここで $\operatorname{diam}(cX) = \sup\{d_c(z,w) : z,w \in cX\}$ である. このとき $(\cdot \mid \cdot)^c$ は X 上の制御積であることが示せる. $\partial^c X$ および $\overline{X}^c$ を, それぞれ $(\cdot \mid \cdot)^c$ に関する無限遠境界と Gromov コンパクト化とする.

任意の $x \in \partial^c X$ と $(x_i) \in x$ に対して「$n \in \mathbb{N}$ かつ $(x_i \mid x_j)^c \geq n$ ならば $d_c(x_i,x_j) \leq 2^{-n}\operatorname{diam}(cX)$」が成り立つので, 点列 (x_i) はコンパクト距離空間 (cX, d_c) のコーシー列であることから, ある点 $y_x \in cX$ に収束する. ここで, 点 y_x は点列 $(x_i) \in x$ によらず x によって決まり, $y_x \notin X$ である. そこで, 写像 $f : \overline{X}^c \to cX$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in X, \\ y_x & \text{if } (x_i) \in x \in \partial^c X. \end{cases}$$

定めれば, f は同相写像であることが確かめられ, $f{\restriction}_X = \mathrm{id}_X$ である. ゆえに, $\overline{X}^c$ と cX は同値なコンパクト化である. □

参考文献

[1] R. E. Chandler, *Hausdorff compactifications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 23. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1976.

[2] T. Fukaya, S. Oguni, *A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture*, J. Topol. Anal., to appear, available at arXiv:1705.05588v3.

[3] T. Fukaya, S. Oguni, T. Yamauchi, *Coarse compactifications and controlled products*, preprint, available at arXiv:1810.08720v1.

[4] É. Ghys, P. de la Harpe, *Espaces métriques hyperboliques*, Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988), 27–45, Progr. Math., 83, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[5] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York, 1987.

[6] N. Higson, J. Roe, *On the coarse Baum-Connes conjecture*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc.

Lecture Note Ser., vol. 227, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 227–254.

[7] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proc. **19** (1994), 129–148.

[8] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 104 (1993), no. 497.

[9] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.