

# 長距離相互作用 1次元非線形格子の厳密解と不変部分空間

鳥取大学学術研究院工学系部門 吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)<sup>†</sup>

大阪大学大学院工学研究科 土井 祐介 (Yusuke Doi)<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Faculty of Engineering, Tottori University

<sup>‡</sup>Graduate School of Engineering, Osaka University

## 概要

相互作用する粒子間の距離を  $r$  とするとき、結合係数が  $r^{-2}$  に比例する 4 次の長距離相互作用を持つような無限サイズの 1 次元非線形格子系について解析を行った。任意の波数  $k \in (0, 2\pi/3]$  に対して、定在波と進行波の厳密な平面波解を導出した。さらに、有限個のモードで張られる不変部分空間が無限個存在することを証明した。

## 1 はじめに

非線形格子系は、空間離散的な非線形媒質における様々な動的現象を調べるための数理モデルとして広く用いられてきた。例えば、ソリトン [1] や Discrete Breather [2, 3] のような波動現象、非平衡状態から平衡状態への緩和過程 [4]、熱伝導現象 [5] 等の文脈において、非線形格子モデルが用いられ多数の研究が成されてきた。しかしながら、非線形格子系の数理的性質については、未だ十分に理解されていない部分も多い。特に、線形格子や戸田格子のような完全可積分系を除くと、非線形格子系の厳密解は、ごく僅かしか知られていない [6, 7]。

近年、或る特殊な 1 次元非線形格子系が注目され活発に研究が成されている [8, 9, 10]。その格子系は、4 次の長距離相互作用粒子間ポテンシャルを持ち、結合係数が  $r^{-2}$  で与えられるものである。ここで、 $r$  は相互作用する 2 粒子間の距離を表す。文献 [8, 10] では、この格子系において弾道的熱伝導が生じることが、非平衡分子動力学シミュレーションにより示されている。一方で、正のリアプノフ指数の数値計算結果は、系が非可積分であることを示している [8]。従来、弾道的熱伝導を示す系としては完全可積分格子しか知られておらず、当該格子は熱伝導に関し特異な性質を示す系であるといえる。この結果は、当該格子が、完全可積分系では無いものの何らかの特別な力学系構造を持つことを示唆しているように思われる。特別な構造が存在する場合、それを明らかにすることは、当該格子系のダイナミクスに関する理解を深めると共に、特異な熱伝導特性が生じる理由の解明にも役立つと期待される。

本研究では、上述の長距離相互作用 1 次元非線形格子が、任意の波数  $k \in (0, 2\pi/3]$  に対して定在波と進行波の厳密な平面波解を持つことを示す。それら平面波解の陽な表式を導出する。さらに、 $k \notin (0, 2\pi/3]$  に対しては、波数  $k$  の単一モード平面波解は必ずしも存在せず、そのモードを含む有限個のモードで張られる不変部分空間が存在することを示す。以下では、2 節で、本研究で扱う長距離相互作用 1 次元非線形格子モデルについて説明する。3 節で、定在波と進行波の厳密な

平面波解を導出する。4節で、有限個のモードで張られる不変部分空間の存在に関する結果を述べる。さらに、5節で、低次元の不変部分空間上に制限された部分力学系の例を示す。

## 2 格子モデル

以下のハミルトニアンで記述される無限サイズの1次元格子モデルを考える。

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} p_n^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\mu_1}{2} (q_{n+1} - q_n)^2 + \frac{\mu_0}{2} q_n^2 \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{b_r}{4} (q_{n+r} - q_n)^4 \quad (1)$$

このハミルトニアンは、直線上に並んだ単位質量粒子が長距離相互作用する系を記述しており、 $q_i, p_i \in \mathbb{R}$  は、それぞれ、 $i$  番目粒子の位置と運動量を表す変数である。 $\mu_1, \mu_0 \in \mathbb{R}$  および  $b_r, r \in \mathbb{N}$  はパラメータである。特に、長距離相互作用の結合係数  $b_r$  を以下のように仮定する

$$b_r = \frac{1}{r^2}, \quad r \in \mathbb{N} \quad (2)$$

系の運動方程式は、ハミルトニアン (1) より、 $\dot{q}_n = \partial H / \partial p_n$ ,  $\dot{p}_n = -\partial H / \partial q_n$  に従って次式で与えられる。

$$\dot{q}_n = p_n \quad (3)$$

$$\dot{p}_n = \mu_1 (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) - \mu_0 q_n + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} [(q_{n+r} - q_n)^3 - (q_n - q_{n-r})^3] \quad (4)$$

ここで、 $n \in \mathbb{Z}$  である。

実数の有界数列  $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  全体の集合に  $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$  でノルムを定義した Banach 空間を  $l^{\infty}(\mathbb{Z})$  で表す。運動方程式 (3), (4) に対し、 $\Omega = l^2(\mathbb{Z}) \times l^2(\mathbb{Z})$  に  $\|\mathbf{z}\|_{\Omega} = \|\mathbf{q}\|_{\infty} + \|\mathbf{p}\|_{\infty}$  でノルムを導入した Banach 空間を位相空間とする。ここで、 $\mathbf{q} = \{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\mathbf{p} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^{\infty}(\mathbb{Z})$ , および、 $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega$  である。ハミルトニアン (1) は、 $\Omega$  の全ての点においては有限値を持たないので、形式的なハミルトニアンである。しかしながら、任意の点  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega$  において、(4) 式の右辺は  $n \in \mathbb{Z}$  に関して一様収束し、(3), (4) 式の右辺は  $\Omega$  上の局所 Lipschitz 連続なベクトル場を定める。したがって、(3), (4) 式は  $\Omega$  上の微分方程式として適切に定義される。運動方程式 (3), (4) は、以下の2階微分方程式に書き直される。

$$\ddot{q}_n = \mu_1 (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) - \mu_0 q_n + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} [(q_{n+r} - q_n)^3 - (q_n - q_{n-r})^3], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

後節の議論では、この式を利用する。

## 3 厳密解の導出

### 3.1 単一モード方程式

運動方程式 (5) の解を、以下の単一モード平面波解の形を仮定して探す。

$$q_n(t) = U_k(t) \exp[ikn] + U_{-k}(t) \exp[-ikn], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

ここで,  $U_k, U_{-k} \in \mathbb{C}$  であり,  $k$  は平面波の波数を表す. 波数  $k$  に対して, 以下の仮定を置く.

$$k \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right] \quad (7)$$

条件  $q_n \in \mathbb{R}$  により,  $U_{-k}$  と  $U_k$  の複素共役は関係式  $U_{-k} = \bar{U}_k$  を満たさなければならない.

平面波解 (6) を (5) 式に代入すると, 左辺より次式が得られる.

$$(\text{l.h.s.}) = \ddot{U}_k e^{ikn} + \ddot{U}_{-k} e^{-ikn} \quad (8)$$

一方, (5) 式の右辺に現れる線形部分  $\mathcal{L}_n$ , および, 非線形部分  $\mathcal{N}_n$  は, それぞれ, 以下のように得られる.

$$\mathcal{L}_n = -\{4\mu_1 \sin^2(k/2) + \mu_0\} (U_k e^{ikn} + U_{-k} e^{-ikn}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n &= -2 \left( U_k^3 e^{i3kn} + U_{-k}^3 e^{-i3kn} \right) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \{1 - 3 \cos(rk) + 3 \cos(2rk) - \cos(3rk)\} \\ &\quad -6 \left( U_k^2 U_{-k} e^{ikn} + U_k U_{-k}^2 e^{-ikn} \right) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \{3 - 4 \cos(rk) + \cos(2rk)\} \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式の右辺に現れる無限級数を計算する. その為に, 以下の公式を利用する.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos rx}{r^2} = \frac{1}{4} (\varphi(x) - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad (11)$$

ここで,  $\varphi(x)$  は次式で定義される関数とする.

$$\varphi(x) = x - 2\pi l \quad \text{for } x \in (2\pi l, 2\pi(l+1)], \quad l \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

波数に関する仮定 (7) 式より,  $k, 2k, 3k \in (0, 2\pi]$  となる. したがって,  $\varphi(k) = k, \varphi(2k) = 2k, \varphi(3k) = 3k$  である. これらを踏まえて公式 (11) を適用すると, (10) 式の最初の無限級数は, 以下のように計算される.

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \{1 - 3 \cos(rk) + 3 \cos(2rk) - \cos(3rk)\} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - 3 \left\{ \frac{1}{4} (k - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right\} + 3 \left\{ \frac{1}{4} (2k - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right\} - \left\{ \frac{1}{4} (3k - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

同様に, 2 番目の無限級数は, 以下のように計算される.

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \{3 - 4 \cos(rk) + \cos(2rk)\} \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 4 \left\{ \frac{1}{4} (k - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right\} + \left\{ \frac{1}{4} (2k - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right\} = \pi k \end{aligned} \quad (14)$$

無限和の表式 (13), (14) を (10) 式に代入した後,  $\mathcal{L}_n + \mathcal{N}_n$  と (8) 式を等置することにより, 次式が得られる.

$$\left[ \ddot{U}_k + \{4\mu_1 \sin^2(k/2) + \mu_0\} U_k + 6\pi k U_k^2 U_{-k} \right] e^{ikn} + \text{c.c.} = 0 \quad (15)$$

式中の c.c. は複素共役を表す. (15) 式が成り立つ為には,  $e^{ikn}$  の係数部分がゼロとなる必要がある. これより, 変数  $U_k$  で閉じた以下の単一モード方程式が得られる.

$$\ddot{U}_k + \{4\mu_1 \sin^2(k/2) + \mu_0\} U_k + 6\pi k |U_k|^2 U_k = 0 \quad (16)$$

ただし, 上式を得る際に, 関係式  $\bar{U}_k = U_{-k}$  を用いた. 変数  $U_{-k}$  に関する方程式は, (16) 式の複素共役として与えられ, 本質的に同じ方程式である.

上記計算において, (13) 式により,  $e^{\pm i3kn}$  の項が (15) 式に現れない点が重要である. これは, 格子系 (1) が備える特殊な性質であり, 一般的な非線形格子においては期待できない. この特殊な性質の故に, 変数  $U_k$  のみで閉じた方程式 (16) が得られる. (16) 式の任意の解  $U_k(t)$ , および, その複素共役  $U_{-k}(t)$  から (6) 式を通して得られる  $\{q_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は, 元の座標系での方程式 (5) の厳密解を与える.

(16) 式を解くために, 極座標への変換  $U_k = Ae^{i\theta}$ ,  $A, \theta \in \mathbb{R}$  を施す. 新変数  $A, \theta$  を用いて, (15) 式は以下のように書き直される.

$$\ddot{A} - \dot{\theta}^2 A + \alpha A + \beta A^3 = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta} A^2) = 0 \quad (18)$$

ここで,  $\alpha$  と  $\beta$  は次式で与えられる定数である.

$$\alpha = 4\mu_1 \sin^2(k/2) + \mu_0, \quad \beta = 6\pi k \quad (19)$$

### 3.2 定在波解

(16) 式の解を, 以下のような解の形を仮定して探す.

$$U_k(t) = \frac{1}{2} A(t) e^{i\theta_0} \quad (20)$$

ここで,  $A(t) \in \mathbb{R}$  は時間  $t$  の関数,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  は定数とする. (16) 式に代入することにより, 任意の  $\theta_0$  の値に対して, 変数  $A(t)$  に関する以下の方程式が得られる.

$$\ddot{A} + \alpha A + \frac{1}{4} \beta A^3 = 0 \quad (21)$$

方程式 (21) の解は, Jacobi 楕円関数を用いて求まる. その解の形は,  $\alpha$  に依存する. ここでは, 物理的に自然な  $\mu_1, \mu_0 \geq 0$  場合を考える. このとき,  $\alpha \geq 0$  となる. (21) 式を解くことにより, 格子の運動方程式 (5) の定在波解が得られる.

**定理 3.1**  $\mu_1, \mu_0 \geq 0$  および  $k \in (0, 2\pi/3]$  とする. このとき, 運動方程式 (5) は, 以下の定在波解を持つ.

$$q_n(t) = A_0 \operatorname{cn}(\sigma t, k_m) \cos(kn + \theta_0), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

ただし,  $A_0 > 0$  と  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  は任意の定数であり, 楕円関数の母数  $k_m$  と定数  $\sigma$  は次式で与えられる.

$$k_m = \sqrt{\frac{\beta A_0^2}{2(4\alpha + \beta A_0^2)}}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha + \beta A_0^2} \quad (23)$$

格子系 (1) のポテンシャル非線形性の結果として，定在波解 (22) の周期  $T$  は振幅  $A_0$  に依存する．具体的には，周期  $T$  は次式で与えられる．

$$T = \frac{4K(k_m)}{\sigma} \quad (24)$$

ここで， $K(k_m)$  は次式で定義される第一種完全楕円積分を表す．

$$K(k_m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k_m^2 \sin^2 \phi}} \quad (25)$$

### 3.3 進行波解

(16) 式の解を，以下のような解の形を仮定して探す．

$$U_k(t) = \frac{1}{2} A_0 e^{-i(\omega t - \theta_0)} \quad (26)$$

ここで， $A_0 \in \mathbb{R}$  と  $\omega \in \mathbb{R}$  は定数とする．この仮定は，(17), (18) 式で  $A = A_0/2$ ,  $\theta = -\omega t + \theta_0$  とすることに相当する．このとき，任意の  $A_0, \theta_0, \omega$  に対して (18) 式は満たされる．一方，(17) 式からは，以下の代数方程式が得られる．

$$-\omega^2 A_0 + \alpha A_0 + \frac{\beta}{4} A_0^3 = 0 \quad (27)$$

定数  $\alpha, \beta$  が波数  $k$  に依存することに注意すると，(27) 式は， $A_0, k, \omega$  の間の関係式，すなわち分散関係式を与えていることが分かる．与えられた  $k \in (0, 2\pi/3]$  と  $A_0 > 0$  に対して，周波数  $\omega$  は (27) 式より以下のように得られる．

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha + \beta A_0^2} \quad (28)$$

この  $\omega$  を備えた (26) 式の  $U_k$  を (6) 式に代入すると，運動方程式 (5) の進行波解が得られる．この進行波解は，定理 3.2 が示すように線形格子の平面波解と同じ空間波形を持つ．ただし，(28) 式が示すように，ポテンシャル非線形性の結果として，周波数  $\omega$  は振幅  $A_0$  と波数  $k$  に依存する．

**定理 3.2**  $\mu_1, \mu_0 \geq 0$  および  $k \in (0, 2\pi/3]$  とする．このとき，運動方程式 (5) は，以下の進行波解を持つ．

$$q_n(t) = A_0 \cos(kn - \omega t + \theta_0), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

ただし， $A_0 > 0$  と  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  は任意の定数であり， $\omega$  は (28) 式で与えられる．

## 4 有限個のモードで張られる不変部分空間

本節では，格子系 (1) において，有限個のモードで張られる不変部分空間が無数存在することを述べる． $I_j \subset \mathbb{R}$  を以下のように定義される区間とする．

$$I_j = \left( \frac{2(j-1)}{2(j-1)+1} \pi, \frac{2j}{2j+1} \pi \right], \quad j \in \mathbb{N} \quad (30)$$

ここで定義した区間は,  $j = 1$  のときは (7) 式の区間に一致し,  $I_1 = (0, 2\pi/3]$  である. 各  $j \in \mathbb{N}$  に対して,  $M_j$  を次式で定義される整数の集合とする.

$$M_j = \{ \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2j-1) \} \quad (31)$$

波数  $k \in I_j$  が与えられたとき, (4) 式の解を以下の形に仮定する.

$$q_n(t) = \sum_{m \in M_j} U_{mk}(t) \exp[imkn] \quad (32)$$

ここで, 級数の和は全ての  $m \in M_j$  について取るものとする. また,  $q_n$  の実数条件により,  $U_{mk} \in \mathbb{C}$  は条件  $U_{-mk} = \bar{U}_{mk}$  を満たすものとする. (32) 式は, 有限個のモードから成るような解を表している.

有限モード解 (32) 式を (5) 式に代入すると, 左辺より次式が得られる.

$$(\text{l.h.s.}) = \sum_{m \in M_j} \ddot{U}_{mk} e^{imkn} \quad (33)$$

一方, (5) 式の右辺に現れる線形部分  $\mathcal{L}_n$ , および, 非線形部分  $\mathcal{N}_n$  は, それぞれ, 以下のように得られる.

$$\mathcal{L}_n = - \sum_{m \in M_j} \{ 4\mu_1 \sin^2(mk/2) + \mu_0 \} U_{mk} e^{imkn} \quad (34)$$

$$\mathcal{N}_n = \sum_{m_1, m_2, m_3 \in M_j} C_{m_1, m_2, m_3} U_{m_1 k} U_{m_2 k} U_{m_3 k} e^{i(m_1 + m_2 + m_3)kn} \quad (35)$$

ここで, 式中の係数  $C_{m_1, m_2, m_3}$  は次式で与えられる.

$$C_{m_1, m_2, m_3} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2} \{ \cos((m_1 + m_2 + m_3)rk) + \cos(m_1 rk) + \cos(m_2 rk) + \cos(m_3 rk) \\ - \cos((m_1 + m_2)rk) - \cos((m_2 + m_3)rk) - \cos((m_3 + m_1)rk) - 1 \} \quad (36)$$

(35) 式において,  $|m_1 + m_2 + m_3| \geq 2j + 1$  のとき  $C_{m_1, m_2, m_3} = 0$  であることが証明される. この事実,  $m \in M_j$  に対する空間波数成分  $e^{imkn}$  のみが  $\mathcal{N}_n$  に現れることを意味する. したがって, (33) 式と  $\mathcal{L}_n + \mathcal{N}_n$  を等置することにより, 変数  $U_{mk}$ ,  $m \in M_j$  で閉じた微分方程式が得られる. 位相空間  $\Omega$  の有限次元部分空間  $\mathcal{S}_{j,k} \subset \Omega$  を次式で定義する.

$$\mathcal{S}_{j,k} = \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega; q_n = \sum_{m \in M_j} Q_m e^{imkn}, p_n = \sum_{m \in M_j} P_m e^{imkn}, \right. \\ \left. Q_m, P_m \in \mathbb{C}, Q_{-m} = \bar{Q}_m, P_{-m} = \bar{P}_m \right\} \quad (37)$$

任意の点  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in \mathcal{S}_{j,k}$  に対し, 運動方程式 (3), (4) の  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  を初期条件とする解  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  の時間発展は, 変数  $\{U_{mk}\}_{m \in M_j}$  で閉じた微分方程式で記述される. 任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対し,  $\mathbf{q}(t)$  と  $\mathbf{p}(t)$  は, それぞれ,  $\{U_{mk}(t)\}_{m \in M_j}$  と  $\{\dot{U}_{mk}(t)\}_{m \in M_j}$  の線形結合で与えられる. したがって, 以下の定理が得られる.

**定理 4.1**  $j \in \mathbb{N}$  に対し,  $k \in I_j$  とする.  $\mathcal{S}_{j,k}$  は運動方程式 (3), (4) の不変部分空間である.

## 5 不変部分空間 $\mathcal{S}_{j,k}$ 上の力学系の例

低次元の不変部分空間  $\mathcal{S}_{j,k}$  上の力学系の具体例と、そのダイナミクスを数値的に調べた結果を示す。区間  $I_2 = (2\pi/3, 4\pi/5]$  を考え、波数について  $k \in I_2$  を仮定する。この場合、 $\mathcal{S}_{2,k}$  は波数  $\pm k$  と  $\pm 3k$  のモードで張られる。不変部分空間  $\mathcal{S}_{2,k}$  に制限された格子系 (1) の運動方程式は、次式を (5) 式に代入して得られる。

$$q_n(t) = U_k(t)e^{ikn} + U_{-k}(t)e^{-ikn} + U_{3k}(t)e^{i3kn} + U_{-3k}(t)e^{-i3kn} \quad (38)$$

制限された運動方程式は、次式のように得られる。

$$\ddot{U}_k = -\omega_k^2 U_k - 6\pi k |U_k|^2 U_k - 6\pi(3k - 2\pi) (U_{-k}^2 U_{3k} + 2U_k |U_{3k}|^2) \quad (39)$$

$$\ddot{U}_{-k} = -\omega_k^2 U_{-k} - 6\pi k |U_{-k}|^2 U_{-k} - 6\pi(3k - 2\pi) (U_k^2 U_{-3k} + 2U_{-k} |U_{-3k}|^2) \quad (40)$$

$$\ddot{U}_{3k} = -\omega_{3k}^2 U_{3k} - 2\pi(3k - 2\pi) (U_k^3 + 6|U_k|^2 U_{3k} + 3|U_{3k}|^2 U_{3k}) \quad (41)$$

$$\ddot{U}_{-3k} = -\omega_{3k}^2 U_{-3k} - 2\pi(3k - 2\pi) (U_{-k}^3 + 6|U_{-k}|^2 U_{-3k} + 3|U_{-3k}|^2 U_{-3k}) \quad (42)$$

ただし、 $\omega_k^2 = 4\mu_1 \sin^2(k/2) + \mu_0$ 、および、 $\omega_{3k}^2 = 4\mu_1 \sin^2(3k/2) + \mu_0$  である。

仮定  $k \in I_2 = (2\pi/3, 4\pi/5]$  より、 $3k \in (2\pi, 12\pi/5]$  が従う。第一ブリルアンゾーンを  $(-\pi, \pi]$  とすると、波数  $3k$  は  $k' = 3k - 2\pi \in (0, 2\pi/5] \subset I_1$  と同一視される。定理 4.1 により、波数  $\pm k'$  のモードで張られる不変部分空間  $\mathcal{S}_{1,k'}$  が存在する。 $\mathcal{S}_{1,k'}$  上の運動方程式は、 $k = k'$  とした (16) 式とその複素共役で与えられる。一方、方程式 (39)-(42) には  $U_k(t) = U_{-k}(t) = 0$  を満たす解が存在し、それらの解を記述する方程式は  $\mathcal{S}_{1,k'}$  上の運動方程式に一致する。このことは、 $\mathcal{S}_{1,k'} \subset \mathcal{S}_{2,k}$  を示している。

方程式 (39)-(42) において、制約条件  $U_k = U_{-k} = x \in \mathbb{R}$  と  $U_{3k} = U_{-3k} = y \in \mathbb{R}$  を課すと、次の簡約化された方程式系が得られる。

$$\ddot{x} = -\omega_k^2 x - 6\pi k x^3 - 6\pi(3k - 2\pi) (x + 2y) xy \quad (43)$$

$$\ddot{y} = -\omega_{3k}^2 y - 2\pi(3k - 2\pi) (x^3 + 6x^2 y + 3y^3) \quad (44)$$

なお、上述の制約条件は、定在波解を仮定することに相当する。この方程式系は、2 自由度ハミルトン力学系と見做す事ができる。位相空間内の断面  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$  を  $y = 0$  で定義する。図 5(a) と 5(b) は、それぞれ、 $k = 0.67\pi$  と  $0.8\pi$  に対する  $\Sigma$  上のポアンカレ断面図を示している。ただし、 $\omega_k = \omega_{3k} = 0$  ( $\mu_1 = \mu_0 = 0$ )、2 自由度系のエネルギーを 1 とし、 $\dot{x} > 0$  の断面図を求めた。図 5(a) では、ほぼ全ての領域が KAM トーラスで覆われており、明確なカオスの領域は観測されない。しかしながら、図 5(b) は、KAM トーラスとカオスの領域の共存を明確に示している。この数値的結果は、 $\mathcal{S}_{2,k}$  上の簡約力学系 (43), (44) の非可積分性を示している。

## 謝辞

この研究は科学研究費補助金 (No. 19K03654, No. 19K120003) の助成を受けています。

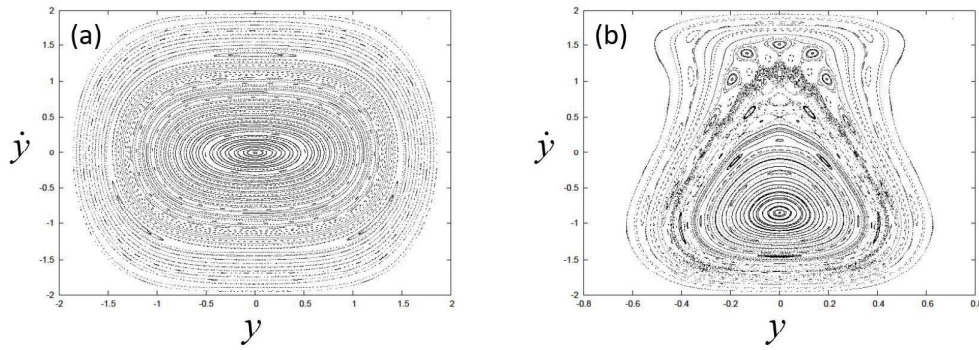


図 1: 簡約力学系 (43), (44) のポアンカレ断面:  $\omega_k = \omega_{3k} = 0$ , (a)  $k = 0.67\pi$ , (b)  $k = 0.8\pi$ .

## 参考文献

- [1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, "Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states," *Phys. Rev. Lett.*, vol.15, pp.240–243, 1965.
- [2] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," *Phys. Rev. Lett.*, vol.61, pp.970–973, 1988.
- [3] K. Yoshimura, Y. Doi, and M. Kimura, "Localized modes in nonlinear discrete systems," in M. Ohtsu and T. Yatsui (eds.) *Progress in Nanophotonics 3* (New York: Springer-Verlag, 2014).
- [4] E. Fermi, J. R. Pasta, and S. Ulam, *Los Alamos Scientific Laboratory Report*, no.LA-1940, 1955 (unpublished).
- [5] S. Lepri, R. Livi, and A. Politi, "Thermal conduction in classical low-dimensional lattices," *Phys. Rep.*, vol.377, pp.1–80, 2003.
- [6] Y. A. Kosevich, "Nonlinear sinusoidal waves and their superposition in anharmonic lattices," *Phys. Rev. Lett.*, vol.71, pp.2058–2061, 1993.
- [7] P. Poggi and S. Ruffo, "Exact solutions in the FPU oscillator chain," *Physica D*, vol.103, pp.251–272, 1997.
- [8] D. Bagchi, "Thermal transport in the Fermi-Pasta-Ulam model with long-range interactions," *Phys. Rev. E*, vol.95, 032102, 2017.
- [9] S. Iubini, P. Di Cintio, S. Lepri, R. Livi, and L. Casetti, "Heat transport in oscillator chains with long-range interactions coupled to thermal reservoirs," *Phys. Rev. E*, vol.97, 032102, 2018.
- [10] 吉村 和之, 土井 祐介, "非線形格子の局在モードと伝播," *信学技報*, vol.118, no.519, CCS2018-49, pp.15–20, 2019.