

高速加振系における変調不安定性

愛媛大学理学部 飯塚 剛

Takeshi Iizuka

Faculty of Science, Ehime University

1 序文

高速加振によって、新たな安定状態が生じる現象はダイナミック安定化として知られている [1]。代表的な例は支点を上下に振動させた振り子が、倒立状態で安定になる現象で、これはカピッツアの振り子として知られている [2]。安定化を起こすためには加振の振幅をある程度大きくする必要があることがダイナミック安定化の理論からわかる。ところが、この振幅が大きすぎると安定化が破綻 (ブレイク) し、場合によってはカオスの運動を起こすことが分かっている [3]。

本論文はダイナミック安定化のブレイキングが起こる原因が変調不安定にあることを、数値的及び解析的に調べた。まず、1 質点の簡単な高速加振系を取り上げ、ダイナミック安定化の理論を適用して有効ポテンシャルを求める。加振の振幅が小さい範囲では理論の予測通りに安定性の閾値が決まるが、ある程度大きくなるとブレイクすることを数値的に示す。次に安定化の破綻の起こる原因を、ダイナミクスを変調として考えることにより解析を行った。本論文の後半では、波動系に対して高速加振を行ったときの波動の不安定化について調べる。最終節では本論文のまとめを行う。

2 高速加振を受けた質点

1次元の自由質点に対して高速加振を与えた系を考える。位置を $X(t)$ とすると、運動方程式は

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \varepsilon^{-1} f(X) \cos \varepsilon^{-1} t, \quad (1)$$

で与えられる。ただし $\varepsilon \ll 1$ であり $f(X)$ は任意の関数とする。右辺が高速加振力である。ここでダイナミック安定化の理論に従って「高速時間」を表す τ を $\tau = \varepsilon^{-1} t$ で定義して次の様な摂動展開を導入する。

$$X(t) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t, \tau) + \varepsilon^2 X_2(t, \tau) + \dots \quad (2)$$

$X_0(\tau)$ は「高速時間」に依存しない「ゆっくり」と変化する運動の主な成分を示す。第 2 項以下の X_1, X_2, \dots は高速振動を含む補正成分であり、以下のように時間平均が 0 であるとする。

$$\langle X_1 \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi} X_1(t, \tau') d\tau' = 0, \quad \langle X_2 \rangle = 0, \dots \quad (3)$$

これは X_1, X_2, \dots には「DC成分がない」ことに相当する。このとき $f(X) = f(X_0) + \varepsilon f'(X_0)X_1 + \dots$ となることに注意して (2) を運動方程式 (1) へ代入する。 $O(\varepsilon^{-1})$ のオーダーからは

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau^2} = f(X_0) \cos \tau, \quad \therefore X_1 = -f(X_0) \cos \tau, \quad (4)$$

を得る。 X_1 には DC 成分が含まれないので、2 回の積分する際発生する定数はいずれも 0 とした。 $O(\varepsilon^0)$ のオーダーからは

$$\frac{d^2 X_0}{dt^2} + 2 \frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} = f'(X_0) X_1 \cos \tau, \quad (5)$$

がわかる。(4) より X_1 を消去して

$$\frac{d^2 X_0}{dt^2} + 2 \frac{dX_0}{dt} f'(X_0) \sin \tau + \frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} = -f'(X_0) f(X_0) \frac{\cos 2\tau + 1}{2}, \quad (6)$$

を得る。上式について、先に述べた時間平均が 0 となる「AC成分」と、0 にならない「DC成分」に分離して考える。AC成分は $X_2, \sin \tau, \cos 2\tau$ を含む項であり、

$$2 \frac{dX_0}{dt} f'(X_0) \sin \tau + \frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{2} f'(X_0) f(X_0) \cos 2\tau, \quad (7)$$

となる。直ちに積分が可能で X_1 同様、積分定数を 0 とすると

$$X_2 = 2 \frac{dX_0}{dt} f'(X_0) \sin \tau + \frac{1}{8} f'(X_0) f(X_0) \cos 2\tau, \quad (8)$$

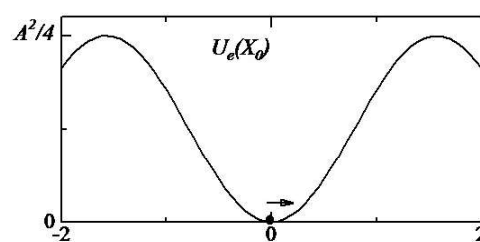
を得る。残りの DC 成分は

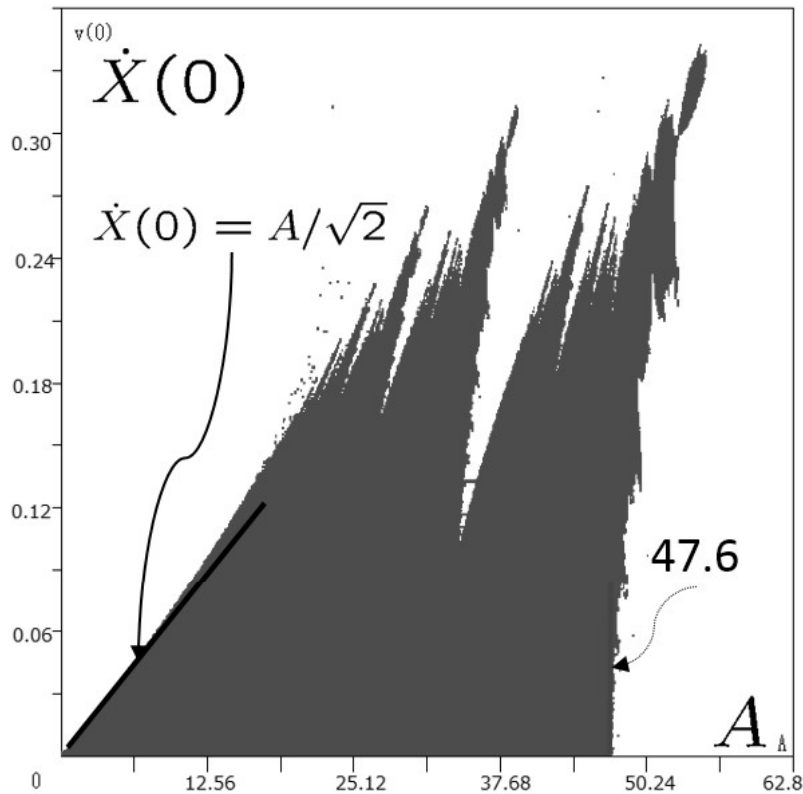
$$\frac{d^2 X_0}{dt^2} = -\frac{1}{2} f'(X_0) f(X_0) = -\frac{d}{dX_0} \left\{ \frac{(f(X_0))^2}{4} \right\}, \quad (9)$$

である。これが系の運動を決定する。 $\frac{(f(X_0))^2}{4}$ は高速加振で生じた、有効ポテンシャル $U_e(X_0)$ を示している。本研究では $f(X) = A \sin X$ (A は定数) とした。このとき有効ポテンシャルは $A \sin^2 X_0 / 4$ であり、図のようになる。ここで初期条件として $X_0(0) = 0$ すると、初速 $\dot{X}_0(0)$ を変えたときポテンシャルの山を越えられない、つまり原点の回りに束縛される条件は

$$\frac{\dot{X}_0^2(0)}{2} < \frac{A^2}{4}, \quad \therefore |\dot{X}_0(0)| < \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

となる。これを踏まえて元の方程式 (1) の数値シミュレーションを行った。ただし $f(X) = A \sin X$ であり、 $\varepsilon = 0.01, X(0) = 0$ とし、様々な初速 $\dot{X}(0)$ と加振振幅 A を取り入れ、 $X(t)$ が原点回りに束縛されるか否かを判定した。





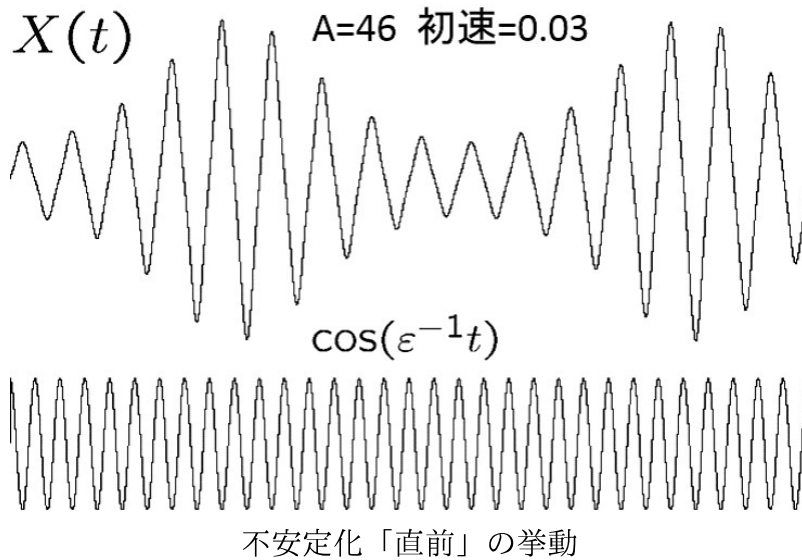
図の横軸は加振振幅 A を示し、縦軸が初速 $\dot{X}(0)$ である。灰色部が束縛される (安定) 領域で白色部が束縛されない (不安定) 領域である。 A が小さい領域ではダイナミック安定化理論の予測の通り、 $\dot{X}(0) < A/\sqrt{2}$ が安定化される領域となっていることがわかる。ただし条件の X_0 を X に読み替えている。初速が大きい領域では、境界が複雑になっており、もはやダイナミック安定化の理論が適用できないことがわかる。また、初速が小さい領域でも、振幅 A が約 47.6 を超えると、突如として安定化が破綻する。次節ではこの破綻について解析する。

3 変調不安定性解析

前節の図から、運動方程式

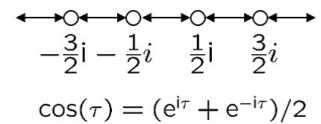
$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \varepsilon^{-1} A \sin(X) \cos \varepsilon^{-1} t, \quad \varepsilon = 0.01, \quad X(0) = 0, \quad (11)$$

に対し、初速 $\dot{X}(0)$ が小さい (およそ 0.1 以下) 範囲で、 A が約 47.6 を超えると原点付近での束縛が破綻して、不安定化が起こることをみた。破綻する原因は何であろうか? 47.6 という値はどこから来るのか? 本節ではこの点について、変調不安定性解析の立場で考える。 $\dot{X}(0) = 0.03$ として、破綻する「直前」である $A = 46$ のダイナミクスを示したのが次頁の図である。下のグラフは加振の振動 $\cos \tau = \cos \varepsilon^{-1} t$ を示しており、振動の 32 周期分が描画してある。一方、上の $X(t)$ は (搬送振動) \times (包絡変調) という形に見える。搬送振動は 16 周期分となっており、これは加振振動に 2 倍の周期となっている。つまり搬送振動 $\sim \exp(i\tau/2)$ とできる。そこで $X(t)$ を



$$X(t) = a(t)e^{\frac{i}{2}\tau} + a^*(t)e^{-\frac{i}{2}\tau} + \varepsilon b(t)e^{\frac{3i}{2}\tau} + \varepsilon b^*(t)e^{-\frac{3i}{2}\tau}, \quad (12)$$

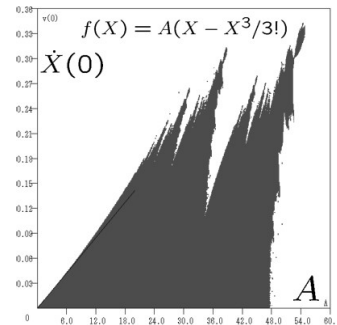
と展開する。3/2倍周期波 $e^{\pm\frac{3i}{2}\tau}$ は搬送振動と加振振動 $\cos\tau = (e^{i\tau} + e^{-i\tau})/2$ との相互作用から生じた補正である(右図)。これを方程式(11)へ代入するのだが、その前に(1)式の $f(X)$ を $A\sin X$ でなく、 X の3次まで考慮した $f(X) = A(X - X^3/3!)$ で同様の解析を行ったのが右下の図である。



先に示した $f(X) = A\sin X$ の図とほとんど変わらないことがわかる。安定性の破綻の閾値 $A = 47.6$ もほぼ同一である。つまり変調解析を行う際、弱非線形解析でも十分であることが示唆される。そこで(12)を

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \varepsilon^{-1}A \left(X - \frac{X^3}{3!} \right) \cos \varepsilon^{-1}t, \quad (13)$$

へ代入して摂動解析を行う。 $e^{i\tau/2}$ の係数を比較すると $O(1)$ のオーダーまでは



$$\ddot{a} + i\varepsilon^{-1}\dot{a} = \frac{\varepsilon^{-2}a}{4} + \frac{\varepsilon^{-1}A}{2}(a^* + \varepsilon b) - \frac{\varepsilon^{-1}A}{12}(a^3 + 3|a|^2a^* + 3\varepsilon a^2b^*), \quad (14)$$

となる。 $e^{3i\tau/2}$ の係数を比較すると $O(\varepsilon^{-1})$ のオーダーまでは

$$0 = \frac{9}{4}\varepsilon^{-1}b + \frac{\varepsilon^{-1}A}{2}a - \frac{\varepsilon^{-1}A}{4}A|a|^2a, \quad \therefore b = \frac{|a|^2 - 2}{9}aA, \quad (15)$$

を得る。これらより b を消去することにより

$$\ddot{a} + i\varepsilon^{-1}\dot{a} = \left(\frac{\varepsilon^{-2}}{4} - \frac{A^2}{9} \right) a + \frac{\varepsilon^{-1}A}{2}a^* - \frac{\varepsilon^{-1}A}{12}(a^3 + 3|a|^2a^*) + \frac{A^2}{36}(4 - |a|^2)|a|^2a, \quad (16)$$

となる。次に a の実部、虚部をそれぞれ x, y として、 $a = x + iy$ とする。(16) の線形部分のみを考慮して代入すると

$$\ddot{x} = +\dot{y} + \left(\frac{\varepsilon^{-2}}{4} + \frac{\varepsilon^{-1}A}{2} - \frac{A^2}{9} \right) x, \quad (17)$$

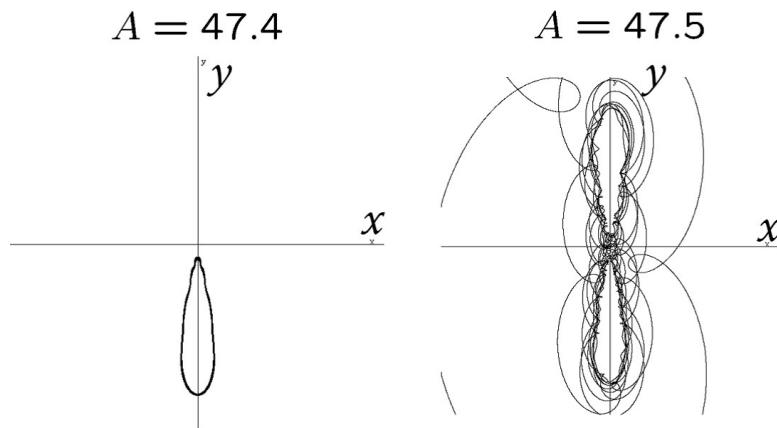
$$\ddot{y} = -\dot{x} + \left(\frac{\varepsilon^{-2}}{4} - \frac{\varepsilon^{-1}A}{2} - \frac{A^2}{9} \right) y, \quad (18)$$

となる。線形安定性を調べるために $x = x_0 \cos \Omega t$, $y = y_0 \sin \Omega t$ とする。このとき Ω が実数である条件は $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{(\varepsilon A)^2}{9} > 0$ であるので、

$$\varepsilon A < \varepsilon A^* = \frac{-9 + \sqrt{117}}{4} = 0.45416, \quad \therefore A^* = 45.416, \quad (19)$$

となり、数値計算で得た $A^* \sim 47.6$ と概ね一致している。また $f(X) = AX$ したときの数値計算で得た、閾値 $A^* = 45.4023$ とは非常に良い一致が得られている。つまり、線形の範囲では「倍周期波を搬送振動とする変調不安定性」によって、安定性の破綻が起きていることがわかった。

次に非線形解析を行う。(16) は解析的に計算するのは困難なので $a = x + iy$ として、数値解析を行った。 x, y の軌道を示したのが下の図である。



X 初速はの初速が0になるように初期条件を決めており、2つの $A(47.4, 47.5)$ について示してある。 A が47.4までは、周期的な運動を示しているが、47.5以上になると不安定な軌道を示すことが数値的にわかった。つまり変調不安定性解析からは $A = 47.4 \sim 47.5$ が閾値となっていることがわかる。これは数値計算による値47.6とよく一致している。以上まとめると安定性が破綻する前は、 $X(t)$ は加振振動 $e^{i\tau}$ の倍周期波 $e^{i\tau/2}$ を搬送振動の変調となっていて、加振振幅が閾値を越えると変調不安定性が起こる。これが安定性の破綻生じさせたのである。

4 高速加振された波動系

ダイナミック安定化は質点の運動だけでなく、波動系や量子系に対しても適用されることが知られてきている。プラズマ系におけるピンチの安定化 [4]、レーザーによる量

子粒子のトラッピング [5]、非エルミートポテンシャルにおけるダイナミック安定化 [6]、結合振動子系 [7]、ボース・アインシュタイン凝縮系 [8] などがある例である。本研究では問題を極力シンプルにするために、単純な波動系に対して加振を行う。モデル方程式として

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \varepsilon^{-1} f(X) \cos \varepsilon^{-1} t, \quad (20)$$

を考える。左辺が波動の部分を表しており、右辺が空間 x に依存しない「一様な」加振を示している。ダイナミック安定化の理論を適用し、 $f(X) = A \sin(X)$ とすると (1) に対する解析と同様に有効方程式

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} f'(X_0) f(X_0) = -\frac{A^2}{4} \sin(2X_0), \quad (21)$$

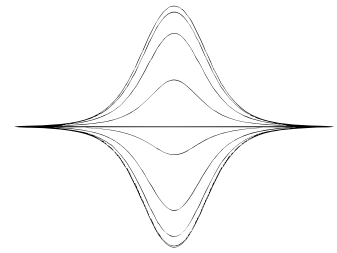
を得る。これはサインゴールドン方程式であり、可積分系として様々な解を有する。ここでは特にブリザー解

$$X_0 = 2 \arctan \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \sin(A\omega t / \sqrt{2})}{\omega \cosh(A\sqrt{1 - \omega^2} x / \sqrt{2})} \quad (22)$$

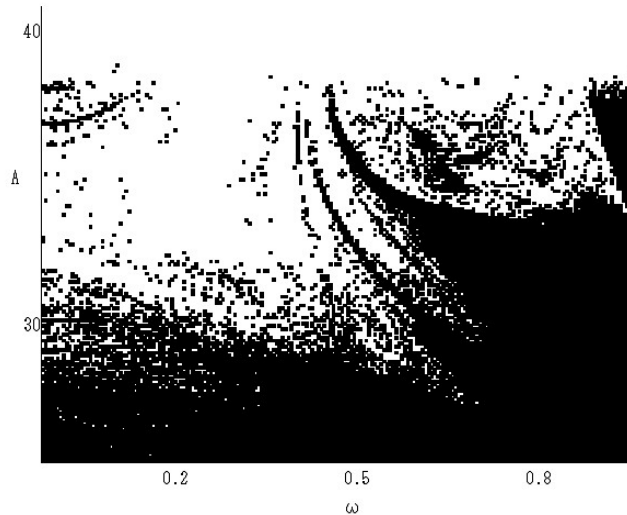
を取り上げる。 ω は $0 < \omega < 1$ をみたすパラメーターである。これより初期条件を

$$X(x, 0) \simeq X_0(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial X(x, 0)}{\partial t} \simeq \frac{\partial X_0(x, 0)}{\partial t} = \frac{A\sqrt{2(1 - \omega^2)}}{\cosh(A\sqrt{(1 - \omega^2)/2} x)}, \quad (23)$$

と定めることができる。この初期条件を用いて、 $\varepsilon = 0.01$ として加振波動方程式 (20) の数値シミュレーションを行った。右図はブリザーの周期を $T = a\sqrt{2}\pi/(A\omega)$ として、 $T/4 < t < 3T/4$ に対するスナップショットである。ただし $A = 1, \omega = 0.5$ とした。この振動は数 10 周期以上にわたって安定的に存在した。ブリザーはサインゴールドン方程式に対しては常に安定的な解となっているが、もとの加振方程式 (1) に対しては必ずしも安定ではない。特に $\omega = 0.5$ では加振振幅 A が 30 程度になるとブリザーが分散消滅したり、発散してしまうことがある。次頁の図は、パラメーター A, ω の様々な値に対して、ブリザーが発散して不安定になる領域を白色で示している。一方黒色はブリザーが安定的に存続するか、消滅するか、分岐するかの領域である。概ね加振振幅が大きくなるとブリザーが不安定化するが、明らかな相分離とはなっていない。境界が複雑になっておりこれは「不安定性」の原因が複雑な分岐を通じたカオス現象によるものであると考えられる。

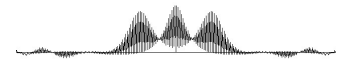


$A = 1, \omega = 0.5$ ブリザー



白... ブリザーが不安定化 (発散) , 黒... ブリザーが安定 or 分裂 or 消滅

例えば $\omega = 0.5, A = 26.5$ は「境界域」の中にあるが、初期のブリザーさざ波を放出したのちに、右図のように3つに分岐したブリザーが安定的に残るという興味深い現象を見受けられた。ただし、図のスケールは前頁の安定ブリザーの図に比べて縦軸10倍横軸3倍にズームしたものである。このような「分岐したブリザー」がどのようなメカニズムで生じるか調べるのは今後の課題としたい。



$\omega = 0.5, A = 26.5$
ブリザーの分岐

5 まとめと課題

本論文では、加振振幅が大きくなり過ぎるとダイナミック安定化が破綻すること数値的に示した。次に、破綻するパラメーター領域の近くでは運動が加振振動の2倍周期波の変調であることを見出した。さらに、ダイナミック安定化の破綻がこの変調不安定性にあることが、線形、及び弱非線形解析によりわかった。また、波動系に対するダイナミック安定化をブリザーを通じて調べた。「加振振幅が大きいと安定化が破綻する」という単純な結果ではなく、不安定化に達する前にブリザーの消滅、分岐などが起こることがわかった。これらがどのようなメカニズムで起こるかの解析は今後の課題である。

参考文献

- [1] A. Stephenson, 'On induced stability,' Philosophical Magazine, vol. 17, (1909) 765.
- [2] P. L. Kapitza, 'Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension,' Journal of Experimental and Theoretical Physics, vol. 21, pp. 588-597, 1951.
- [3] H.W.Broer et al., J.Dynamics and Diff. Equations, Vol.16, No 4,(2004)897.
- [4] S.M Osovets and V.I. Sinitsyn, SOVIET PHYSICS JETP Vol. 21 No4, (1965)717.
- [5] I.Gilary et al. J.Phys.A, Vol.36 (2003)L409.
- [6] S.Longhi, arXiv:1706.09129 (2017).
- [7] M.Bhadra, arXiv:1803.01643 (2018).
- [8] J.Martin et al. Phys.Rev.A 97,(2018) 023607.