

# カスプ辺と曲線折りの異性体

梅原雅顕 (東京工業大学・情報理工学院)

Masaaki Umehara

Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology

## 概要

本稿では、筆者の最近の本田氏 (横浜国大), 直川氏 (広島工業大), 佐治氏 (神戸大), 山田氏 (東工大) との一連の共同研究 [5], [6], [7] および [8] の解説をする。

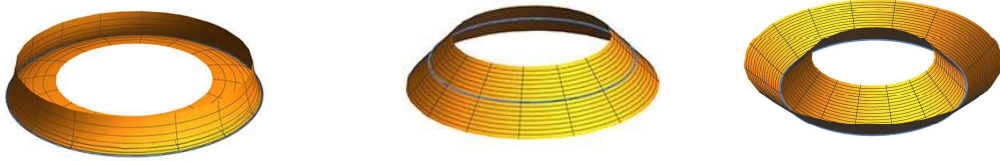


図 1. 円に沿うカスプ辺, 可展面, 曲線折り

$C$  を 3次元 Euclid 空間  $\mathbf{R}^3$  に埋め込まれた (長さ有限の) 曲線弧とする. このとき,  $C$  を丁度, 特異点集合とし, そこにカスプ辺をもつ帯状の曲面を「 $C$  に沿うカスプ辺」とよぶ. 図 1(左) は円に沿うカスプ辺の例である. この例は回転対称であるが, 本稿では主に,  $C$  は対称性をもたない (つまり  $\mathbf{R}^3$  の等長変換  $T$  で  $T(C) = C$  を満たすものは恒等写像に限る) 場合を扱う.

2次元多様体から  $\mathbf{R}^3$  への  $C^\infty$ -写像  $f$  が与えられたとき, この写像による  $\mathbf{R}^3$  の標準的な内積の  $f$  による引き戻しを第一基本形式という. 本稿では, 実解析的なカテゴリで, 同じ第一基本形式をもつが合同でない  $C$  に沿うカスプ辺が, 一般に 4個存在する, という筆者等の最近の結果を紹介する. この 4個のうち 1個を与えたとき, 残りの 3個を, 与えられたカスプ辺の「異性体」とよぶ.

次に, 「折り紙」についてであるが,  $C$  を丁度, 折り目 (crease) にもつ曲線折り紙として得られる帯状の曲面を「 $C$  に沿う曲線折り」とよぶ. 図 1(右) は円に沿う曲線折りの例である. 折り紙についても,

- 「 $C$  に沿う曲線折り」で, 紙に展開したとき, 「折り目に相当する平面曲線 (crease pattern) が同じになるもの」が一般に 4個存在する,

という, カスプ辺に類似の結果を紹介する. この 4個のうち 1個を与えたとき, 残りの 3個を, 与えられた曲線折りの「異性体」とよぶ. 曲線折りについては, 1個の異性体の存在は既知であったが, 残り 2つの異性体の存在は, 筆者等の研究で初めて明らかになったことである.

本稿では, まず, 第 1節で平面曲線として一般化されたカスプの「半弧長パラメータ」について説明したあと, 第 2節でカスプ辺の福井氏の表現公式を紹介し, それがカスプ辺の第一基本形式の性質を調べるのに大変有用であることを説明する. 次に, 第 3節において, カスプ辺の第一基本形式を特徴づける Kossowski 計量を導入し, 基本事項を説明する. 第 4節では, カスプ辺の異性体について説明し, 与えられた実解析的なカスプ辺には, 一般に 3個の異性体が存在することを示す. また空間曲線  $C$  が閉曲線の場合についても言及する. この場合には一般に, カスプ辺には無限個の異性体が存在する. 第 5節では, 折り紙の「曲線折り」を定義する準備として可展面について解説し, 最後に第 6節において, 「カスプ辺の異性体に関する結果」の「曲線折り」についての類似結果

を紹介する．特に「曲線折り」においても  $C$  が閉曲線の場合には一般に無限個の異性体が存在する．

### 1. 一般化されたカusp辺と正規化された半弧長パラメータ

本稿では  $C^r$ -級という用語で  $r = \infty$  のときは「無限回微分可能性」を表し、 $r = \omega$  のときは「実解析性」を表すものとする．

次節で、カusp辺の福井公式について説明するために、本節ではまず、平面曲線としてのカuspの「正規化された半弧長パラメータ」について説明する． $t = 0$  を含むある開区間で定義された  $C^r$ -級の平面曲線  $\gamma(t)$  が  $t = 0$  に一般化されたカuspをもつとは、 $\gamma'(0) = \mathbf{0}$  かつ  $\gamma''(0) \neq \mathbf{0}$  を満たすときを云う．ただしプライムは  $t$  に関する微分を表す．(この状況で  $\det(\gamma''(0), \gamma'''(0))$  が消えないことと、 $t = 0$  がカuspであることが同値になる．)

この場合、 $t = 0$  は特異点なので、そこを基点とする弧長

$$s(t) := \int_0^t |\gamma'(u)| du$$

は、曲線の  $C^r$ -級レベルでの助変数表示にとることはできないが、その絶対値の平方根に  $t$  の符号をつけた

$$\text{sgn}(t)\sqrt{|s(t)|}$$

は  $t$  について  $C^r$ -級で、かつ  $t = 0$  における微分が消えないため、曲線の新しい助変数に採用することができる．論文 [17] では、これを半弧長パラメータ (half-arclength parameter) とよんだ．福井氏の論文 [3] では諸公式の係数の簡略化のため、これを定数倍で補正した

$$v := \text{sgn}(t)\sqrt{2|s(t)|}$$

を一般化されたカuspの標準的なパラメータとして採用した．本稿では、この  $v$  を、曲線の正規化された半弧長パラメータ (normalized half-arclength parameter) とよぶことにする．

**注意 1.1.**  $C^r$ -級の関数  $m : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}$  ( $\epsilon > 0$ ) が与えられていたとすると

$$(1.1) \quad \gamma(v) := \int_0^v (u \cos \theta(u), u \sin \theta(u)) du, \quad \left( \theta(v) := \int_0^v m(u) du \right)$$

なる表示 (芝-梅原公式 [17]) で「一般化されたカusp辺」を表現できる．このとき

$$\mathbf{n}(v) := (-\sin \theta(v), \cos \theta(v))$$

によって単位法線ベクトル場が与えられ、 $v$  は自動的に正規化された半弧長パラメータになる．さらに  $m(0) \neq 0$  であることと  $\gamma$  が  $v = 0$  にカuspをもつことは同値である．

以上の準備のもと、一般化されたカuspについて次のことが示せる．

**補題 1.2** (cf. [5, Appendix]).  $\gamma(v)$  を  $v = 0$  に一般化されたカuspをもつ平面曲線で、 $v$  は正規化された半弧長パラメータとすると、 $\mathbf{R}^3$  の向きを保つ等長変換  $T$  と定数  $\mu_j (\in \mathbf{R})$  ( $j = 0, 1, 2$ ) が存在して以下の展開式が成り立つ．

$$(1.2) \quad T \circ \gamma(v) = \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_0^2 v^4}{8} - \frac{\mu_0 \mu_1 v^5}{10}, \frac{\mu_0 v^3}{3} + \frac{\mu_1 v^4}{8} + \frac{(-\mu_0^3 + 2\mu_2)v^5}{30} \right) + o(v^5).$$

ここで  $o(v^5)$  は  $v^5$  より次数が高い項を表す、また  $T$  は  $\mathbf{R}^2$  のある向きを保つ等長変換である．

特に  $\mu_0$  をカusp的曲率 (cuspidal curvature) とよぶ．これを用いて、カusp辺と  $5/2$ -カuspの判定条件に代入すれば以下のことを示せる．

命題 1.3. (cf. [5]) 上の補題 1.2 の状況で次が成り立つ.

- (1)  $v = 0$  が, カスプであることと  $\mu_0 \neq 0$  は同値,
- (2)  $v = 0$  が, 5/2-カスプであることと  $\mu_0 = 0$  かつ  $\mu_2 \neq 0$  であることは同値である.

主張 (1) は, よく知られたカスプの判定条件の言い換えである. 本田-佐治 [11, Prop 2.2] では 5/2 カスプ辺に関する第二カスプ的曲率 (secondary cuspidal curvature) およびバイアス (bias) とよばれる不変量が定義されているが,  $\mu_1$  と  $\mu_2$  は, それぞれ第二カスプ的曲率とバイアスの定数倍となる. 係数  $\mu_1$  が 5/2-カスプの判定に影響を与えていないことは注目に値する.

## 2. 一般化されたカスプ辺の福井公式

$l$  を正の数とし,  $J$  は  $\mathbf{R}$  の原点を含む有界閉区間  $[-l/2, l/2]$  か, 1次元トーラス  $\mathbf{R}/l\mathbf{Z}$  とする. また,  $0$  で  $\mathbf{R}$  の原点に対応する  $\mathbf{R}/l\mathbf{Z}$  の点を表す.  $c: J \rightarrow \mathbf{R}^3$  を自己交叉のない正則曲線とし

$$C := c(J)$$

とおく.  $J \times \mathbf{R}$  において  $J \times \{0\}$  を含む開集合  $U$  で定義された  $C^r$ -写像  $f(u, v)$  の制限

$$u \mapsto f(u, 0)$$

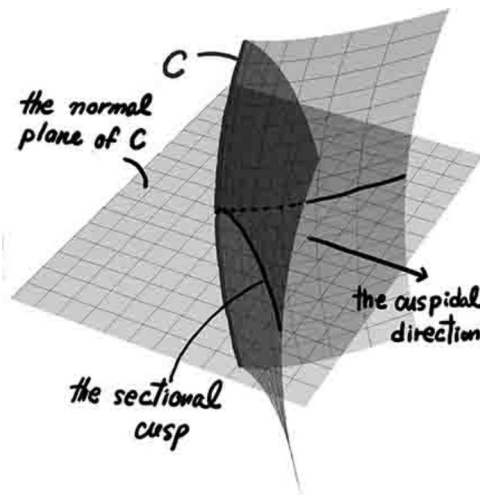
が, 曲線  $C$  の正則曲線としての助変数表示を与えているとき,  $f$  を  $C$  に沿う帯という. さらに  $f$  が ( $C$  に沿う)  $C^r$ -級の一般化されたカスプ辺であるとは,  $J \times \mathbf{R}$  における  $J \times \{0\}$  を含む開集合  $V (\subset U)$  から  $\mathbf{R}^2$  への中への  $C^r$ -級の微分同相写像と,  $f(J \times \{0\})$  から  $\mathbf{R}^3$  への中へ  $C^r$ -級の微分同相写像  $\Phi$  が存在して

$$\Phi \circ f(u, v) = f_0 \circ \varphi, \quad f_0(u, v) := (u, v^2, \alpha(u, v)v^3)$$

という形に書けるときをいう. 但し  $\alpha(u, v)$  は  $\varphi(V) (\subset \mathbf{R}^2)$  上で定義された  $C^r$ -関数とする.

一方,  $W$  を  $\mathbf{R}^2$  の領域とし, 写像  $f: W \rightarrow \mathbf{R}^3$  が  $C^r$ -級のフロントルとは,  $f$  が  $U$  上で (特異点までこめて) なめらかな単位法線ベクトル場を許容するときを云う. 以下のことが示せる.

命題 2.1 ([5, Remark 3.2]). 一般化されたカスプ辺は, 特異点の近傍でフロントルになる.



ここで, 一般化されたカスプ辺の表現公式として有用な「福井公式」を紹介しよう. 空間曲線  $c$  の曲率関数は零点を持たないとし, その単位接線ベクトルを  $e(u)$ , 単位主法線

ベクトルを  $\mathbf{n}(u)$ , 単位従法線ベクトルを  $\mathbf{b}(u)$  とすると,  $\theta : J \rightarrow \mathbf{R}$  なる  $C^r$ -関数を用いて, 充分  $|v|$  が小さいときに

$$(2.1) \quad f(u, v) := \mathbf{c}(u) + (A(u, v), B(u, v)) \begin{pmatrix} \cos \theta(u) & -\sin \theta(u) \\ \sin \theta(u) & \cos \theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}(u) \\ \mathbf{b}(u) \end{pmatrix} \quad (u \in J)$$

によって写像を定める. ただし  $A(u, v), B(u, v)$  は 2 変数の  $C^r$ -関数で, 各  $u \in J$  に対して

$$\begin{aligned} A(u, 0) = A_v(u, 0) = 0, \quad A_{vv}(u, 0) \neq 0, \\ B(u, 0) = B_v(u, 0) = B_{vv}(u, 0) = 0 \end{aligned}$$

を満たすとする. すると  $f$  は「 $C$  に沿う一般化されたカस्प辺」となる. さらに

$$B_{vvv}(u, 0) \neq 0$$

なら  $f$  は, 「 $C$  に沿うカस्प辺」(つまり  $C$  上の点はすべてカस्प辺に対応) となる. この表示において,  $\theta(u)$  を  $\mathbf{c}(u)$  におけるカस्प角 (*cuspidal angle*) とよぶ. そして

$$\cos \theta(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta(u) \mathbf{b}(u)$$

をカस्प方向 (*cuspidal direction*) といい,  $C$  上の各点において曲線に直交する平面を法平面 (*normal plane*) という.  $f$  の像を,  $\mathbf{c}(u)$  における法平面で切った切り口としてできる平面曲線が<sup>3</sup>

$$(2.2) \quad v \mapsto (A(u, v), B(u, v))$$

であり, これを断面カस्प (*sectional cusp*) とよぶ<sup>1</sup>. さらに, 以下の定義を与える.

**定義 2.2.** 上の表示において, もしも

- $u$  は曲線  $u \mapsto f(u, 0)$  の弧長パラメータであり,
- 各  $u \in J$  に対する断面カस्पの表示 (2.2) で  $v$  は正規化された半弧長パラメータ (*normalized half-arc-length parameter*) を与えている

とせよ. このとき, このような助変数表示  $(u, v)$  で与えられた  $f$  を, カस्प辺の芽の ( $f(0, 0)$  を基点とする) 正規形 (*normal form*) とよぶ.

**注意 2.3.** 第 1 節の注意 1.1 により, いま  $m(u, v)$  を 2 変数の関数として

$$(2.3) \quad (A(u, v), B(u, v)) := \int_0^v (t \cos \theta(u, t), t \sin \theta(u, t)) dt, \quad \left( \theta(u, v) := \int_0^v m(u, t) dt \right)$$

によって定まる関数  $A, B$  を (2.1) に代入して得られる「一般化されたカस्प辺」 $f$  は正規形であり, 逆にすべての正規形の「一般化されたカस्प辺」は, この方法で得られる.

以下  $f(u, v)$  を正規形とし,  $\kappa(u)$  を空間曲線  $\mathbf{c}(u) = f(u, 0)$  の曲率関数とするとき

$$(2.4) \quad \kappa_s(u) := \kappa(u) \cos \theta(u), \quad \kappa_\nu(u) := \kappa(u) \sin \theta(u)$$

によって定まる  $J$  上の  $C^r$ -関数は, それぞれ  $f$  の特異曲率 (*singular curvature*, cf. [18]) と 極限法曲率 (*limiting normal curvature*, cf. [5]) に一致する. さらに

$$\kappa_t(u) := \tau(u) - \theta'(u)$$

は **cuspidal torsion** とよばれるカस्प辺の不変量である. 正規形の  $f$  の写像芽は

$$(\theta(u), A(u, v), B(u, v))$$

で決まってしまう. これを **Fukui-data** とよぶ (cf. [5]). 以下の命題により, 「一般化されたカस्प辺」の性質を調べるには正規形に限定してよいことになる.

<sup>1</sup>これは一般化されたカस्पとなる.



**命題 2.4** ([9]).  $C$  に沿う一般化されたカスプ辺は、すべて正規形に右同値である。

特にカスプ辺の場合には、この命題の帰結として、さらに以下のことが成り立つ。

**命題 2.5** ([5], [6]).  $C$  に沿う2つのカスプ辺の芽が互いに右同値であるための必要充分条件は、両者が像同値であることである。

正規形で書いている一般化されたカスプ辺の Gauss 曲率  $K(u, v)$  (特異点集合上では  $K$  が定義されない) について、以下のことが成り立つ。

**命題 2.6** ([3], [5]). 正規形で表されたカスプ辺の帯  $f(u, v)$  の Gauss 曲率は

$$K(u, v) = \frac{K_0(u)}{v} + K_1(u) + K_2(u)v + K_3(u, v)v^2$$

という形に展開できて

$$\begin{aligned} K_0(u) &:= \mu_0\kappa_\nu(u), \quad K_1(u) := -\kappa_s(u)\mu_0(u)^2 - \kappa_t(u)^2 + \kappa_\nu(u)\mu_1(u), \\ K_2(u) &:= -\frac{\kappa_\nu(u)\mu_0(u)^3}{2} + \frac{\kappa_s(u)\kappa_\nu(u)\mu_0(u)}{2} - \frac{3\kappa_s(u)\mu_0(u)\mu_1(u)}{2} \\ &\quad + \kappa_\nu(u)\mu_2(u) - 2\mu_0'(u)\kappa_t(u) + \frac{\mu_0(u)}{2}\kappa_t'(u) \end{aligned}$$

と書ける。ただし

$$\mu_j(u) \quad (j = 0, 1, 2)$$

は、 $u$  を固定するごとに定まる断面カスプ (cf. (2.2)) に対して補題 1.2 によって定まる4つの不変量に一致する。特に  $\kappa_c(u) := 2\mu_0(u)$  は、カスプ的曲率 (関数) という。また  $\kappa_t'(u) := d\kappa_t(u)/du$  である。

**注意 2.7.**  $K_0$  と  $K_1$  の式は福井 [3, Theorem 1.8] で、 $K_2$  については [5] で与えられた。

特に、この命題の帰結として

$$K_0 (= \mu_0\kappa_\nu) = \frac{\kappa_c\kappa_\nu}{2}$$

は、第一基本量だけで決まってしまうことがわかる。これは積曲率とよばれ [14] で導入された。特に、系として以下のことが示される。

**系 2.8** ([12], [3], [11]). 正規形で与えられた「 $C$  に沿う一般化されたカスプ辺」  $f(u, v)$  の極限法曲率  $\kappa_\nu(u)$  が  $u = c$  で零でないとき、以下のことが成り立つ。

- (1)  $f$  が、ある点  $(c, 0)$  にカスプ辺をもつための必要充分条件は、積曲率  $K_0(c)$  が非零となることである、
- (2)  $f$  がある点  $(c, 0)$  にカスプ状交叉帽子をもつための必要充分条件は、 $K_0(c) = 0$  かつ  $dK_0(c)/du \neq 0$  となることである、
- (3)  $f$  が  $5/2$ -カスプ辺となるための必要充分条件は、 $K_0(u) = 0$  かつ  $K_2(c) \neq 0$  を満たすことである。

特にこれらの条件は、 $f$  の第一基本形式だけに依存する。

主張 (1) は論文 [12] で、(2) は福井 [3]、(3) は論文 [11] で与えられた。

(証明) 極限法曲率  $\kappa_\nu$  が零でないので  $K_0(c) \neq 0$  と  $\mu_0(c) \neq 0$  が同値である。すると  $u = c$  の近傍で、曲面はカスプと直線の直積となるので (1) が得られる。(2) については、カスプ状交叉帽子の判定条件 (cf. [2]) と命題 2.6 から直接計算により求まる。(3) を示そう。まず各  $u$  がカスプ辺でないので  $\mu_0(u) = 0$  である。このとき

$$K_2(u) = 2\mu_2(u)\kappa_\nu(u)$$

であり、しかも仮定より  $\kappa_\nu(u) \neq 0$  であるから  $K_2(u) \neq 0$  であることと  $\mu_2(u) \neq 0$  であることが同値となる。すると、各  $u$  における断面カスプは、命題 1.3 により 5/2-カスプとなることがわかる。これは、曲面が直線と 5/2-カスプとの直積であることと同値である。  $\square$

次節では、一般化されたカスプ辺の第一基本形式について解説する。

### 3. Kossowski 計量と一般化されたカスプ辺

いま  $M^2$  を  $C^r$ -級の 2 次元多様体とする。この上に Kossowski [13] によって定義された半正定値計量 (Kossowski 計量) を定義し、その基本事項を説明する。そこで、 $M^2$  上の  $C^r$ -級の半正定値計量  $ds^2$  を 1 つ固定する。与えられた点  $p \in M^2$  が 正則点 (regular point) であるとは、 $ds^2$  が  $p$  で正定値であるときを云い、そうでないときそれを 特異点 (singular point) あるいは半正定値点 (semi-definite point) という。いま、半正定値計量が

$$(3.1) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

という形に書かれていたとせよ。

**定義 3.1.** 計量の特異点  $p \in M^2$  が **K**-許容的 (admissible) であるとは、 $p$  の局所座標近傍  $(U; u, v)$  が存在し、

$$(3.2) \quad F(p) = G(p) = 0, \quad E_v(p) = 2F_u(p), \quad G_u(p) = G_v(p) = 0$$

を満たすときを云う。また、すべての座標近傍内の計量の特異点が

$$(3.3) \quad F = G = 0, \quad E_v = 2F_u, \quad G_u = G_v = 0$$

を満たすような局所座標系を (ここだけの造語であるが) **K**-許容的な座標系とよぶ<sup>2</sup>。

元々の Kossowski 氏の定義は座標不変な形で与えられている。オリジナルの定義、および、上記の定義との同値性については [4, Section 2] を参照せよ。この条件を半正定値計量に課す理由は、以下の命題が成り立つからである。

**命題 3.2.**  $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $C^r$ -写像とせよ。このとき  $f$  の特異点はすべて、第一基本形式の特異点として **K**-許容的となる。

(証明) いま  $p \in M^2$  が  $f$  の特異点であったとせよ。すると  $p$  の座標近傍  $(U; u, v)$  で  $f_v(p) = \mathbf{0}$  を満たすものがとれる。 $p = (0, 0)$  として一般性を失わない。このとき、 $F, G$  の定義により

$$F(p) = f_u(p) \cdot f_v(p) = 0, \quad G(p) = f_v(p) \cdot f_v(p) = 0$$

である。さらに以下の計算により結論が得られる。

$$\begin{aligned} G_u(p) &= (f_v \cdot f_v)_u \Big|_{(u,v)=(0,0)} = 2f_v(p) \cdot f_{uv}(p) = 0, \\ E_v(p) &= (f_u \cdot f_u)_v \Big|_{(u,v)=(0,0)} = 2(f_v \cdot f_u)_u \Big|_{(u,v)=(0,0)} - f_v(p) \cdot f_{uu}(p) = 2F_u(p). \end{aligned}$$

$\square$

次に、フロントルに現れる「性質のよい」特異点 (注意 3.4 参照) を特徴づける概念として「Kossowski 計量」を以下のように定義する。

<sup>2</sup>本稿では詳しく述べないが、計量の各特異点の近傍で **K**-許容的な座標系の存在が示せる。特に、本稿で扱う I 型の特異点 (cf. 定義 3.5) のみをもつような  $ds^2$  については、有界閉区間上で定義された特異曲線の管状近傍としての **K**-許容的な座標系の存在が [5, Lemma 3.5] に書かれている。一般の特異点の近傍における **K**-許容的な座標系の存在については [10] を参照せよ。

**定義 3.3.**  $M^2$  上の与えられた  $C^r$  級の半正定値計量  $ds^2$  が **Kossowski 計量** であるとは、すべての計量の特異点が  $K$ -許容的で、各特異点  $p(\in M^2)$  における (3.2) を満たす  $C^r$  級の座標近傍  $(U; u, v)$  を 1 つとると  $p$  の近傍で定義された  $C^r$ -関数  $\lambda$  が存在して以下の性質を満たすときを云う<sup>3</sup>.

$$(3.4) \quad EG - F^2 = \lambda^2,$$

$$(3.5) \quad (\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0).$$

**注意 3.4.** たとえ波面の第一基本形式であっても、一般には Kossowski 計量とは限らない。[18, Example 1.11] をみよ。

Kossowski は、Kossowski 計量の概念を 2 次元多様体上に定義したが、高次元の多様体上に Kossowski 計量の概念を自然な形で拡張することができる。詳しくは [16] をみよ。

上の定義で定まる関数  $\lambda$  は、正負の不定性を除いて一意である (cf. [10]). そこで  $\lambda$  を符号つき面積密度関数という。この名称の由来は、 $ds^2$  が正定値のときは

$$dA = |\lambda| du \wedge dv$$

が面積要素を与えていることによる。このことを踏まえて、 $(U; u, v)$  を  $K$ -許容的な座標系とするとき、

$$(3.6) \quad d\hat{A} := \lambda du \wedge dv$$

で定まる  $U$  上の  $C^r$ -級の 2 次微分形式を符号つき面積要素という。 $(ds^2$  が多様体  $M^2$  上で定義されている場合には符号つき面積要素は、 $K$ -許容的な座標の取り方によらず、結果的に  $M^2$  上で定義された  $C^r$ -級の 2 次微分形式が定まる。) 定義から Kossowski 計量の特異点集合は

$$\lambda = 0$$

で特徴づけられる。(3.5) より、陰関数定理が適用できて、与えられた計量の特異点  $p$  に対して  $U$  上の正則曲線  $\gamma(t)$  が存在して  $ds^2$  の特異点集合の助変数表示を与える。この曲線を特異曲線 (singular curve) という。(3.5) より、 $ds^2$  の特異点における退化次数は常に 1 であることがわかる。特に  $\gamma$  に沿う  $C^r$ -級のベクトル場  $t \mapsto \eta(t) \in T_{\gamma(t)}U$  が存在して  $df$  の核に属する。これを  $\gamma$  に沿う  $f$  の退化ベクトル場という。

以上の考察により Kossowski 計量の特異点は、常に孤立しないことになる。したがって交叉帽子などの第一基本形式は、Kossowski 計量にはならない。(交叉帽子の第一基本形式を特徴づける「Whitney 計量」という概念がある。これについては [4] を参照せよ。)

**定義 3.5** ([4]). 与えられた Kossowski 計量の特異点  $p \in M^2$  が **I 型** であるとは、その点における退化ベクトルが、特異曲線の接方向と一次独立となることを云う。I 型でない特異点は **II 型** であるという。

以下の命題は、一般化されたカस्प辺の第一基本形式としての Kossowski 計量の特徴づけを与える。

**命題 3.6** ([5]).  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  を (2.1) の形で与えられた一般化されたカस्प辺とすると、その第一基本形式は Kossowski 計量となり、その特異点は、すべて I 型となる。

(証明) 重要な事実で証明も簡単なので、ここに記す。命題 2.1 により、 $f$  の単位法線ベクトル場が存在するが、誘導される Gauss 写像を  $\nu : U \rightarrow S^2$  とする、但し  $S^2$  は原点を中心とする単位球面とする。 $U$  には  $f_u(p) = \mathbf{0}$  となる座標系  $(u, v)$  が入っているとよい。このとき、命題 3.2 よりこの座標系は (3.2) を満たす。特に  $p$  は  $K$ -許容的である。また

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

<sup>3</sup>実際、ここで述べる性質は (3.2) を満たす局所座標の取り方に依存しないことが確かめられる。

とおくと、ベクトル積に関する Lagrange の恒等式より

$$\lambda^2 = \det(f_u, f_v, \nu)^2 = |f_u \times f_v|^2 = |f_u|^2 |f_v|^2 - (f_u \cdot f_v)^2 = EG - F^2$$

となる。さらに一般化されたカスプの定義から、 $u$ -軸が特異点集合で  $f_v(u, 0) = \mathbf{0}$  であつ  $f_u, f_{vv}, \nu$  が  $u$ -軸に沿って一次独立な座標系  $(u, v)$  がとれるので  $\lambda_v(u, 0) \neq 0$  となり  $f$  の第一基本形式が Kossowski 計量であることがわかる。

最後に、 $f(u, v)$  が一般化されたカスプ辺とすると  $u$  軸がカスプ辺であり、 $u \mapsto f(u, v)$  が正則空間曲線であることから特異曲線の接方向  $\partial/\partial u$  は  $f$  の退化方向と一致しないので、特異点はすべて I 型であることがわかる。□

ここでツバメの尾は、II 型の特異点になることを注意しておく。  $p$  を I 型の特異点とすると、そこに積曲率 (product curvature) を定義することができる。詳しい定義は [4] と [14] をみよ。以下の事実が大事である。

**命題 3.7** (cf. [4], [14]). 一般化されたカスプ辺の積曲率は、第一基本形式としての Kossowski 計量に現れる I 型の特異点としての積曲率に一致する。

次に積曲率が零かどうかの便利な判定法を紹介する。Kossowski 計量  $ds^2$  の正則点における Gauss 曲率を  $K$  とすると、以下のことが成り立つ。

**命題 3.8** ([13, 18]).  $ds^2$  の正則点で定まる微分形式  $Kd\hat{A}$  は、 $U$  上の  $C^r$ -級の 2 次微分形式  $\Omega$  に拡張される。ただし、 $d\hat{A}$  は (3.6) で定まる符号付き面積要素である。

このようにして定まる  $U$  上の 2 次の微分形式  $\Omega$  を **Euler 形式** とよぶことにすると、以下のことが成り立つ。

**命題 3.9** (cf. [13, 4, 10]). Euler 形式  $\Omega$  の零点は積曲率の零点に一致する。

この事実は積曲率が零かどうかの判定が簡単であることを意味する。以上を踏まえ、下記の「Kossowski の実現定理」を述べる。

**定理 3.10** (Kossowaki [13]).  $ds^2$  を、実解析的な 2 次元多様体  $M^2$  上の実解析的な Kossowski 計量とし、 $p \in M^2$  において計量の特異点で積曲率は零でないとする、 $p$  のある近傍  $U (\subset M^2)$  で定義された実解析的な波面<sup>4</sup>  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$  が存在して、その第一基本形式は  $ds^2$  に一致する。

この事実に「実解析性」が必要なのは、証明に Cauchy-Kowalevski の定理を使うためである。「積曲率が零でない」という仮定を払拭して上の結果を以下の形に拡張できる。

**定理 3.11** ([10]).  $ds^2$  を、実解析的な 2 次元多様体  $M^2$  上の実解析的な Kossowski 計量とし  $p \in M^2$  は計量の特異点とすると、 $p$  のある近傍  $U (\subset M^2)$  上で定義された実解析的なフロントル  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$  が存在して、その第一基本形式は  $ds^2$  に一致する。もしもさらに  $p$  の積曲率が零でなければ  $f$  は  $p$  の近傍で波面となる。

とくに特異点が I 型のときには、より精密な結果が示せる。それを説明するため I 型の特異点に関して、Kossowski 計量の「特異曲率」の定義を与えよう。いま  $ds^2$  を I 型の特異点だけからなる Kossowski 計量とし、 $u \mapsto \gamma(u)$  を、その特異曲線の 1 つとする。この曲線は局所的には自己交叉がないとしてよく、そうすると  $K$ -許容的な座標近傍  $(U; u, v)$  が存在して、 $u$ -軸上の点  $(u, 0)$  が  $\gamma(u)$  に一致するようにできる。このとき、 $u$ -軸に沿って定まる関数

$$\kappa_s(u) = \frac{2EF_{uv} - EE_{vv} - F_v E_u}{2\lambda_v E^{3/2}} \Big|_{v=0}$$

<sup>4</sup> $f$  はフロントルで、そこで定まる Gauss 写像  $\nu: U \rightarrow S^2$  と対にして定まる写像  $L := (f, \nu): U \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$  がはめ込みとなる時  $f$  は波面 (wave front) という。

は、特異曲線  $\gamma$  上の点の特異曲率とよばれる。ただし  $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$  は、計量から定まる符号付き面積密度関数である。各  $u$  における値  $\kappa_s(u)$  は、積曲率と同様に K-許容的な座標系の取り方とは無関係に定まる計量の特異点の不変量とみなせる。以下のことが成り立つ。

**命題 3.12** ([18]). 一般化された  $C^r$ -級のカスプ辺  $f$  に対して定まる特異曲率の値は、 $f$  の第一基本形式としての Kossowski 計量から誘導される特異曲率に一致する。

以上をふまえて、カスプ辺の異性体に重要な役割を果たす以下の結果を紹介する。 $I$  は  $\mathbf{R}$  の有閉区間とせよ。

**定理 3.13** ([12], [5]).  $ds^2$  を、実解析的な 2 次元多様体  $M^2$  上の実解析的な Kossowski 計量とする。また  $\gamma: I \rightarrow M^2$  は、I 型の特異点だけからなる曲線で、自己交叉を持たず、 $ds^2$  に関して弧長による助変数表示を与えているとせよ。そして  $\kappa_s(t)$  ( $t \in I$ ) を  $\gamma(t)$  における計量の特異曲率とする。一方、 $\mathbf{c}: I \rightarrow \mathbf{R}^3$  を自己交叉を持たない正則な空間曲線で、その曲率関数  $\kappa(t)$  は  $I$  上で

$$(3.7) \quad |\kappa_s(t)| < \kappa(t) \quad (t \in I)$$

を満たしていたとすると、 $\gamma(I)$  を含む開集合  $U_\gamma$  と、そこで定義された  $C^\omega$ -級の一般化されたカスプ辺  $f_\pm: U_\gamma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が存在して以下の性質を満たす。

- (1)  $f_\pm \circ \gamma(t) = \mathbf{c}(t)$ ,
- (2)  $f_\pm$  の第一基本形式は  $U_\gamma$  上で  $ds^2$  に一致する,
- (3)  $f_+$  (resp.  $f_-$ ) の特異曲線  $\gamma(t)$  に沿う極限法曲率は

$$\sqrt{\kappa(t)^2 - \kappa_s(t)^2} \quad (\text{resp. } -\sqrt{\kappa(t)^2 - \kappa_s(t)^2})$$

で与えられる。

- (4)  $f_+$  あるいは  $f_-$  に対して  $ds^2$  の特異点がかスプ辺であるための必要充分条件は、その特異点における (計量の) 積曲率が零でないことである。

さらに、この  $f_\pm$  について以下のような一意性が成り立つ、つまり  $\gamma(I)$  を含む開集合  $V_\gamma$  と、そこで定義された  $C^\omega$ -級の一般化されたカスプ辺  $g: V_\gamma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が存在して、 $g(t, 0) = \mathbf{c}(t)$  を満たし、かつ  $g$  の第一基本形式は  $ds^2$  に一致するならば  $g = f_+$  あるいは  $g = f_-$  が  $U_\gamma \cap V_\gamma$  上で成立する。

論文 [12] では、 $p$  での積曲率が零でないときに、この事実を示したが、論文 [5] では、この仮定なしで上の事実を証明している。

(証明) 実際、 $\gamma(I)$  を含む  $M^2$  の管状近傍に座標  $(u, v)$  を入れて  $u$ -軸が特異曲線にすることができる。さらにその座標は [5, Fact 3.5] を満たすように取り直せる。このようにして論文 [5, Theorem 3.9] を適用すれば、定理 3.13 の主張が得られる。□

定理 3.13 の系として、以下の計量の対称性についての結果が得られる。これは、あとで異性体の合同類の数を調べるときに重要な役割を果たす。

**系 3.14** ([5]).  $ds^2$  を実解析的な 2 次元多様体  $M^2$  上の実解析的な Kossowski 計量で、 $p \in M^2$  は積曲率が零でない I 型の特異点とする。もしも  $p$  の近傍  $U (\subset M^2)$  と微分同相写像  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  が存在して  $\varphi^* ds^2 = ds^2$  かつ  $\varphi(p) = p$  を満たせば、 $\varphi$  は対合であり、恒等写像でなければ  $p$  を通る特異曲線の向きを反転させる。

(証明) いま  $(u, v)$  は  $U$  の座標近傍で  $p$  が原点で  $u$  軸が特異曲線で  $\partial/\partial u$  は  $ds^2$  に関して大きさ 1 のベクトルを与えているとしてよい。定理 3.13 を適用することにより  $p$  の近傍  $V$  と上述のように 2 つの波面  $f_\pm: V \rightarrow \mathbf{R}^3$  が存在して  $p$  はカスプ辺となり、 $f_\pm$  の第一基本形式は  $ds^2$  となる。もしも  $\varphi$  が特異曲線の向きを保存していたとせよ。すると

$$\varphi(u, 0) = (u, 0)$$

を満たす. いま  $g = f_+ \circ \varphi$  とおくと  $g$  と  $f_+$  は同じ第一基本形式をもち, カスパ角も同じなので  $f_+ \circ \varphi = f_+$  となる.  $f_+$  はカスパ辺なので単射であり,  $\varphi$  が恒等写像であることが導かれる.

今度は  $\varphi$  が特異曲線の向きを反転していたとせよ. すると  $\varphi \circ \varphi$  は向きを保つので上の議論より恒等写像となり  $\varphi$  が対合であることがわかる.  $\square$

#### 4. カスパ辺の異性体

前節の結果をふまえて, 本節では, 与えられた一般化されたカスパ辺にまず, 「異性体」の概念を定義しよう.  $J_i$  ( $i = 1, 2$ ) を  $\mathbf{R}$  の有界閉区間か 1 次元トーラスとする. そして  $J_i \times \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2$ ) の中の曲線  $J \times \{0\}$  を含む近傍<sup>5</sup>  $U_i$  上で定義された  $C^\infty$ -写像

$$f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^3$$

は  $J_i$  上に一般化されたカスパ辺をもつとする. まず, 2 つの写像  $f_1$  と  $f_2$  の間の「等長性」を定義する.

**定義 4.1.** 2 つの一般化されたカスパ辺  $f_1, f_2$  が等長的 (isometric) であるとは,  $J_1 \times \mathbf{R}$  における  $J_1 \times \{0\}$  の管状近傍  $V_1 (\subset U_1)$  と  $J_2 \times \mathbf{R}$  における  $J_2 \times \{0\}$  の管状近傍  $V_2 (\subset U_2)$  および微分同相写像  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  が存在して

$$ds_{f_1}^2 = \varphi^* ds_{f_2}^2$$

となることを云う.  $ds_i^2$  は  $f_i$  の第一基本形式とする. もしも  $f_1 = f_2$  で  $\varphi$  が恒等写像でないなら  $f := f_1 = f_2$  の第一基本形式  $ds_f^2$  は対称性をもつといい,  $\varphi$  は  $ds_f^2$  の symmetry とよぶ.

前節の系 3.14 により,  $f$  がカスパ辺の帯で  $J$  が有界閉区間なら  $ds_f^2$  の symmetry は, 特異曲線の進行方向を逆転させる. 上の定義から明らかに以下のことが成り立つ.

**命題 4.2.** 一般化された  $f, g$  が右同値ならば, 両者は等長的である.

そこで以下の定義を与える.

**定義 4.3.** 与えられた  $C$  に沿う一般化されたカスパ辺の芽に対して,  $C$  に沿う一般化されたカスパ辺の芽  $g$  が異性体 (isomer) である (cf. [5]) とは,  $g$  が以下の性質を満たすことである.

- (1)  $g$  は  $f$  に等長的であるが,
- (2)  $g$  は  $f$  に右同値ではない.

与えられた一般化されたカスパ辺から, その異性体をつくる手段を与えるため, 以下の定義を用意する.

**定義 4.4.**  $J$  を  $\mathbf{R}$  の有界閉区間か 1 次元トーラスとする.  $U (\subset J \times \mathbf{R})$  を  $J \times \{0\}$  の管状近傍とし,  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  を一般化されたカスパ辺とする. このとき  $f$  が許容的であるとは  $J$  に沿う  $f$  の特異曲率  $\kappa_s(t)$  と, 空間曲線  $J \ni t \mapsto f(t, 0)$  の曲率  $\kappa(t)$  との間に

$$(4.1) \quad |\kappa_s(t)| < \min_{s \in J} \kappa(s) \quad (t \in J)$$

が成り立つときをいう. 尚, 一点  $t = c \in J$  において

$$|\kappa_s(c)| < \kappa(c)$$

が成り立つときは  $f$  は  $(c, 0) \in U$  においてジェネリックであるとよぶことにする.

<sup>5</sup>以下, このような  $U_i$  を  $J_i \times \{0\}$  の管状近傍という.

$f$  が許容的ならば、空間曲線  $C$  の曲率関数は零点を持たず、主法線ベクトルと従法線ベクトルが定まる。

**注意 4.5.**  $f$  が正規形るとき、許容的という条件を課すと

$$(4.2) \quad |\theta_f| < \pi$$

という範囲に、カスプ角  $\theta_f$  の取り得る範囲を限定できる。この角度は、曲面を曲線の法平面で切った切り口としてできる「一般化されたカスプ」の接方向が主法線方向からなす角度の情報を与えており、 $f$  が正規形でなくても定義できる。

以下、 $J$  が  $\mathbf{R}$  の有界閉区間  $I = [-l/2, l/2]$  ( $l > 0$ ) の場合に与えられた「一般化されたカスプ辺」の「双対」の存在を示す。 $C$  を、自己交叉を持たない空間曲線  $c: I \rightarrow \mathbf{R}^3$  の像とする。いま、 $I \times \{0\}$  の管状近傍  $U (\subset I \times \mathbf{R})$  上で定義された  $C^\omega$ -級の一般化されたカスプ辺  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$  で  $f(I \times \{0\}) = C$  かつ  $I \times \{0\}$  となるものを 1 つ固定する。

**命題 4.6** (cf. [5, Fact 0.6]). ( $C$  に沿う) 一般化されたカスプ辺  $f$  が、条件

$$(4.3) \quad |\kappa_s(t)| < \kappa(t) \quad (t \in I)$$

を満たせば<sup>6</sup>、 $I \times \{0\}$  のある管状近傍  $V (\subset U)$  上で定義された  $C^\omega$ -級の一般化されたカスプ辺  $g: V \rightarrow \mathbf{R}^3$  で、以下の条件を満たすものが存在する:

- (1)  $g(t, 0) = f(t, 0)$  が  $t \in I$  について成り立つ。
- (2)  $I \times \{0\}$  上の点はすべて一般化されたカスプ辺である。
- (3)  $g$  は  $f$  と  $V$  上で同じ第一基本形式をもつ。
- (4)  $g$  のカスプ角  $\theta_g$  と  $f$  のカスプ角  $\theta_f$  との間には

$$\theta_g(t) = -\theta_f(t) \quad (t \in I)$$

なる関係がある。

さらに、上の条件を満たす  $g$  は写像芽として一意に定まる。

(証明) 実際  $f$  の第一基本形式  $ds^2$  は、 $I$  上に I 型の特異点をもつ Kossowski 計量となる。したがって、定理 3.13 により、 $C$  に沿って 2 つの一般化されたカスプ辺  $f_\pm$  の存在が示せる。その一意性により  $f = f_+$  あるいは  $f = f_-$  となるが、そのとき  $f = f_+$  ならば  $g = f_-$  とし、 $f = f_-$  ならば  $g = f_+$  とすれば、上の条件を満たす  $g$  が得られる。一意性は、定理 3.13 の最後の主張から従う。  $\square$

こうして一意に定まる  $g$  を  $\check{f}$  で表し  $f$  の双対 (*dual*) という。

**命題 4.7** ([5]). ( $C$  に沿う) 一般化されたカスプ辺  $f$  が (4.3) を満たすとき、その双対  $\check{f}$  について以下のことが成り立つ。

- (1)  $\check{f}$  も「 $C$  に沿う一般化されたカスプ辺」で、 $f$  の異性体である。
- (2)  $p \in U$  が  $f$  上のカスプ辺ならば、この点は  $\check{f}$  に対してもカスプ辺である。
- (3)  $p \in U$  が  $f$  上のカスプ状交叉帽子ならば、この点は  $\check{f}$  に対してもカスプ状交叉帽子である。
- (4)  $f$  が 5/2-カスプ辺ならば、 $\check{f}$  も 5/2-カスプ辺である。

(証明) 実際  $\check{f}$  は  $f$  と同じ第一基本形式をもつので  $f$  と等長的である。 $\check{f}$  は  $f$  と異符号のカスプ角をもつので  $\check{f}$  の像は  $f$  の像とは一致しない。よって  $\check{f}$  は  $f$  とは右同値にならない。よって  $\check{f}$  は  $f$  の異性体である。

許容的な  $f$  に対して、「カスプ辺」、「カスプ状交叉帽子」、「5/2-カスプ辺」という性質は系 2.8 により第一基本形式だけで決まるので、(2), (3), (4) は、 $\check{f}$  が  $f$  と同じ第一基本形式をもつこと

<sup>6</sup> $f$  が許容的なら、この条件は自動的に満たされる。

から従う。 □

こうして、(4.3) を満たす  $f$  について、「双対」の存在がわかり、しかも、場合によっては、特異点の種類が保持されることがわかった。もしも  $C$  がある平面上に横たわっているなら、 $f$  の平面に関する折り返しは、カस्प角を反転させるのでそれが  $\check{f}$  となる。しかし、 $C$  が一般の対称性を持たない空間曲線の場合には  $\check{f}$  の存在性を示すのは、明示的な構成法がないため、 $f$  が実解析的でない場合に  $f$  の双対が一般に存在するかどうかは現段階では不明である。

ところで、双対写像  $\check{f}$  以外に  $f$  に異性体は存在するだろうか。実は、あと2つ、 $f$  には異性体の候補が存在する。それは  $C$  の向きを反転させて、前節の定理 3.13 を適用することで得られる。ただし、反転しても、曲線の曲率が特異曲率より大きいことを保証するため  $f$  は許容的 (定義 4.4 参照) であることを仮定する必要がある。

**命題 4.8** (cf. [5, Theorem II]).  $C$  に沿う  $C^\omega$  級の一般化されたカस्प辺  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  は許容的であるとせよ。このとき  $I \times \{0\}$  のある管状近傍  $V (\subset U)$  上で定義された  $C^\omega$ -級の一般化されたカस्प辺  $g_\pm : V \rightarrow \mathbf{R}^3$  で、以下の条件を満たすものが存在する:

- (1)  $g_\pm(t, 0) = f(-t, 0)$  が  $t \in I$  について成り立つ。
- (2)  $g_\pm$  は  $f$  と  $V$  上で同じ第一基本形式をもつ。
- (3)  $g_+$  (resp.  $g_-$ ) のカस्प角  $\theta_\pm$  と  $f$  のカस्प角  $\theta_f$  は同符号 (resp. 異符号) である。

さらに、上の条件を満たす  $g_\pm$  は写像芽として一意に定まる。  $I = [-l/2, l/2]$  のとき  $g_\pm$  のカस्प角は、以下の式を満たす。

$$(4.4) \quad \theta_-(u) = -\theta_+(u), \quad \cos \theta_+(u) = \frac{\kappa(u)}{\kappa(-u)} \cos \theta_f(u) = \frac{\kappa_s(u)}{\kappa(-u)} \quad (u \in I).$$

(証明) 写像  $f$  の特異曲線の像としての空間曲線の向きを逆にした曲線  $\tilde{c}(t) := f(-t, 0)$  を考える。  $f$  が許容的なので  $f$  の第一基本形式から定まる Kossowski 計量の特異曲率  $\kappa_s(t)$  は、 $\tilde{c}(t)$  の曲率関数  $\tilde{\kappa}(t) (= \kappa(-t))$  との間に

$$|\kappa_s(t)| < \min_{u \in I} \kappa(u) \leq \tilde{\kappa}(t)$$

なる関係を満たすので、前節の定理 3.13 を適用できて、 $f$  と同じ第一基本形式をもつ「一般化されたカस्प辺」が2つ定まる。カस्प角の符号が  $f$  と一致する方を  $g_+$  とし、そうでない方を  $g_-$  とすれば、それらが求めるものである。 □

ここで一意に定まる  $g_+$  (resp.  $g_-$ ) をそれぞれ  $f$  の逆 (inverse) および逆双対 (inverse dual) といい、 $f_*$  (resp.  $\check{f}_*$ ) で表す。

**命題 4.9** ([5]).  $C^\omega$  級の  $C$  に沿う一般化されたカस्प辺  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  は許容的であるとせよ。このとき  $f$  の逆  $f_*$  について以下のことが成り立つ。

- (1)  $f_*$  は、 $C^\omega$  級の  $C$  に沿う一般化されたカस्प辺で、 $f$  と同じ第一基本形式をもつ。
- (2)  $p \in U$  が  $f$  上のカस्प辺ならば、この点は  $f_*$  に対してもカस्प辺である。
- (3)  $p \in U$  が  $f$  上のカस्प状交叉帽子ならば、この点は  $f_*$  に対してもカस्प状交叉帽子である。
- (4)  $f$  が 5/2-カस्प辺ならば、 $f_*$  も 5/2-カस्प辺である。

(証明) この命題の証明は、ほとんど命題 4.7 と同様である。実際  $f_*, \check{f}_*$  は定義から  $f$  と同じ第一基本形式をもつ。  $p$  においてジェネリックな  $f$  に対して、「カस्प辺」、「カस्प状交叉帽子」、「5/2-カस्प辺」という性質は系 2.8 により第一基本形式だけで決まるので (2), (3), (4) が従う。 □



以上で  $f$  に付随する 3 つの異性体の候補を作ったことになるが  $C$  が閉じてない場合には、これが異性体候補のすべてである、つまり次が成り立つ。

**命題 4.10** (cf. [5, Theorem II]).  $C$  を 有界閉区間  $I$  上で定義された実解析的な空間曲線の像とせよ. このとき ( $C$  に沿う) 許容的なカस्प辺の芽  $f$  の異性体は  $\check{f}$ ,  $f_*$  あるいは  $\check{f}_*$  に右同値である.

これは、前節の定理 3.13 の  $f_{\pm}$  の一意性に関する主張からの帰結である. さらに、異性体の個数について以下のことが成り立つ.

**定理 4.11** (cf. [5, Theorem III]).  $C$  を 有界閉区間  $I$  上で定義された空間曲線の像とせよ.  $C$  上で許容的なカस्प辺の帯  $f$  が定める 4 つの写像 (芽)  $f$ ,  $\check{f}$ ,  $f_*$ ,  $\check{f}_*$  の右同値類の個数を  $n$  とすると  $n = 4$  であることと  $f$  の第一基本形式  $ds^2$  が対称性を持たないことは同値である. また  $ds^2$  が対称性をもつ場合には  $n = 2$  となる.

ここで、以下  $\mathbf{R}^3$  における図形の合同類についての定義を与える.

**定義 4.12.** いま  $\Sigma := \{S_1, \dots, S_r\}$  を  $r$  個の  $\mathbf{R}^3$  の部分集合の族とする. ただし、我々の表示では  $r$  個の集合のうち、重複も許すものとする. このとき  $\#\Sigma$  で、この  $r$  個のうち集合として異なるものの個数を表す. また、 $\langle S_i \rangle$  は  $S_i$  の合同類を表す. つまり等式  $\langle S_i \rangle = \langle S_j \rangle$  ( $i \neq j$ ) は、ある  $\mathbf{R}^3$  の等長変換  $T$  で  $T(S_i) = S_j$  を満たすものが存在することを意味する. 定義から

$$(4.5) \quad \#\{\langle S_1 \rangle, \dots, \langle S_r \rangle\} \leq \#\Sigma$$

が成り立つ.

異性体の合同類については次が示せる.

**定理 4.13** ([5, Theorem IV]).  $C$  を 有界閉区間上で定義された空間曲線の像とせよ.  $C$  上で許容的なカस्प辺の芽  $f$  が定める 4 つの写像 (芽) の像の合同類の個数

$$N := \#\{\langle \text{Im}(f) \rangle, \langle \text{Im}(\check{f}) \rangle, \langle \text{Im}(f_*) \rangle, \langle \text{Im}(\check{f}_*) \rangle\}$$

について以下のことが成り立つ.

- (1) もしも  $C$  が対称性をもたず、 $ds^2$  も対称性を持たなければ  $N = 4$  である.
- (2) 上記以外の場合  $N \leq 2$  が成り立つ.
- (3)  $N = 1$  となるのは、以下のとき、そのときに限る.
  - (a)  $C$  が平面上にあり、さらに  $C$  自体が非自明な対称性をもつか  $ds^2$  が対称性をもつ、または
  - (b)  $C$  が平面上になく、正の対称性をもち (つまり  $\mathbf{R}^3$  の向きを保つ等長変換  $T$  で  $T(C) = C$  を満たすものが存在し)、さらに  $ds^2$  も対称性をもつ.

カस्प辺の異性体を具体的に作るのは、偏微分方程式の解を求めることに対応するので、一般には非常に困難である. しかし特別な場合として、 $C$  が平面曲線で、しかも対称性をもつ場合には、4 つの異性体は全部合同となり、しかも像としては全部異なるため、明示的な具体例を作ることができる. 詳しくは論文 [5] をみよ. 今度は  $C$  が閉曲線の場合を考える (図 2 参照). この場合には、以下の事実が成り立つ.

**定理 4.14** ([6]).  $C$  を自己交叉のない閉じた空間正則曲線とせよ.  $C$  が円ではなく、与えられた  $C$  上で許容的なカस्प辺の芽の第一基本形式が高々有限個の対称性しか許容しなければ、 $f$  の異性体は無数に (正確には連続体の濃度で) 存在する.

異性体が無限個に存在する理由は  $C$  が閉じている場合には、 $f$  の異性体を作るとき  $C$  の向きを反転させる自由度に加えて、 $C$  上の任意の点を基点にして異性体をつくる自由度が加わるためである.



図 2. 空間単純閉曲線に沿うカस्प辺の例

### 5. 可展面の双対性

$l$  を正の数とし,  $J$  は  $\mathbf{R}$  の原点を含む有界閉区間  $[-l/2, l/2]$  か, 1次元トーラス  $\mathbf{R}/l\mathbf{Z}$  とする. また,  $0$  で  $\mathbf{R}$  の原点に対応する  $\mathbf{R}/l\mathbf{Z}$  の点を表す.  $\mathbf{c}: J \rightarrow \mathbf{R}^3$  を自己交叉のない正則曲線で, 弧長をパラメータとし, 曲率関数  $\kappa(t)$  ( $t \in J$ ) は零点を持たないものとし,

$$C := \mathbf{c}(J)$$

とおく.  $\epsilon$  を充分小さな正の数として,  $C^\infty$ -写像  $f: J \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}^3$  を

$$f(t, v) := \mathbf{c}(t) + v\xi(t),$$

$$\xi(t) := \cos \beta(t)\mathbf{e}(t) + \sin \beta(t)(\cos \alpha(t)\mathbf{n}(t) + \sin \alpha(t)\mathbf{b}(t))$$

と定義する. 但し

$$0 < |\alpha(t)| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta(t) < \pi \quad (t \in J)$$

とする. ここで  $\alpha(t)$  を第一角度関数,  $\beta(t)$  を第二角度関数という.  $f$  が可展面 (つまり Gauss 曲率が恒等的に零) であるための必要充分条件は

$$\cot \beta(t) = \frac{\alpha'(t) + \tau(t)}{\kappa(t) \sin \alpha(t)}$$

で与えられる (つまり第二角度関数は第一角度関数から決まってしまう). 但し  $\tau(t)$  は, 空間曲線  $\mathbf{c}(t)$  の捩率関数とする. また  $f$  の第一基本形式は

$$ds^2 = \left( (\sin \beta - v(\beta' + \mu_f))^2 + \cos^2 \beta \right) dt^2 + 2 \cos \beta dt dv + dv^2$$

で表される, 但し  $\mu_f(t) := \kappa(t) \cos \alpha(t)$  は,  $C$  の曲面  $f$  上の曲線としての測地的曲率である. 可展面  $f$  は第一角度関数  $\alpha(t)$  で一意に決まってしまうので  $f = f^\alpha$  と記す. すると

$$\check{f} := f^{-\alpha},$$

も,  $C$  に沿う可展面となるが, これを  $f$  の双対可展面とよぶ.  $\check{f}$  の第二角度関数  $\check{\beta}$  は,

$$\cot \check{\beta}(t) = \frac{\alpha'(t) - \tau(t)}{\kappa(t) \sin \alpha(t)}$$

を満たす. 双対可展面  $\check{f}$  は, 以下の性質をもつ.

- $\check{f}$  は, 曲線  $C$  に沿う可展面で,  $C$  を  $\check{f}$  上の曲線と思ったとき, その測地的曲率  $\mu_{\check{f}}$  は  $f$  に対する測地的曲率  $\mu_f$  に一致する.

可展面  $f$  と双対写像  $\check{f}$  の像は、一般には、互いに非合同で、相異なる第一基本量をもつ。カस्प辺の場合には「異性体」は、同じ第一基本形式をもつが、可展面についての類似の概念としての「異性体」は、第一基本形式ではなく、測地的曲率関数の一致で定義する。詳しくは論文 [8] あるいは [9] を参照されたい。

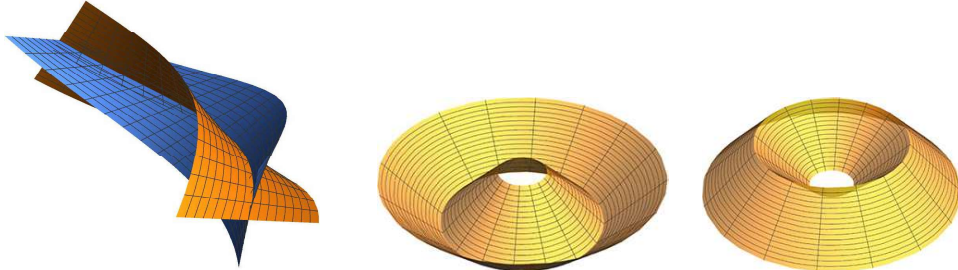


図 3. 常螺旋に沿う可展面とその双対, および互いに双対な「曲線折り」

## 6. 折り紙写像

前節で定義した可展面  $f$  とその双対  $\check{f}$  を用いて

$$(6.1) \quad [\Phi f](t, v) := \begin{cases} f(t, v) & (v \geq 0), \\ \check{f}(t, v) & (v < 0) \end{cases}$$

によって定まる写像を  $f$  が誘導する折り紙写像という。論文 [7] では  $[\Phi f]$  を  $\Phi_f$  と記しているが、本節では読みやすくするため、 $\Phi_f$  の代わりに  $[\Phi f]$  と記している。

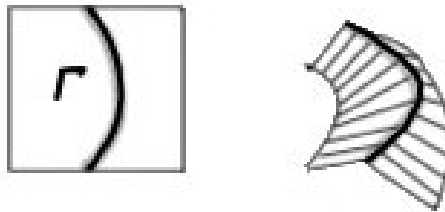


図 4. crease pattern  $\Gamma$  (left) と、それを空間曲線  $C$  に沿う crease として実現する曲線折り.

ここで、「曲線折り」を定義する.

**定義 6.1** ([8]). いま

- 紙 (つまり平面  $\mathbf{R}^2$ ) を用意する.
- 変曲点のない<sup>7</sup>弧長パラメータで表示された正則曲線  $\gamma: J \rightarrow \mathbf{R}^2$  の像を  $\Gamma$  と記す. たとえ  $J$  が 1 次元トラスであっても  $\Gamma$  が閉曲線であることは要請しない. (とくに  $\Gamma$  は  $C$  と同じ長さである.)
- $\Gamma$  には,  $\gamma$  が誘導する向きも付随しているものとする.

<sup>7</sup>変曲点があると、折り方に制限があるため、ここではこの仮定をつけている.

- $\Gamma$  を折り目として紙を折り，その折り目が作る空間曲線がちょうど  $C$  であるようにする．特に  $c: J \rightarrow \mathbf{R}^3$  は弧長パラメータとする助変数表示で，折ったあとで  $\Gamma$  上の点  $\gamma(t)$  が  $C$  上の点  $c(t)$  に対応しているとすると  $c(t)$  の曲率関数を  $\kappa(t)$  は

$$(*) \quad 0 < |\mu(t)| < \kappa(t) \quad (t \in J)$$

を満たす．

このとき，作られた折り紙を  $C$  の充分小さな管状近傍で切り取ったものを曲線折りという．また  $\Gamma$  を **crease patten** といい， $C$  を **crease** とよぶ (図 4 参照)．また

$$(**) \quad 0 < |\mu(t)| < \min_{s \in J} \kappa(s) \quad (t \in J)$$

を満たすとき，「曲線折り」は，許容的であるという．

以下のことが知られている．

**定理 6.2.** (Fuchs-Tabachnikov [1])  $\Gamma$  が条件 (\*) を満たすとき，この平面曲線を crease pattern とし， $C$  を crease としてもつ「曲線折り」はある可展面  $f$  から作られる折り紙写像  $\Phi[f]$  の像として実現される．このとき， $\check{f}$  が誘導する折り紙写像

$$\Phi[\check{f}]$$

も「曲線折り」として  $\Phi[f]$  と同じ crease pattern をもつ．ここで第二角度関数  $\beta, \check{\beta}$  は，紙の上での曲線  $\Gamma$  の左右における線織面の線となる方向を指し示す．

つまり，「曲線折り」には，常に，もう一つの「曲線折り」が同伴し，両者の crease と crease pattern は同一である．一般には 2 つの折り方は，合同ではないが，特別な場合は合同になる．例えば，円に沿って等角度で折った場合が図 3 (中央と右) で，2 つの「曲線折り」は像としては一致するが，互いに合同である．

いま，与えられた「曲線折り」に対して，それと同一の crease と crease pattern が存在することを示したが，以下の問いが自然に生じる．

(問) 与えられた「曲線折り」と (曲線の向きを考慮に入れずに) 同一の crease と crease pattern をもつ「曲線折り」で互いに合同でないものを「異性体」とよぶことにすると，「異性体」は，一般にいくつあるだろうか？

この答として，今回，以下の結果を得た．

**定理 6.3** (本田-直川-佐治-山田-梅原 [5])．条件 (\*\*) を満たす  $\Gamma$  に対して「曲線折り」の異性体の可能性は 4 つである．また，実際，4 つが全て互いに非合同となるような  $C$  と  $\Gamma$  の具体例が存在する．

調べたところ，4 つの可能性については，我々の研究以前に指摘されたことはないようである．この定理の証明の概略を述べる．まず，与えられた「曲線折り」は， $f$  とその双対が  $C$  の向きに依存していることに着目する． $C$  の向きを反転させて，もう 2 つの  $C$  に沿う可展面

$$f_*, \check{f}_*$$

を構成することができて，その測地的曲率関数が「 $\Gamma$  の曲率関数」に一致するようになれる．ただし  $f_*$  (resp.  $\check{f}_*$ ) は  $C$  の向きを逆転させたとき，その第一角度関数の符号が  $f$  と一致する (resp. 逆符号となる) ものとして定義し，カस्प辺のときと同様， $f_*$  を  $f$  の逆といい， $\check{f}_*$  を  $f$  の逆双対とよぶ．すると  $f_*$  と  $\check{f}_*$  が誘導する 2 つの折り紙写像

$$\Phi[f_*], \quad \Phi[\check{f}_*]$$

が定まる．その像として定まる2つの「曲線折り」は， $f$ と同じ crease pattern をもつ．筆者等の論文 [7] では，こうして作った4つの「曲線折り」

$$\Phi[f], \Phi[\check{f}], \Phi[f_*], \Phi[\check{f}_*]$$

が，すべて合同でない例を具体的に作成した．それが図5の曲面である．4つが合同でないことを示すのに  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の  $C$  に沿う平均曲率を計算した．下図は，4つの異なる可展面で，同じ曲線に沿い，かつ同じ測地的曲率をもつものの例で，曲線に沿う平均曲率関数も図示している．4つの「曲線折り」が合同でないことは，このグラフから読み取れる．

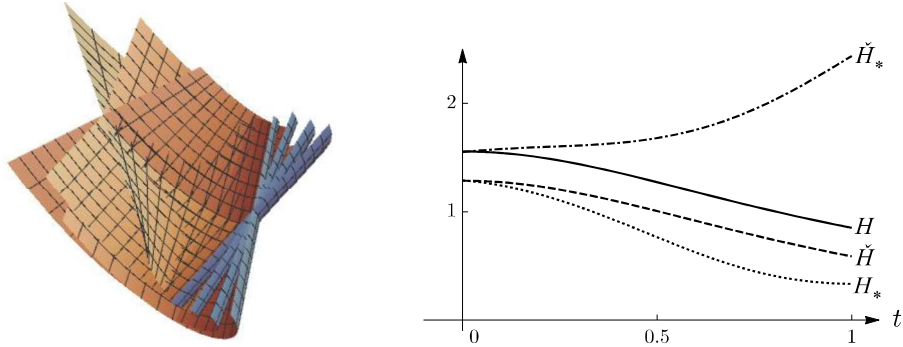


図 5.  $C$  に沿って同じ測地的曲率をもつ4つの可展面と， $C$  上の平均曲率

カスプ辺に対する定理 4.13 の類似として，「曲線折り」に関しては次が成り立つ．

**定理 6.4** ([8, Theorem A]). 有界閉区間上で定義された  $C^\infty$ -級の空間曲線の像を  $C$  とせよ． $C$  に沿う「曲線折り」 $P$  に対して， $\Gamma$  を  $f$  の測地的曲率関数の絶対値が，(零点を持たない)  $C^\infty$  関数  $\mu$  に一致する平面曲線とする．もしも  $\mu$  が (\*\*) を満たすならば，ある可展面の帯  $f$  が存在し，その可展面が誘導する折り紙写像の像  $\text{Im}(\Phi[f])$  が  $P$  に一致する．このとき，

$$\text{Im}(\Phi[f]), \text{Im}(\Phi[\check{f}]), \text{Im}(\Phi[f_*]), \text{Im}(\Phi[\check{f}_*])$$

が， $P$  と同じ crease と crease pattern をもつ曲線折りのすべてである．さらに，この4つの曲線折りの合同類の個数を  $N'$  とおくと，(カスプ辺のときとまったく同じく) 以下のことが成り立つ．

- (1) もしも  $C$  が対称性をもたず， $\Gamma$  が平面曲線として対称性を持たなければ  $N' = 4$  である．
- (2) 上記以外の場合では  $N' \leq 2$  が成り立つ．
- (3)  $N' = 1$  となるのは，以下のとき，そのときに限る．
  - (a)  $C$  が，ある平面上にあり， $C$  が非自明な対称性をもつか， $\Gamma$  が対称性をもつ，あるいは
  - (b)  $C$  が正の対称性をもち (つまり  $\mathbf{R}^3$  の向きを保つ等長変換  $T$  で  $T(C) = C$  を満たすものが存在し)，さらに  $\Gamma$  が対称性をもつ．

ここまでは  $C$  が閉曲線でない場合を考えていたが， $C$  が閉曲線のときは， $\Gamma$  と  $C$  の始点を合わせる自由度があるため，無限個の異性体ができる．つまり次が成り立つ．

**定理 6.5** ([8, Theorem B (d)]).  $C$  を自己交叉のない閉じた空間曲線とせよ． $C$  が円ではなく，与えられた  $C$  上で許容的な「曲線折り」の crease pattern が高々有限個の対称性しか許容しなければその異性体は無数に (実は連続体の濃度で) 存在する．

定理 4.13 と定理 6.4 は、ほとんど平行な内容であるが、定理 4.14 と上記の定理 6.4 も同様の関係にある。この類似は偶然ではなく、実は、実解析的カスプ辺から、「曲線折り」への射が存在し、カスプ辺の双対、逆、逆双対を、対応する4つの「曲線折り」へ写す。さらに、その射を使って、2つの対象の異性体に関する性質の類似にある程度の根拠を与えることができる。詳しくは [9] を参照せよ。

(最後に一言) 福井先生、御還暦おめでとうございます。今回の研究は、福井先生の御論文 [3] のカスプ辺の表現公式を用いた Gauss 曲率、平均曲率の計算に刺激を受けたのがきっかけです。

#### 参考文献

- [1] D. Fuchs and S. Tabachnikov, *More on paperfolding*, The American Mathematical Monthly, **106** (1999), 27–35.
- [2] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [3] T. Fukui, *Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail*, to appear in Osaka J. Math. (www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Fukui/preprint/CE.ST.pdf).
- [4] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26** (2015), 1540008, 34pp.
- [5] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, preprint (arXiv:1906.02556).
- [6] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Cuspidal edges with the same first fundamental forms along a knot*, preprint (arXiv:1908.06609).
- [7] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Curved foldings with common creases and crease patterns*, preprint (arXiv:1910.06533).
- [8] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *On the existence of four or more curved foldings with common creases and crease patterns*, preprint (arXiv:1911.07166).
- [9] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A relationship among isomers of developable strips, curved foldings and cuspidal edges*, in preparation.
- [10] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, to appear in Hiroshima Math. J. (arXiv:1710.02999).
- [11] A. Honda, K. Saji, *Geometric invariants of 5/2-cuspidal edges*, Kodai Math. J. **42** (2019), 496–525.
- [12] K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. **68** (2016), 73–90.
- [13] M. Kossowski, *Realizing a singular first fundamental form as a nonimmersed surface in Euclidean 3-space*, J. Geom. **81** (2004), 101–113.
- [14] L. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, 247–281, Springer Proc. Math. Stat., **154**, Springer, Shanghai, (2016).
- [15] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Flat surfaces along cuspidal edges*, J. Singul. **16** (2017), 73–100.
- [16] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *An index formula for a bundle homomorphism of the tangent bundle into a vector bundle of the same rank, and its applications*, J. Math. Soc. Japan. **69** (2017), 417–457.
- [17] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Diff. Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.
- [18] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.