逓減非線形レイリー方程式について*

早稲田大学・理工学研究所　戸次直明
Naoaki Bekki
Waseda Research Institute for Science and Engineering,
Waseda University

1　はじめに

前世紀後半，古典力学の範疇ではあるけれども，ソリトン [1] とカオス [2, 3] の発見を契機として，非線形理論の研究が飛躍的に発展した．それまでの無数の非線形理論の死屍累々を乗り越えた成果だと言えるので，パスツールの名言「科学は思想の墓場である」は，この発展のことを見事に言い当てている．

高解像度かつ高分解能の超音波医療診断装置を用いることにより，ヒトの心臓壁上の興奮収縮による自励振動の伝播が観測可能になった．収縮末期の大動脈弁閉鎖時に，大動脈弁の閉鎖に伴って心室中隔壁（IVS）上に自励振動が発生し，IVS 上に沿って伝播する興奮波の位相特異点が観察された [4]．そして，その興奮波の非線形変調による位相特異点の力学特性が詳しく調べられた．この興奮波の位相特異点の 1 次元の力学特性は，1 次元複素ギンツブルグ–ランダウ方程式（CGLE）における Bekki–Nozaki (BN) ホール 解 [5] で記述できることなどが示された [6]．このことは，生体の筋原繊維レベルにおける複雑な非線形波動伝播が CGLE などの物理的モデルで説明できる可能性を秘めている，ことを示唆している．

一方，筋収縮系が収縮ー弛緩の中間活性化条件の広い範囲にわたって自発的に振動収縮し，筋原繊維に沿って伝播する現象 (SPOC) が観察されている．即ち，筋原繊維の中の各サルコメアは振動をして，各サルコメア長がゆっくりとした収縮相と素早い伸張相からなるノコギリ波状に自励振動する (SPOC) ことが観察されている [7]．アクチンとミオシンのクロスブリッジの解離は収縮状態から急激に起こるので，サルコメアの時系列はノコギリ波状の波形になると考えられている．このような SPOC 波の仕組みを理解するための離散的な力学系数理モデルが導入された [8]. また，位相方程式に縮約した場合も考察して，筋原繊維上に現れるいろいろな振動パターンは，局所的に位相を揃えようとする相互作用と大域的には位相を乱そうとする相互作用の拮抗の結果であることが示された [9]. 生物の心臓の動態をサルコメアレベルで数理的に解析するような研究はまだそれほど多くはなく，今後，エントロピー弾性体 [10] と見立てた心筋収縮系に付随する非線形レイリー波や SPOC 波などの特性が，正常な心臓の動態を表現できることを確立していく研究が必要である．

ここで，我々は，非線形レイリー波に対して多重スケール変換を用いて [11, 12, 13]，逓減非線形レイリー方程式 (Reductive nonlinear Rayleigh equation: RNRE) の導出過程を示して，プラズマ波動における三波相互作用 [14] を適用することで，非線形レイリー波の伝播がヤコビの楕円関数で表されることを説明し，伝播方向の変位の速さが衝撃波的に伝播し，鉛直方向の変位の速さがパルス的に伝播していることを明らかにする [15, 16]．我々の研究によって，非線形レイリー波と SPOC 波とがその物理的メカニズムにおいて密接に関係していることの理解が深まるかもしれない．ただし，多重尺度変換と初期値や境界値の設定が適切であるかどうかという数学的には基本的な問題は，この報告書の範囲を超えているのでここでは論じない．

2　基礎方程式

弾性体の内部の 1 点 A における物理的性質として，点 A を含む微小な体積についての平均値をとることが可能なとき，その値は点 A の連続関数と仮定できる場合がある．このように，ここでは，ミクロな分子構造などを平均して塗りつぶして得られる連続的な物理的性質をもつ仮想的な物質を「連続体」と定義する [17]．連続体の運動

*この報告の詳しい内容は，文献 [15, 16] を参照してください．

を記述するには，連続体の「各部分」が各瞬間において，どのような変位や速度をもつか，また，変位や速度以外の物理量に対しどのような値をとるかがわかればよい．そのような「各部分」を指定するためには「座標」を用いなければならない．それには，次の２通りの表示の方法がある．

連続体を無数の粒子の集団と仮定して，各粒子の運動を調べるという表示を，ラグランジュ表示（Lagrange representation）という．例えば，時刻 $t=0$ に，座標 (X_1, X_2, X_3) の点にあった連続体の粒子が，任意の時刻 t に座標 (x, y, z) の点に来ているとすれば，x, y, z は (X_1, X_2, X_3, t) の関数として，

$$
\begin{aligned}
x &= f_1((X_1, X_2, X_3, t),\\
y &= f_2((X_1, X_2, X_3, t),\\
z &= f_3((X_1, X_2, X_3, t),
\end{aligned}
$$

のように表される [17]．これら f_1, f_2, f_3 の関数形がわかれば，連続体の運動を完全に知ることができる．座標 (X_1, X_2, X_3) は，物質座標（material coordinates）とかラグランジュ座標（Lagrange coordinates）と呼ばれている．

別の表示は，任意の時刻 t において，連続体内の位置座標 (x, y, z) で，連続体の物理量を調べるという表示で，これをオイラー表示（Euler representation）という．即ち，連続体の物理量を (x, y, z, t) の関数として調べる方法である．これら２つの表示の違いは，変数 (x, y, z) が，オイラー表示では独立変数であるのに対して，ラグランジュ表示では従属変数であることである [17, 18]．つまり，ラグランジュ表示が「粒子的」な見方をするのに対して，オイラー表示は「場」の見方をする表示である．

心筋の筋原繊維等をモデル化することを目指しているが，ここでは簡単のために等方的な弾性体表面上での伝播を検討する．以下，形を持った弾性体を伝わる表面波の方程式を導出するためにラグランジュ表示を用い，弾性体表面上で応力がゼロになる境界条件の下で，変位が小さい時，歪エネルギー密度を変分することにより,（線形）レイリー方程式を導出する.

2.1 パイオラ–キルヒホッフの応力テンソル

ラグランジュ表示における弾性体の変形前の座標を $X=(X_1, X_2, X_3)$ として，変形後の座標を $x=(x_1, x_2, x_3)$ とする．今後，$\boldsymbol{u}$ は，変位ベクトル $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$，即ち，$u_i = x_i - X_i\ (i=1,2,3)$ として，

$$
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_l} + \boldsymbol{u_t},
$$

と書くことにする．ただし，任意の変位ベクトル場は，回転を伴わない場と発散を伴わない場との和として表せるので，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u_l} &= 0,\\
\mathrm{div}\, \boldsymbol{u_t} &= 0,
\end{aligned}
$$

が成り立つ．このとき，グリーンの歪みテンソル E_{ij} は，弾性体内の変形前後の任意の要素間の関係式から，

$$
E_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\Big),
$$

が成り立つ [19]． また，上式より，グリーンの歪みテンソル E_{ij} の別の表現

$$
E_{ij} = \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ki}\Big)\Big(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj}\Big) - \delta_{ij}\Big\} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\Big), \tag{1}
$$

を得る．ここで，同じ添字が現れたときはその和を取るというアインシュタイン規約を使った．以後もこの規約を使う．また，グリーンの歪みテンソル E_{ij} の時間によるラグランジュ微分より，オイラーの速度歪みテンソル (Eulerian strain rate tensor) e_{kl} が次のようにして得られる:

$$
2\frac{DE_{ij}}{Dt} = 2\Big(\frac{\partial E_{ij}}{\partial t}\Big)_X = \frac{\partial v_l}{\partial X_i}\frac{\partial x_l}{\partial X_j} + \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial v_k}{\partial X_j} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_l}{\partial X_j}\Big(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\Big) = 2\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_l}{\partial X_j}e_{kl},
$$

$$e_{kl} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\Big).$$

ここで，v_k は要素速度 (particle velocity)，即ち $v_k = Dx_k/Dt$ である．

弾性体内部と表面に作用する内力と外力に関連する応力の解析は，ここでは，簡単のため，オイラー表示から出発する．法線が方向余弦 n_i をもつ面積要素 dS に作用する力を $f_i = \sigma_{ij} n_j dS$ で与えるような 2 階対称テンソル σ_{ij} が存在する [19]. この対称テンソル σ_{ij} はオイラーの応力テンソルとして知られているので，

$$f_i = \sigma_{ij}\varepsilon_{jkl} dx_k dx_l,$$

となる．このとき，f_i を最初の位置における面積要素 $dS = dX_k dX_l$ によって表す公式が存在するかどうかを調べる．

$$f_i = T_{ij}\varepsilon_{jmn} dX_m dX_n,$$

と置いて，以下，T_{ij} が満足すべき必要条件を求める．さて，

$$f_i = \sigma_{ij}\varepsilon_{jkl} dx_k dx_l = \sigma_{ij}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial x_k}{\partial X_m}\frac{\partial x_l}{\partial X_n} dX_m dX_n,$$

となる．また，

$$\varepsilon_{qkl}\frac{\partial x_k}{\partial X_m}\frac{\partial x_l}{\partial X_n}\frac{\partial x_q}{\partial X_p} = \varepsilon_{mnp} J\binom{x}{X},$$

に $\partial X_p/\partial x_j$ を掛けると，

$$\varepsilon_{jkl}\frac{\partial x_k}{\partial X_m}\frac{\partial x_l}{\partial X_n} = \varepsilon_{mnp} J\binom{x}{X}\frac{\partial X_p}{\partial x_j},$$

および

$$f_i = \varepsilon_{mnp} J\binom{x}{X}\frac{\partial X_p}{\partial x_j}\sigma_{ij} dX_m dX_n = \varepsilon_{jmn} J\binom{x}{X}\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\sigma_{ik} dX_m dX_n,$$

を得る．以上より，テンソル T_{ij} が満足すべき必要条件は，

$$T_{ij} = J\binom{x}{X}\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\sigma_{ik},$$

となる．この式を T_{ij} を含む上の式に代入すれば，十分条件が示せる．このテンソルのことを，第 1 パイオラ–キルヒホッフの応力テンソルとよぶ．一般に，$T_{ij} \neq T_{ji}$ である．また，上の式を反転させると，オイラーの応力テンソル σ_{ij};

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial x_j}{\partial X_k} T_{ik},$$

を得る．

第 1 パイオラ–キルヒホッフの応力テンソル T_{ij} を求めるために，歪みエネルギー密度 $W(E_{ij})$ は，定義域内 Ω で，歪みテンソル E_{ij} について偏微分可能な連続関数と仮定する．このとき，

$$\frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\delta_{ij} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}E_{ij} + 3\frac{\partial W}{\partial I_3}E_{ik}E_{kj}, \tag{2}$$

が成り立つ [19]．このテンソルを第 2 パイオラ–キルヒホッフの応力テンソルという．ここで，歪みエネルギー密度 W は，歪みテンソル E_{ij} で，次のように一般化されたテイラー級数に展開される [19]；

$$W = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \alpha I_1^3 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3. \tag{3}$$

ただし，I_1, I_2, I_3 は，それぞれ，歪みテンソルの第 1，第 2 および第 3 不変量である；

$$I_1 = E_{ii},$$
$$I_2 = E_{ij}E_{ij},$$
$$I_3 = E_{ij}E_{jk}E_{ki}.$$

ここでは，歪みエネルギー密度 W は，歪みテンソル E_{ij} の第 4 不変量以上の高次の不変量は無視している．

これらの関係式と次の定義式：

$$T_{ij}=\frac{\partial W}{\partial E_{kj}}\frac{\partial x_i}{\partial X_k}=\frac{\partial W}{\partial E_{kj}}\Big(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\Big), \tag{4}$$

から，等方的な弾性体に対する第 1 パイオラ–キルヒホッフの応力テンソル T_{ij} が求められる．今後，簡単のため，第 1 パイオラ–キルヒホッフの応力テンソルの [第 1] は省略する．この応力テンソル T_{ij} は，線形の場合，歪テンソル E_{ij} とその不変量の高次の項を無視すると，式（2）の応力テンソル σ_{ij} に一致することがわかる．

また，歪みエネルギー密度 W(式 (3)) は，歪みテンソル E_{ij} に関して次数 2 と 3 の斉次方程式であるので，オイラーの斉次関数定理により，パイオラ–キルヒホッフの応力テンソルに対応している応力テンソル H_{ij} を求めることができる [20]. 次数が $d(\geq 2)$ の斉次関数 $W_d(aY_k)=a^dW_d(Y_k)$ $(Y_k=\partial u_i/\partial X_k)$ の場合を説明する．ただし，a は任意の定数である．まず，歪みエネルギー密度 W は，歪みテンソル E_{ij} における $\partial u_i/\partial X_j$ に関して次数 d の斉次方程式であるので，$a=1$ の場合, オイラーの斉次関数定理 [20] より，

$$dW_d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\Big)=\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\frac{\partial W_d}{\partial(\partial u_i/\partial X_k)},$$

が成り立つ．定義域 Ω 内の全歪みエネルギー $\mathcal{W}_d$ は，

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_d&=\int_\Omega W_d d\Omega=\frac{1}{d}\int_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\frac{\partial W_d}{\partial\big(\partial u_i/\partial X_k\big)}d\Omega\\&=\frac{1}{d}\int_\Omega\Big[\frac{\partial}{\partial X_k}\Big(u_i\frac{\partial W_d}{\partial\big(\partial u_i/\partial X_k\big)}\Big)-u_i\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{\partial W_d}{\partial\big(\partial u_i/\partial X_k\big)}\Big]d\Omega\\&=\frac{1}{d}\Big[u_iH_{ik}\Big]_\Omega-\frac{1}{d}\int_\Omega u_i\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{\partial W_d}{\partial\big(\partial u_i/\partial X_k\big)}d\Omega\\&=-\frac{1}{d}\int_\Omega u_i\frac{\partial}{\partial X_k}H_{ik}d\Omega.\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，境界 $\partial\Omega$ で応力無しという境界条件を使った．また，応力テンソル H_{ij} を

$$H_{ik}:=\frac{\partial W_d}{\partial\big(\partial u_i/\partial X_k\big)}, \tag{6}$$

と置いた．以下，簡単のため，2 次元等方的弾性体，$a=1, d=2$ の場合を考察する．

次数が $d=2$ の斉次関数として，定義式（3）より，

$$W_2=\frac{1}{2}\lambda I_1^2+\mu I_2,$$

を採用し，これを式（4）に代入すると，パイオラ–キルヒホッフの応力テンソル T_{ij} が求まり，2 次元線形レイリー波の運動方程式が導かれる．即ち，変位 $u_1(X_1,X_2,t)$ に対して，高次の微小項を無視すると，

$$T_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial X_1}+\lambda\frac{\partial u_2}{\partial X_2}=P_{11},\ \ T_{12}=H_{12}=P_{12},$$

$$\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1=\frac{\partial T_{11}}{\partial X_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial X_2}=c_l^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2}+c_t^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2^2}+\big(c_l^2-c_t^2\big)\frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1\partial X_2}, \tag{7}$$

が成り立つ．ここで，

$$c_l^2:=\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0},\ \ c_t^2:=\frac{\mu}{\rho_0},\ \ r:=\frac{c_l^2}{c_t^2}=2+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{2(1-\sigma_p)}{1-2\sigma_p}.$$

ここで，σ_p はポアッソン比である．同様に，鉛直方向の変位 $u_2(X_1,X_2,t)$ に対しても，

$$\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2=\frac{\partial T_{21}}{\partial X_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial X_2}=c_l^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial X_2^2}+c_t^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2}+\big(c_l^2-c_t^2\big)\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1\partial X_2}, \tag{8}$$

が成り立つ．

後で，各式のオーダーを評価するため，微小パラメータ ε を次のように決める;

$$\varepsilon=O\Big(\Big|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\Big|\Big)\simeq u_1^{(1)}\simeq u_2^{(1)}. \tag{9}$$

ここで，$u_i^{(1)}$ は，$O(\varepsilon)$ を表す．

2.2　非線形弾性係数と非線形項

弾性体の表面付近だけに存在して，その表面に沿って伝播する表面波を考察する．このような弾性波をレイリー波（Rayleigh wave）という．今後，簡単のために，弾性体は，２次元 (X_1, X_2) 平面における，負の X_2 軸上の $X_2 = 0$ を境界とする半無限空間 $X_2 \leqq 0$ を占めているとし，X_1 軸方向に伝播する２次元レイリー波 $(u_3 = 0)$ を考える．

すでに前節で示されているように，２次元レイリー波を記述する運動方程式は，式（7), (8）より，外力がない場合，ラグランジュ 表示で，

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \ \ (i, j = 1, 2), \tag{10}$$

と書ける [19]．一方、式（7), (8) を自動的に満たすようなスカラーの変位ポテンシャル (ヘルムホルツの分解定理)$\phi_1(X_1, X_2), \phi_2(X_1, X_2)$ を導入する:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) = \mathrm{grad}\ \phi_1 + \mathrm{rot}(\phi_2 \hat{X}_3). \tag{11}$$

ただし，$\hat{X}_3$ は X_3 軸方向の単位ベクトルで，

$$\phi_1 = -iAe^{\kappa_1 X_2} e^{i(kX_1 - \omega t)}, \tag{12}$$

$$\phi_2 = Be^{\kappa_2 X_2} e^{i(kX_1 - \omega t)}. \tag{13}$$

ここで，A と B は任意の定数で，k と ω はそれぞれレイリー波の波数と角周波数であり，$\kappa_1 = \sqrt{k^2 - (\omega/c_l)^2}$, $\kappa_2 = \sqrt{k^2 - (\omega/c_t)^2}$. このとき，$X_1$ 方向と X_2 方向の変位は，それぞれ次のように表される:

$$u_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} = \Big(kAe^{\kappa_1 X_2} + \kappa_2 Be^{\kappa_2 X_2}\Big) e^{i(kX_1 - \omega t)}, \tag{14}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} = -i\Big(\kappa_1 Ae^{\kappa_1 X_2} + kBe^{\kappa_2 X_2}\Big) e^{i(kX_1 - \omega t)}. \tag{15}$$

これらの関係式を用いて，Kalyanasundaram [21] に従って，$O(\varepsilon^2)$ まで，レイリー波の応力テンソルが求まる:

$$\begin{aligned} T_{11} =& (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \rho_0 c_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \rho_0 c_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\left(2\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) \\ &+ \rho_0 c_3^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \rho_0 c_4^2 \left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$T_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) + \rho_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + 2c_4^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right). \tag{17}$$

ここで，速さの次元に換算した非線形弾性係数は，次のように定義される:

$$\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{3}{2\rho_0}\left(\lambda + 2\mu + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma\right), \\ c_2^2 &= \frac{1}{2\rho_0}\left(\lambda + 6\alpha + 2\beta\right), \\ c_3^2 &= \frac{1}{2\rho_0}\left(2\mu + 2\beta + 3\gamma\right), \\ c_4^2 &= \frac{1}{4\rho_0}\left(2\lambda + 4\mu + 2\beta + 3\gamma\right). \end{aligned}$$

これらの関係式を式（10）に代入すると，まず，伝播方向の変位 u_1 に対する運動方程式が得られる:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2}\right). \tag{18}$$

整理すると，

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2^2} - \left(c_l^2 - c_t^2\right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_1} F_1 + \frac{\partial}{\partial X_2} F_2, \tag{19}$$

となる．ただし，F_1 と F_2 は，非線形項で，$O(\varepsilon^2)$ であり，

$$F_1 = c_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + c_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\left(2\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + c_3^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + c_4^2 \left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}, \tag{20}$$

$$F_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + 2c_4^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right). \tag{21}$$

全く同様にして，鉛直方向の変位 u_2 に対する運動方程式も求まる．まず，応力テンソルは，

$$T_{21} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \rho_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + 2c_4^2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} T_{22} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \rho_0 c_1^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \rho_0 c_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\left(2\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \\ + \rho_0 c_3^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \rho_0 c_4^2 \left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

従って，鉛直方向の変位 u_2 に対する運動方程式は，

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_2^2} - \left(c_l^2 - c_t^2\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_1} G_1 + \frac{\partial}{\partial X_2} G_2, \tag{24}$$

となる．ただし，

$$G_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + 2c_4^2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right), \tag{25}$$

$$G_2 = c_1^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + c_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\left(2\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + c_3^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + c_4^2 \left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}. \tag{26}$$

次に，弾性体表面（$X_2 = 0$）で応力無し $T_{12} = T_{22} = 0$ という境界条件は

$$T_{12} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{1}{c_t^2} F_2\right]_{X_2=0} = 0, \tag{27}$$

$$T_{22} = \left[\left(\frac{c_l^2}{c_t^2} - 2\right)\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{c_l^2}{c_t^2}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{c_t^2} G_2\right]_{X_2=0} = 0, \tag{28}$$

となる．

2.3　レイリー波を記述する基礎方程式系

今後，添字の煩雑さを避けるため，レイリー波の伝播方向の波数 (k) と縦波の速さ (c_t) を使って，次のように，物理量を無次元化する:

$$x = kX_1,\ y = kX_2,\ u = ku_1,\ v = ku_2, kc_t t \to t.$$

このとき，変位 (u, v) に対する無次元化された運動方程式は，次のように書ける:

$$\mathcal{L}_1(u, v) := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (r-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} F_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(u, v), \tag{29}$$

$$\mathcal{L}_2(u, v) := \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (r-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} G_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} G_2(u, v). \tag{30}$$

境界条件も同様に，$y = 0$ において，式（27）と式（28）から，

$$\mathcal{B}_1(u, v) := \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]_{y=0} = -\left[F_2(u, v)\right]_{y=0}, \tag{31}$$

$$\mathcal{B}_2(u, v) := \left[(r-2)\frac{\partial u}{\partial x} + r\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{y=0} = -\left[G_2(u, v)\right]_{y=0}, \tag{32}$$

となる．

　また，レイリー波は，弾性体の表面付近に局在して伝播する波動であるので，

$$\lim_{y\to-\infty} u(x,y,t) = \lim_{y\to-\infty} v(x,y,t) = 0, \tag{33}$$

を満たさなければならない．式 (29) から式 (33) が非線形レイリー波の伝播を記述する基礎方程式系である [21]．

　次に，式 (29) から式 (32) を線形化（$F_j = G_j = 0\ (j=1,2)$）して，レイリー波の伝播速度を c として，変位に対する平面伝播解を求めると，

$$u = q\big(q\alpha e^{p_1 y} - \beta e^{p_2 y}\big)e^{i(x-ct)}, \tag{34}$$

$$v = ip_2\big(-\alpha e^{p_1 y} + q\beta e^{p_2 y}\big)e^{i(x-ct)}, \tag{35}$$

が得られる．ただし，ここでは，κ_2 と κ_1 を無次元化し書き換えて，$p_1 = \sqrt{1-c^2}$ と $p_2 = \sqrt{1-c^2/r}$, $q^2 = p_1 p_2$ とする．また，任意定数 α と β は，今後，断らない限りは非線形弾性係数を意味しないもとする．係数 γ も同様である．式 (34) と式 (35) を式 (31) と式 (32) に代入して，整理すると，弾性体表面（$y=0$）で応力無し ($T_{12} = T_{22} = 0$) という境界条件から，次のように，2 次の正方行列 $\mathcal{M}$ が得られる．

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-c^2 & -2q\\ -2q & 2-c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{36}$$

ここで，$\alpha\beta \neq 0$ なので，

$$\det(\mathcal{M}) = \begin{vmatrix}2-c^2 & -2q\\ -2q & 2-c^2\end{vmatrix} = 0,$$

$$\therefore (2-c^2)^2 = 4q^2 = 4p_1 p_2, \tag{37}$$

を得る．式（37）から，レイリー方程式 [22] が導かれる:

$$c^6 - 8c^4 + 8\Big(3 - \frac{2}{r}\Big)c^2 - 16\Big(1 - \frac{1}{r}\Big) = 0. \tag{38}$$

　弾性体としてゴムの場合を考えると，ゴムのポアッソン比は $\sigma_p = 0.46$ なので，$r = 13.5$ となり，レイリー方程式 (38) を数値的に解くと，ゴムのレイリー波の位相速度 $c_R \approx 0.95c_t$ が求められる．

　このとき，式 (31) と式 (32) から，$2q = 2 - c^2$ が成り立つので，

$$\alpha = \beta.$$

そこで，今後，弾性体表面 ($y=0$) での非線形レイリー波の伝播を考察するため，

$$\gamma := \alpha = \beta, \tag{39}$$

と置く．

2.4　多重尺度法と逓減非線形レイリー方程式

　十分時間が経った時のレイリー波のゆっくりした漸近的な振舞の特徴を理解するために，時間と空間に対して，多重スケール展開を導入する [11, 12, 13]:

$$\xi = \varepsilon x, \quad \eta = \varepsilon y, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{40}$$

　レイリー波の伝播方向の変位 $u(x,y,t)$ と鉛直方向の変位 $v(x,y,t)$ を次のようにフーリエ変換を用いて表すと，

$$u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k,Y,\xi,\eta,\tau)e^{ik(x-ct)}dk, \tag{41}$$

$$v(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\sigma(k)B(k,Y,\xi,\eta,\tau)e^{ik(x-ct)}dk, \tag{42}$$

となる．ここで，$Y=|k|y$，便宜上，符号因子 $\sigma(k)$=sgn(k) を導入した．また，変位 u と v は実数であるので，実数条件より，複素振幅 $A(k,Y,\xi,\eta,\tau)$ と $B(k,Y,\xi,\eta,\tau)$ に対して，$A(-k)=A^*(k)$ と $B(-k)=-B^*(k)$ が成り立つ．星印 (*) は複素共役を意味する．

同様に，非線形項 F_j と G_j $(j=1,2)$ もフーリエ変換を用いて表すと，

$$F_j(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}_j(k)e^{ik(x-ct)}dk, \tag{43}$$

$$G_j(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_j(k)e^{ik(x-ct)}dk. \tag{44}$$

となる．ただし，非線形項のフーリエ成分 $\tilde{F}_j$ と $\tilde{G}_j$ は式 (20) から式 (26) より，

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1=&-\int_{-\infty}^{\infty}k'(k-k')\Big[c_1^2A(k')A(k-k')+c_2^2\{2A(k')+B_Y(k')\}B_Y(k-k')\Big]dk'\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}|k'(k-k')|\Big[-c_3^2A_Y(k')B(k-k')+c_4^2\big\{A_Y(k')A_Y(k-k')+B(k')B(k-k')\big\}\Big]dk',\\
\tilde{F}_2=&\,i\int_{-\infty}^{\infty}|k'|(k-k')\big\{-c_3^2B(k')+2c_4^2A_Y(k')\big\}\big[A(k-k')+B_Y(k-k')\big]dk',\\
\tilde{G}_1=&\,i\int_{-\infty}^{\infty}|k'|(k-k')\big\{c_3^2A_Y(k')-2c_4^2B(k')\big\}\big[A(k-k')+B_Y(k-k')\big]dk',\\
\tilde{G}_2=&-\int_{-\infty}^{\infty}k'(k-k')\Big[c_1^2B_Y(k')B_Y(k-k')+c_2^2\{2B_Y(k')+A(k')\}A(k-k')\Big]dk'\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}|k'(k-k')|\Big[-c_3^2A_Y(k')B(k-k')+c_4^2\big\{A_Y(k')A_Y(k-k')+B(k')B(k-k')\big\}\Big]dk'.
\end{aligned}$$

となる．

式 (41) と式 (42) を式 (29) と式 (30) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1(A,B):=(r-c^2)A-A_{YY}+(r-1)B_Y\\
=&\frac{\varepsilon}{k}\Big[2icA_\tau+2irA_\xi+2\sigma(k)A_{Y\eta}-\sigma(k)(r-1)B_\eta+i(r-1)B_{Y\xi}+i\tilde{F}_1+\sigma(k)\big[\tilde{F}_2\big]_Y\Big],
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2(A,B):=(1-c^2)B-rB_{YY}-(r-1)A_Y\\
=&\frac{\varepsilon}{k}\Big[2icB_\tau+2iB_\xi+2r\sigma(k)B_{Y\eta}+\sigma(k)(r-1)A_\eta-i(r-1)A_{Y\xi}+\sigma(k)\tilde{G}_1-i\big[\tilde{G}_2\big]_Y\Big].
\end{aligned} \tag{46}$$

を得る．境界条件も，式 (41) と式 (42) を式 (31) と式 (32) に代入して，

$$\mathcal{B}_1(A,B):=A_Y-B=-\frac{\varepsilon}{k}\Big[\sigma(k)A_\eta+iB_\xi+\sigma(k)\tilde{F}_2\Big], \tag{47}$$

$$\mathcal{B}_2(A,B):=(r-2)A+rB_Y=-\frac{\varepsilon}{k}\Big[r\sigma(k)B_\eta-i(r-2)A_\xi-i\tilde{G}_2\Big]. \tag{48}$$

を得る．

一方，複素振幅 $A(k,Y,\xi,\eta,\tau)$ と $B(k,Y,\xi,\eta,\tau)$ を次のように摂動展開する：

$$A=\varepsilon A_1(k,Y,\xi,\eta,\tau)+\varepsilon^2 iA_2(k,Y,\xi,\eta,\tau)+O(\varepsilon^3), \tag{49}$$

$$B=\varepsilon B_1(k,Y,\xi,\eta,\tau)+\varepsilon^2 iB_2(k,Y,\xi,\eta,\tau)+O(\varepsilon^3). \tag{50}$$

式 (34) と式 (35) から，

$$A_1(k,Y,\xi,\eta,\tau)=q\big(q\alpha(k,\xi,\eta,\tau)e^{p_1Y}-\beta(k,\xi,\eta,\tau)e^{p_2Y}\big), \tag{51}$$

$$B_1(k,Y,\xi,\eta,\tau)=p_2\big(-\alpha(k,\xi,\eta,\tau)e^{p_1Y}+q\beta(k,\xi,\eta,\tau)e^{p_2Y}\big), \tag{52}$$

を得る．弾性体表面 ($Y=\eta=0$)) では，関係式 (39) より，

$$\gamma_k(\xi,\tau):=\alpha(k,\xi,0,\tau)=\beta(k,\xi,0,\tau), \tag{53}$$

と書き換えられる．

式 (49) と式 (50) を式 (45) と式 (46) に代入すると，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_1(A_2,B_2)=(r-c^2)A_2-A_{2YY}+(r-1)B_{2Y}\\&=\frac{1}{k}\Big[e^{p_1Y}\big\{2cq^2\alpha_\tau+(r+1)q^2\alpha_\xi-ip_2(r-1+2p_1^2)\sigma(k)\alpha_\eta\big\}\\&+e^{p_2Y}\big\{-2cq\beta_\tau-(2r+p_2^2-rp_2^2)q\beta_\xi+ip_2(r+1)q\sigma(k)\beta_\eta\big\}+N_1\Big],\end{aligned}\tag{54}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_2(A_2,B_2)=(1-c^2)B_2-rB_{2YY}-(r-1)A_{2Y}\\&=\frac{1}{k}\Big[e^{p_1Y}\big\{-2cp_2\alpha_\tau-p_2(2+rp_1^2-p_1^2)\alpha_\xi+i(r+1)q^2\sigma(k)\alpha_\eta\big\}\\&+e^{p_2Y}\big\{2cqp_2\beta_\tau+(r+1)qp_2\beta_\xi+iq(r-1-2rp_2^2)\sigma(k)\beta_\eta\big\}+N_2\Big],\end{aligned}\tag{55}$$

を得る．同様に，弾性体表面で $(Y=\eta=0)$, 境界条件は

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1(A_2,B_2)=&A_{2Y}-B_2\\=&\frac{1}{k}\big[p_2(1-q)\gamma_\xi+i\sigma(k)q(q\alpha_\eta-\beta_\eta)+N_3\big],\end{aligned}\tag{56}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2(A_2,B_2)=&(r-2)A_2+rB_{2Y}\\=&\frac{1}{k}\big[-(r-2)q(1-q)\gamma_\xi+i\sigma(k)rp_2(q\beta_\eta-\alpha_\eta)+N_4\big],.\end{aligned}\tag{57}$$

となる．ただし，非線形項 N_i $(i=1,2,3,4)$ の詳細は文献 [16] に譲る．

非線形項に含まれる永年項を除去して，A_2 と B_2 を次のように，

$$A_2=U_1e^{p_1Y}+U_2e^{p_2Y}+\sum_{i=1}^{10}\int_{I_i}W_i(k.k')\exp[T_i(p_1,p_2)Y]dk',\tag{58}$$

$$B_2=V_1e^{p_1Y}+V_2e^{p_2Y}+\sum_{i=1}^{10}\int_{I_i}X_i(k.k')\exp[T_i(p_1,p_2)Y]dk'.\tag{59}$$

置くことができる [16]. このとき，式 (58) と式 (59) を式 (54) から式 (57) に代入して，U_1 と V_2 を消去して，整理すると，

$$\begin{aligned}2p_2U_2-(2-c^2)V_1=\frac{1}{k}\Big[&\frac{L_2-q^2L_1}{p_2(r-1)}+p_2\alpha_\xi+iq^2\alpha_\eta-qp_2\beta_\xi-iq\beta_\eta+C_1I_\gamma(k)\\&-k\sum_{i=1}^{10}\int_{I_i}(W_iT_i-X_i)dk'\Big]=:\mathcal{N}_1,\end{aligned}\tag{60}$$

$$\begin{aligned}&-(2-c^2)U_2+2p_1V_1=\frac{1}{k}\Big[-\frac{rL_2+(r-2)L_1}{r-1}+(r-2)q^2\alpha_\xi-irp_2\alpha_\eta-(r-2)q\beta_\xi\\&+irqp_2\beta_\eta+C_2I_\gamma(k)+C_3J_\gamma(k)-k\sum_{i=1}^{10}\int_{I_i}\big(rX_iT_i+(r-2)W_i\big)dk'\Big]=:\mathcal{N}_2,\end{aligned}\tag{61}$$

を得る．行列 $\mathcal{M}$ に対する左固有ベクトル $\mathcal{L}$ は，即ち，$\mathcal{L}\mathcal{M}=(0,0)$ を満たすので，

$$\mathcal{L}=\big(q,p_2\big),\tag{62}$$

で与えられる．このとき，式 (60) から式 (62) より，

$$q\mathcal{N}_1+p_2\mathcal{N}_2=0,\tag{63}$$

が成り立つ．詳細は文献 [16] に譲るとして，式 (63) の代数的なやや長い計算をして整理すると，最終的に，弾性体表面 $(\eta=0)$ での複素振幅 $\gamma_k(\xi,\tau)$ に対して，

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_k}{\partial\xi}=-\int_0^k k'(k-k')\mathcal{H}(k,k')\gamma_{k'}\gamma_{k-k'}\,dk'+\int_k^\infty k'(k'-k)\mathcal{K}(k,k')\gamma_{k'}\gamma_{k-k'}\,dk',\tag{64}$$

を得る．ここで，積分核 $\mathcal{H}(k,k')$ は，

$$\mathcal{H}(k,k') = \frac{1}{P}\Big[P' + \frac{p_2(r-1)}{(s+p_1k)(s+p_2k)}\Big[q^2\Big(s+\frac{p_1(2-r)}{rq}k\Big)\Big\{2(c_1^2-c_2^2)q^2k \\ -(c_3^2+2c_4^2)(q^4+p_2^2)k + sp_2(p_2^2-1)(c_3^2+2c_4^2-2c^2c_4^2)\Big\} + qp_2\Big(s+\frac{q}{p_1}k\Big)\times \\ \Big\{p_2k(p_2^2-1)\big[(c_3^2+2c_4^2)p_1^2+2c^2c_4^2\big] - 2(c_1^2-c_2^2)q^2p_2^2s + (c_3^2+2c_4^2)(q^4+p_2^2)s\Big\}\Big]\Big]. \tag{65}$$

ただし，P と P' は弾性体に関連する定数であり，$s = p_1(k-k') + p_2k'$ と置いた．

また，積分核 $\mathcal{K}(k,k')$ は，$k'' = k'/k, d_1 = c_1^2 - c_2^2, d_3 = c_3^2 + 2c_4^2$ として，

$$\mathcal{K}(k'') := \frac{1}{P}\Big[Q' + \big(K_1+K_2+K_3+K_4+K_5\big)/k''\Big], \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
K_1(k'') &= \frac{p_2(r-1)}{p_1(2k''-1)+p_2}\Big[(d_1+d_3)q^4 + c_4^2(p_1^2q^4+p_2^2-2q^4)\Big] \\
&\quad\times\big[-q(2k''-1) - \frac{(2-r)}{r} + p_2(2k''-1)\big\{p_1(2k''-1)+\frac{q}{p_1}\big\}\big], \\
K_2(k'') &= \frac{q^2(r-1)}{p_2(2k''-1)+p_1}\Big[-q\big\{p_2(2k''-1)+\frac{p_1(2-r)}{rq}\big\}\big\{d_1+d_3p_2^2+c_2^2(1-p_2^2)^2\big\} \\
&\quad + p_2^2\big\{p_2(2k''-1)+\frac{q}{p_1}\big\}(2k''-1)\big\{d_1p_2^4+d_3p_2^2+c_2^2(1-p_2^2)^2\big\}\Big], \\
K_3(k'') &= \frac{qp_2(r-1)}{(p_1+p_2)\big[p_1(k''-1)+p_2(k''+1)\big]}\Big[q\Big\{p_1(k''-1)+p_2k''+\frac{p_1(2-r)}{rq}\Big\} \\
&\quad\times\Big\{2d_1q^2+d_3(q^4+p_2^2)+(p_1(k''-1)+p_2k'')p_2(1-p_2^2)(d_3-2c^2c_4^2)\Big\} \\
&\quad + p_2\Big\{p_1(k''-1)+p_2k''+\frac{q}{p_1}\Big\} \\
&\quad\times\Big\{p_2(1-p_2^2)(d_3p_1^2+2c^2c_4^2) - (p_1(k''-1)+p_2k'')\big(2d_1q^2p_2^2+d_3(q^4+p_2^2)\big)\Big\}\Big], \\
K_4(k'') &= \frac{q^2p_2(r-1)}{(p_1+p_2)\big[p_2(k''-1)+p_1(k''+1)\big]}\Big\{p_2(k''-1)+p_1k''+\frac{p_1(2-r)}{rq}\Big\} \\
&\quad\times\Big[2d_1q^2+d_3(q^4+p_2^2) - \Big\{p_2(k''-1)+p_1k''\Big\}p_2(1-p_2^2)(d_3-2c^2c_4^2)\Big], \\
K_5(k'') &= \frac{-qp_2^2(r-1)}{(p_1+p_2)\big[p_2(k''-1)+p_1(k''+1)\big]}\Big\{p_2(k''-1)+p_1k''+\frac{q}{p_1}\Big\} \\
&\quad\times\Big[p_2(1-p_2^2)(d_3p_1^2+2c^2c_4^2) + \big\{p_2(k''-1)+p_1k''\big\}\big\{2d_1q^2p_2^2+d_3(q^4+p_2^2)\big\}\Big].
\end{aligned}$$

式 (64) を，ここでは，逓減非線形レイリー方程式 (Reductive Nonlinear Rayleigh Equation, RNRE) と呼ぶことにする．詳細は文献 [16] に譲るが，典型的な等方的弾性体に対して，積分核 $\mathcal{H}(k,k')$ と積分核 $\mathcal{K}(k,k')$ の値が，非負の値を取ることを確かめている．

3 逓減非線形レイリー方程式のパラメトリック励起モデル

式 (29) から式 (33) までの非線形レイリー方程式系を，適切な境界条件と初期値に対して，一般的に，解析的に解くことは簡単ではない．従って，多重尺度法で摂動展開し [11, 12, 13]，弾性体表面で伝播するレイリー波に着目して，任意の高調波までの非線形相互作用を表している積分核 $\mathcal{H}(k,k')$ と積分核 $\mathcal{K}(k,k')$ を含んだ式 (64) 逓減非線形レイリー方程式を導いた．導出過程から明らかなように，式 (64) の積分は和に置き換えることができるので，式 (64) は, 弾性体表面 $(Y=\eta=0)$ で,

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau} + c\frac{\partial\gamma_k}{\partial\xi} = -\sum_{k'=1}^{k} k'(k-k')\mathcal{H}(k,k')\gamma_{k'}\gamma_{k-k'} + \sum_{k'=k+1}^{\infty} k'(k'-k)\mathcal{K}(k,k')\gamma_{k'}\gamma_{k-k'}. \tag{67}$$

を得る. 式 (67) (RNRE) を，適切な境界条件と初期値に対して，解析的に解くことはまだ難しい.

そこで，文献 [15] で示したように，レイリー波の基本波 ($k=1$) と第 2 高調波 ($k=2$) のパラメトリック励起モデルを導入して，レイリー波は非線形振幅変調によって，ソリトンとして伝播できることを示した．即ち，非線形振幅変調を受けたレイリー波の電波の様子は，理論的に，ヤコビの楕円関数によって記述できる，ということが明らかになった．今回の研究によって，このパラメトリック励起モデルは，任意の高調波までの非線形相互作用を含んだ式 (67) にまで拡張されたので，レイリー波の第 k モードと第 $2k$ 高調波モードのパラメトリック励起モデル，

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_k}{\partial\xi}=2k^2\mathcal{K}(k,2k)\gamma_{2k}\gamma_k^*, \tag{68}$$

$$\frac{\partial\gamma_{2k}}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_{2k}}{\partial\xi}=-k^2\mathcal{H}(2k,k)\gamma_k^2. \tag{69}$$

が成り立つ．一般に，積分核 $\mathcal{H},\mathcal{K}$ の中身は具体的にポアソン比と非線形弾性定数が決まれば定まる．ここで，結合定数は，例えば，ゴムの場合，式 (65) と式 (66) より，$\mathcal{K}(1,2)=0.114$, $\mathcal{H}(2,1)=0.113$ である．

式 (68) の右辺の符号は正であるので第 k モードの不安定化を促す一方，式 (69) の右辺の符号は負であるので第 $2k$ 高調波モードの安定化を促す．従って，このパラメトリック励起モデルは，定性的には，第 k モードと第 $2k$ モードとの相互作用の安定と不安定の拮抗を記述しているモデルと言える．

野崎–谷内 [23] は，非線形相互作用をするプラズマ波に対して，三波相互作用を考察して，ソリトンが伝播することを論じた．逓減非線形レイリー方程式 (RNRE) に対して，三波相互作用を考えると，

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_1}{\partial\xi}=\Delta_{k1}\gamma_k\gamma_{k-1}^*, \tag{70}$$

$$\frac{\partial\gamma_{k-1}}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_{k-1}}{\partial\xi}=\Delta_{k2}\gamma_k\gamma_1^*, \tag{71}$$

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_k}{\partial\xi}=-\Delta_{k3}\gamma_{k-1}\gamma_1, \tag{72}$$

が得られる．一般に，この三波相互作用は，任意の三波 $\gamma_m,\gamma_l,\gamma_k$ $(m+l=k)$ に対して，拡張できて，三つのモードの相互作用の安定と不安定の拮抗を記述している．

簡単のため，最も基本的な場合を考察すると，

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_1}{\partial\xi}=\Delta_{31}\gamma_3\gamma_2^*, \tag{73}$$

$$\frac{\partial\gamma_2}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_2}{\partial\xi}=\Delta_{32}\gamma_3\gamma_1^*, \tag{74}$$

$$\frac{\partial\gamma_3}{\partial\tau}+c\frac{\partial\gamma_3}{\partial\xi}=-\Delta_{33}\gamma_2\gamma_1, \tag{75}$$

となる．ここで，正の定数 Δ_{3j} $(j=1,2,3)$ は，

$$\Delta_{31}=6\mathcal{K}(1,3),\Delta_{32}=3\mathcal{K}(2,3),\Delta_{33}=2\big[\mathcal{H}(3,1)+\mathcal{H}(3,2)\big].$$

で与えられる．例えば，ゴムの場合， $\chi_1=1$ と $\chi_2=5/6$ のとき, ポアッソン比 $\sigma_p=0.46$ なので，

$$\Delta_{31}=0.473,\Delta_{32}=0.473,\Delta_{33}=0.470.$$

となる．式 (70) から式 (72) あるいは式 (73) から式 (75) は，文献 [23, 16] で説明されているように，4 個の保存量を持つことにより，各高調波がヤコビの楕円関数で記述できることが示される．

ここでは，文献 [23, 24] に従って，式 (73) から式 (75) に，適当な変換を導入することによって，非線形振動子を記述するサイン–ゴルドン方程式を導いて，ソリトン解を持つことを説明する．

まず，ガリレイ変換 $\zeta=\xi-\tilde{\lambda}\tau$ $(\tilde{\lambda}\neq c)$ を導入して，γ_j は ζ だけの関数と仮定し，式 (73) から式 (75) を書き直すと，

$$\gamma_1'=\frac{\Delta_{31}}{c-\tilde{\lambda}}\gamma_3\gamma_2^*, \tag{76}$$

$$\gamma_2'=\frac{\Delta_{32}}{c-\tilde{\lambda}}\gamma_3\gamma_1^*, \tag{77}$$

$$\gamma_3'=-\frac{\Delta_{33}}{c-\tilde{\lambda}}\gamma_1\gamma_2, \tag{78}$$

となる．プライム記号は ζ に関する微分を意味する．ここで，次のような変換を導入する [23, 24]:

$$\psi(\zeta) := \frac{2}{\kappa}\int_{-\infty}^{\zeta} \gamma_1(z)\,dz, \tag{79}$$

$$\gamma_2(\zeta) := \alpha_2 \sin\frac{\psi}{2}, \tag{80}$$

$$\gamma_3(\zeta) := \alpha_1 \cos\frac{\psi}{2}. \tag{81}$$

ここで，$\kappa, \alpha_1, \alpha_2$ は定数である．以上の式から，γ_1 と γ_2 が実数のとき，次のサイン–ゴルドン方程式

$$\psi''(\zeta) = \tilde{\delta}^2 \sin\psi, \tag{82}$$

が導かれる．ただし，

$$\tilde{\delta} = \left|\frac{\alpha_1}{\kappa}\right|\sqrt{\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{33}}},\ \tilde{\lambda} = c \pm \kappa\sqrt{\Delta_{32}\Delta_{33}}.$$

サイン–ゴルドン方程式 (82) の解として，無限遠方で一様状態に漸近する場合，

$$\psi(\zeta) = 4\tan^{-1}[e^{\tilde{\delta}\zeta}], \tag{83}$$

を得る．式 (76) から式 (83）より，式 (76) から式 (78）に対するソリトン解

$$\gamma_1(\zeta) = \kappa\tilde{\delta}\,\mathrm{sech}[\tilde{\delta}\zeta],\ \ \gamma_2(\zeta) = \alpha_2\,\mathrm{sech}[\tilde{\delta}\zeta],\ \ \gamma_3(\zeta) = -\alpha_1\tanh[\tilde{\delta}\zeta],$$

が得られる [23]．これらのソリトン解は，ヤコビの楕円関数の母数が 1 の極限から得ることが出来る [16].

一方，非線形レイリー波の伝播を記述する基礎方程式系（29) から (33) の数値解によれば，レイリー波の伝播方向の変位の速度成分は衝撃波的振る舞いをし，その鉛直方向の変位の速度成分はパルス的振る舞いをすることが示されている [25, 26]．しかし，レイリー波の電波の数値解がどうしてそういうふうに振る舞うのかは明らかではなかった．非線形レイリー波に対して，パラメトリック励起モデルが仮定できる枠組みの中で，非線形レイリー波の弾性体表面上の伝播がヤコビの楕円関数やソリトン解によって記述できることが示されたので，非線形レイリー波が衝撃波的プロファイルやパルス的プロファイルを形成することなどが理論的に説明可能になった．このことは，非線形レイリー波の伝播を解析する場合，パラメトリック励起モデルが役立つことを示している．

4　今後の課題

これまで，弾性体の表面波 (SAW) の生物物理への応用を目指して，筋原繊維や心臓壁などはゴムのような弾性体と仮定して，弾性体理論 [11, 12, 19] が非線形な場合に対しても適用できることを報告してきた（2019 年，春と秋の物理学会，[15], [16]）．心筋など筋原繊維は繊維状であるため，非等方性を持つ弾性体表面波の伝播の場合 [27] に拡張する研究がまだ残されている．非等方性をもつ弾性体に対しては，RNRE（67）における積分核 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ はより複雑な形になるけれども，形式的には，同じように表せると予想される．

また，弾性体としての金属などとは違って，特に，ゴムは，Gough-Joule 効果として，エントロピー弾性を示すことが知られている [10, 19]．従って，熱的効果を含むレイリー波の伝播を考察することも重要である．心筋細胞に熱を加えると振動が励起される現象 [30, 31] を説明するには，むしろ熱の寄与は重要であると考えられる．一般に，熱的効果を考慮した弾性体の内部エネルギー (U) は，歪テンソル (E_{ij}) とエントロピー (S) の関数として与えられる．温度 (T) は，内部エネルギーのエントロピーの微分で与えられる．今後，内部エネルギーが少なくともエントロピーの 2 次のオーダーまで考慮されている非線形理論を研究しなければならない．大動脈弁の開閉による心臓壁上の興奮波の伝播の解析において，温度依存性の影響の評価に役立つことが期待されるので，熱的効果が考慮されている弾性体表面を伝播する RNRE の厳密解を求めることが当面の目標である．

谷内俊弥先生が創生した逓減摂動法（Reductive Perturbation Method）[24] は，プラズマ中の非線形波動現象を解明することに大いに貢献してきた．高温プラズマにおけるドリフト波乱流の研究 [28] において，チャーネイ · ハセガワ · ミマ 方程式 [29] が大きな貢献をしたことを考えると，ここで報告した逓減非線形レイリー方程式（67）(Reductive Nonlinear Rayleigh Equation) の解析的な研究は，生物物理や医療工学における筋収縮系の理解を深めるために，重要な寄与をすることが期待される．

謝辞

筆者を非線形波動の研究に導き，絶えず暖かいご指導を賜った恩師・谷内俊弥先生の霊に感謝を申し上げます．また，野崎一洋・名古屋大学名誉教授と杉本信正・大阪大学名誉教授の暖かい激励に感謝いたします．

Waseda Research Institute for Science and Engineering
Waseda University
Tokyo 169-8555
JAPAN
E-mail address: n.bekki@kurenai.waseda.jp

早稲田大学・理工学研究所　戸次直明

参考文献

[1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965).

[2] E. N. Lorenz, J. Atomos. Sci. **20**, 130 (1963).

[3] Y. Ueda,「非線形性に基づく確率統計現象ーダフィング方程式で表わされる系の場合」，電気学会論文誌 **A 98**, 167 (1978).

[4] H. Kanai, Ultrasound Med. Biol. **35**, 936 (2009).

[5] N. Bekki and K. Nozaki, Phys. Lett. **A 110**, 133 (1985).

[6] N. Bekki, Y. Harada, and H. Kanai, J. Phys. Soc. Jpn. **81**, 073801 (2012).

[7] S. Ishiwata, Y. Shimamoto, and N. Fukuda, Prog. Biophys. Mol. Biol. **105**, 187 (2011).

[8] K. Sato, M. Ohtaki, Y. Shimamoto, and S. Ishiwata, Prog. Biophys. Mol. Biol. **105**, 199 (2011).

[9] K. Sato, Y. Kuramoto, M. Ohtaki, Y. Shimamoto, and S. Ishiwata, Phys. Rev. Lett. **111**, 108104 (2013).

[10] 久保　亮五,「ゴム弾性（初版復刻版）」（裳華房，1996).

[11] M. Hirao and N. Sugimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **42**, 2056 (1977).

[12] R. W. Lardner, Int. J. Eng. Sci. **21**, 1331 (1983).

[13] R. W. Lardner, J. Appl. Phys. **55**, 3251 (1984).

[14] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, *Nonlinear Plasma Theory* (W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969).

[15] N. Bekki, K. Ishii, and K. Endo, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 014001 (2019).

[16] N. Bekki, K. Kagawa, and K. Kikuchi, J. Phys. Soc. Jpn. **88**,124001 (2019).

[17] 今井　功,「流体力学（前編）」（裳華房，1973).

[18] 巽　友正,「連続体の力学」（岩波書店，1995).

[19] D. R. Bland, *Nonlinear Dynamic Elasticity* (Blaisdell, Waltham, MA, 1969).

[20] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon, New York,1986).

[21] N. Kalyanasundaram, Int. J. Eng. Sci. **19**, 279 (1981).

[22] L. Rayleigh, Proc. London Math. Soc. **s1-17**, 4 (1885).

[23] K. Nozaki and T. Taniuti, J. Phys. Soc. Jpn. **34**, 796 (1973).

[24] 谷内俊弥，西原功修,「非線形波動」（岩波書店，応用数学叢書，1977).

[25] R. W. Lardner, Int. J. Eng. Sci. **23**, 113 (1985).

[26] E. A. Zabolotskaya, J. Acoust. Soc. Am. **91**, 2569 (1992).

[27] R. W. Lardner, J. of Elasticity **16**, 63 (1986).

[28] N. Bekki, H. Takayasu, T. Taniuti, and H. Yoshihara, Physica Scripta, **T2/1**, 89 (1982).

[29] A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids **21**, 87 (1978).

[30] S. A. Shintani, K. Oyama, N. Fukuda and S. Ishiwata: Biochem. Biophys. Res. Commun. **457**, 165 (2015).

[31] T. Washio, S. A. Shintani, H. Higuchi, S. Sugiura, and T. Hisada, Sci. Rep. **9**, 9355 (2019).