有限連結グラフ上の探索問題

兵庫県立大学名誉教授　菊田　健作

Kensaku KIKUTA

Professor Emeritus, University of Hyogo

1　はじめに

静止目標物 1 個が有限連結グラフ上のノードのどれかに存在することがわかっている．静止目標物の探索者はグラフの辺上を移動しながらノードにある静止目標物を探していき発見した時点で探索は終了する．また，ノードを調べると，そこに静止目標物が存在するかどうかを確実に知ることができる．したがって，同じノードを複数回調べることはない．ただし，ノードを複数回通過することは可能である．探索者がノードを調べるときに調査費用が，また辺上を移動するときに移動費用が発生する．ノードを単に通過するだけではそのノードの調査費用は発生しない．さらに，静止目標物の各ノードでの存在確率は探索者にとって既知であるとする．したがってノードの探索順序を決めたら静止目標物を見つけるまでの期待費用を計算できる．ノードの探索順序の個数は有限であるから，最小の期待費用が存在する．探索者は最小の期待費用を与えるような探索順序を見つけたい．

この問題では各ノードにおける静止目標物の存在確率と各ノードの調査費用がパラメータとして含まれ，さらにグラフの構造が問題の解析に影響を与える．最適解を統一的に与えることは困難である．

本稿では，上述の最小化問題において最適探索順序が満たさねばならない必要条件を与える．また，最小化問題の解（最適解とは限らない）を与える簡便な手順を提案する．さらに，動的計画法によるアプローチを紹介した後に今後の課題を述べる．

Alpern/Gal [2] と Ruckle [7] は探索ゲームについて解説したテキストである．Gluss [4] は線グラフの場合にこの問題を扱っている．探索者の移動費用を導入したという点で本報告に関わる初期の論文である．Baston/Kikuta[3] は完全二部グラフ上での期待費用最小化問題を扱っている．特殊ケースにおいて最適解が与えられている．さらに動的計画法による解析も試みられている．文献 [1] はこの分野と周辺領域の成果の報文集である．

2 モデル

本節では，移動費用と調査費用を考慮した有限連結グラフ上の探索問題についてさらに詳しく述べる．$\mathcal{G} = (N, E)$ を有限連結グラフとする．ここに $N = \{0, 1, ..., n\}, n \geq 2$，はノー ドの集合である．辺の集合 $E \subseteq N \times N$ が与えられている．辺に沿った有限個のノードの列をパスという．

$N \setminus \{0\}$ に含まれるノードのどれか 1 つに静止目標物が隠されている．探索者は静止目標物がどのノードに隠されているかを知らずにノード 0 から出発し辺上を移動しながら各ノードを調べて行く．ノードを調べずに通過することもできる．そうする場合はそのノードの調査費用はかからない．静止目標物が見つかった時点で探索は終了する．探索者が静止目標物が存在するノードを調べたときその静止目標物を見逃す確率はどのノードについても 0 である．したがって探索者が同じノードを 2 度以上調べることはない．ノード $i \in N$ の調査費用は $c_i > 0$ である．$(i, j) \in E$ のとき，ノード i から j への移動費用は $d(i, j)$ である．ネットワークは連結であるから $(i, j) \notin E$ のときでも i から j へのパスが存在する．$(i, j) \notin E$ のときは i から j へのすべてのパスに対してパス上の辺の移動費用の和を考え，その最小値を $d(i, j)$ とする．また，すべてのノード i に対し $d(i, i) = 0$ とする．

探索者は探索を開始する前に，ノードの探索順序を決定せねばならない．ノードの探索順序を $\sigma \equiv \sigma(1) \ldots \sigma(n)$ と表す．σ は $N \setminus \{0\}$ 上の置換である．また，$\sigma(0) = 0$ としておく．σ の逆順序を σ^r と表す．ここに，$\sigma^r(j) = \sigma(n + 1 - j), 1 \leq j \leq n$ である．さらに，σ^{-1} を

$$\sigma^{-1}(i) = j \Longleftrightarrow \sigma(j) = i \tag{1}$$

によって定義する．

静止目標物がノード $i \in N \setminus \{0\}$ にあり探索者が σ を選んだとき，探索者がノード i を調べて静止目標物を見つけた時点で探索は終了する．このときの探索費用は

$$f(i, \sigma) \equiv \sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)} [d(\sigma(x-1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x)}] \tag{2}$$

となる．さらに，静止目標物の各ノード $i \in N \setminus \{0\}$ での存在確率 p_i は探索者にとって既知であると仮定する．$p = [p_1, \cdots, p_n]$ とおく．ここに，

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}. \tag{3}$$

探索者が σ を選んだときの期待探索費用 $f(p, \sigma)$ は

$$f(p, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(i, \sigma)$$

探索者はこれを最小にするように探索順序 σ を選びたい，として期待費用最小化問題が得られる．これを (N, p, c, f) と表す．

3　探索順序と存在確率

最小化問題 (N, p, c, f) において最適な探索順序では，ごく大まかにいうと，静止目標物の存在確率が大きくなるほど探索の順番は小さくなるということが予想される．

補題 1. 最小化問題 (N, p, c, f) において，探索順序 σ と $0 \le k \le n-2$ に対して探索順序 τ を

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma(i), & \textit{if } 1 \le i \le k; \\ \sigma(i+1), & \textit{if } k+1 \le i \le n-1; \\ \sigma(k+1), & \textit{if } i = n. \end{cases} \tag{4}$$

と定義する．このとき

$$\begin{aligned} & f(p,\sigma) \le f(p,\tau) \iff \\ & \frac{p_{\sigma(k+1)}}{1-\sum_{i=1}^{k} p_{\sigma(i)}} \ge \frac{d(\sigma(k),\sigma(k+1)) + d(\sigma(k+1),\sigma(k+2)) - d(\sigma(k),\sigma(k+2)) + c_{\sigma(k+1)}}{\sum_{i=k+1}^{n-1} d(\sigma(i),\sigma(i+1)) + d(\sigma(n),\sigma(k+1)) + \sum_{i=k+1}^{n} c_{\sigma(i)}}. \end{aligned} \tag{5}$$

証明. まず，$1 \le i \le k$ に対し，$f(\sigma(i),\sigma) = f(\tau(i),\tau)$ であることに注意する．よって

$$f(p,\sigma) \le f(p,\tau) \iff \sum_{i=k+1}^{n} p_{\sigma(i)} f(\sigma(i),\sigma) \le \sum_{i=k+1}^{n} p_{\tau(i)} f(\tau(i),\tau) \tag{6}$$

さらに，$k+2 \le i \le n$ に対し，

$$f(\sigma(i),\sigma) - f(\sigma(i),\tau) = d(\sigma(k),\sigma(k+1)) + d(\sigma(k+1),\sigma(k+2)) - d(\sigma(k),\sigma(k+2)) + c_{\sigma(k+1)} \tag{7}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(p,\sigma) \le f(p,\tau) \iff & \\ & \Big(\sum_{i=k+2}^{n} p_{\sigma(i)}\Big)\Big(d(\sigma(k),\sigma(k+1)) + d(\sigma(k+1),\sigma(k+2)) - d(\sigma(k),\sigma(k+2)) + c_{\sigma(k+1)}\Big) \\ & \le p_{\sigma(k+1)}\Big(\sum_{i=k+2}^{n-1} d(\sigma(i),\sigma(i+1)) + d(\sigma(n),\sigma(k+1)) + d(\sigma(k),\sigma(k+2)) \\ & \qquad - d(\sigma(k),\sigma(k+1)) + \sum_{i=k+2}^{n} c_{\sigma(i)}\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

次に，

$$\sum_{i=k+2}^{n} p_{\sigma(i)} = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_{\sigma(i)} - p_{\sigma(k+1)} \tag{9}$$

に注意して求める式を得る．□

補題 1 において探索順序 σ から定義された τ をあらためて σ_k と書くことにする．探索順序 σ が最適であれば，すべての $0 \leq k \leq n-2$ に対して $f(p,\sigma) \leq f(p,\sigma_k)$ が成立する．したがって次の命題を得る．

命題 1. 最小化問題 (N,p,c,f) において，探索順序 σ が最適であれば，すべての $0 \leq k \leq n-2$ に対して不等式 (5) が成立する．

補題 1 において $k=0$ の場合，不等式 (5) は

$$p_{\sigma(1)} \geq \frac{d(0,\sigma(1))+d(\sigma(1),\sigma(2))-d(0,\sigma(2))+c_{\sigma(1)}}{\sum_{i=1}^{n-1} d(\sigma(i),\sigma(i+1))+d(\sigma(n),\sigma(1))+\sum_{i=1}^{n} c_i} \tag{10}$$

となる．不等式 (10) の右辺の分母は $\sigma(1)$ を調べた後，探索順序 σ に従って他の点を調べて再び $\sigma(1)$ に戻るときの総費用である．そこで，各 $i \in N \setminus \{0\}$ に対し探索順序の集合を

$$\Sigma_i \equiv \{\sigma \in \Sigma | \sigma(1) = i\}$$

とおく．

命題 2. 最小化問題 (N,p,c,f) において，集合 Σ_i に属する探索順序によって得られる式 (10) の右辺の最大値を $\bar{p}_i$ とする．仮に，$p_i > \bar{p}_i$ であれば，最適順序においてノード i の探索の順番が最後になることはない．

証明. いま，$\sigma(n)=i$ であるような σ に対して．順序 τ を次のように定義する．$\tau(1)=i, \tau(j)=\sigma(j-1), 2 \leq j \leq n.$ すると，$p_i > \bar{p}_i$ により $f(p,\tau) < f(p,\sigma)$ が導かれる．したがって σ は最適ではありえない．□

例 1. グラフ $\mathcal{G}$ が下図のように与えられているとする．$c_1=2, c_2=4, c_3=1, c_4=2$ とし，存在確

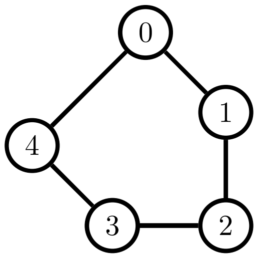

図 1:

率が仮に $p_2=p_3=\frac{1}{6}, p_1=p_4=\frac{1}{3}$ であるとする．$i=1$ に対して不等式 (10) は

$$p_1 \geq \frac{d(0,1)+d(1,\sigma(2))-d(0,\sigma(2))+2}{d(1,\sigma(2))+d(\sigma(2),\sigma(3))+d(\sigma(3),\sigma(4))+d(\sigma(4),1)+9} \tag{11}$$

不等式 (11) の右辺の最大値は $\sigma=1432$ によって達成され $\bar{p}_1=\frac{2}{7}$ である．一方で，$p_1=\frac{1}{3}>\frac{2}{7}$. よって，最適順序では点 1 を最後に調べることはない．また，$\sigma=4123$ によって $\bar{p}_4=\frac{2}{7}<\frac{1}{3}=p_4$ である．最適順序では 4 を最後に調べることはない．(例終)

4　アルゴリズムの検討：線グラフの場合

すべての有限連結グラフ $\mathcal{G}=(N,E)$ に対して最小化問題 (N,p,c,f) に対する最適解を統一的に与えることは困難である．問題には存在確率とノードの調査費用で計 $2n-1$ 個のパラメータが含まれ，さらにグラフの構造が問題の解析に影響を与える．最適な探索順序を求めるための解析の過程で現れる量が

$$\kappa_i \equiv \frac{p_i}{c_i}, \quad \rho_i \equiv \frac{p_i}{2+c_i} \text{ あるいは } \frac{\sum_{i\in S} p_i}{|S|+\sum_{i\in S} c_i} \tag{12}$$

である．ここに $i\in N, S\subseteq N$ である．例えば，文献 [3] を参照．不等式（5）または（10）の両辺を右辺の分子で割ることによって得られる新しい左辺はこれらの量（12）と関連があると考えられる．本節では κ_i, ρ_i を用いた探索順序の簡便な与え方を数値例によって検討する．

例 2. 図 *2* のような線グラフ上の探索問題 (N,p,c,f) を考える．ここに，$N=\{0,1,2,3\}, E=\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ である．次のようにして探索者の一つの探索順序を与えることができる．す

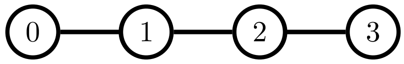

図 2: 線グラフの例，$n=3$

べての $i=1,2,3$ に対して $\kappa_i>\rho_i$ であることに注意する．

1. ノード 0 において：ノード 0 からノード 1 に進む．

2. ノード 1 において：$\kappa_1>\rho_2$ のとき，ノード 1 を調べてノード 2 に進む．$\kappa_1<\rho_2$ のとき，ノード 1 を調べないでノード 2 に進む．

3. ノード 2 において：(i) ノード 1 を調査済みのとき，$\kappa_2>\rho_3$ のとき，ノード 2 を調べてノード 3 に進み調べる．探索順序 123 を得る．$\kappa_2<\rho_3$ のとき，ノード 2 を調べずにノード 3 に進み調べる．ノード 2 に進み調べる．探索順序 132 を得る．

(ii) ノード 1 を調べていないとき，$\kappa_2>\rho_3>\rho_1$ のとき，ノード 2 を調べてノード 3 に進み調べる．ノード 1 に進み調べる．探索順序 231 を得る．$\kappa_2>\rho_1>\rho_3$ のとき，ノード 2 を調べてノード 1 に進み調べる．ノード 3 に進み調べる．探索順序 213 を得る．$\kappa_2<\rho_3$ のとき，ノード 2 を調べないでノード 3 に進み調べる．ノード 2 に進み調べる．ノード 1 に進み調べる．探索順序 321 を得る．

以上の手順によって次のように探索順序が得られる．

$$\begin{aligned} 123 &\iff \kappa_1 > \rho_2, \kappa_2 > \rho_3, \\ 132 &\iff \kappa_1 > \rho_2, \kappa_2 < \rho_3, \\ 213 &\iff \kappa_1 < \rho_2, \kappa_2 > \rho_3, \rho_1 > \rho_3, \\ 231 &\iff \kappa_1 < \rho_2, \kappa_2 > \rho_3, \rho_1 < \rho_3, \\ 321 &\iff \kappa_1 < \rho_2, \kappa_2 < \rho_3. \end{aligned} \tag{13}$$

例えば，$c_1 = c_2 = c_3 = 2$ のとき確率ベクトルの集合

$$P \equiv \{p = (p_1, p_2, p_3) : p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0\} \tag{14}$$

は提案手順にしたがった類別 (13) によって左下図のように分割される．また，厳密解は右下図のようになる．厳密解の計算の詳細は略する．提案手順によっては現れない探索順序 312 が厳密解による分割（右下図）で現れる．その領域は $p_3 \geq 3p_1 + p_2, p_1 \geq 2p_2$ である．（例終）

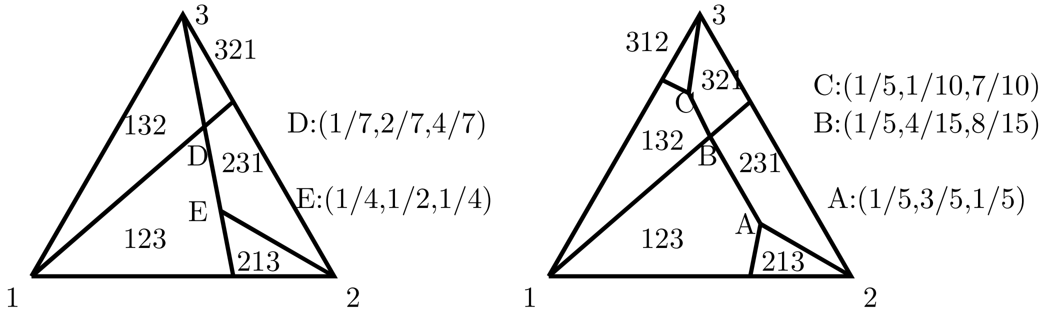

図 3: 左：提案手順，　右：厳密解

例 2 によるとノード数が小さい場合でも，提案手順は厳密解と異なる探索順序を与える場合があることがわかる．しかし，この手順は厳密解を求める作業に比べると簡便である．そこで下記のように一般の有限連結グラフ $\mathcal{G} = (N, E)$ 上の最小化問題 (N, p, c, f) にこの手順を拡張することを検討中である．いま探索者がノード $i \in N$ に来たとする．ノード i に隣接するノードのうちまだ調べていないノード全体を $N(i)$ と表す．さらに，ノード $i \in N$ に対し

$$M(i) \equiv \{j \in N(i) : \rho_j \geq \rho_k, \forall k \in N(i)\}, \mu_i \equiv \max\{\rho_k : k \in N(i)\} \tag{15}$$

とおく．

1. ノード 0 において：ノード 0 から，任意のノード $i \in M(0)$ に進む．

2. まだ調べていないノード $i \neq 0$ において $M(i) \neq \emptyset$ のとき：$\kappa_i > \mu_i$ のとき，ノード i を調べた後，任意のノード $j \in M(i)$ に進む．$\kappa_i < \mu_i$ のとき，ノード i を調べないで任意のノード $j \in M(i)$ に進む．

3. まだ調べていないノード $i \neq 0$ において $M(i) = \emptyset$ のとき：ノード i を調べた後，まだ調べていないノードでノード i に最も近いすべてのノード j のうち ρ_j が最大である任意のノードに進む．

4. すべてのノードを調べるまで操作 2 または 3 を続ける．

5　動的計画法による接近

前節で紹介した計算手順に動的計画法を絡めて考えることは今後の課題とし，本節では文献 [3] で与えられた DP 方程式を紹介するにとどめる．グラフ $\mathcal{G} = (N, E)$ は完全二部グラフである．つまり

$$N = A \cup B \cup \{0\} \text{ かつ } E = A \times (B \cup \{0\}) \tag{16}$$

である．本節では期待費用最小化問題を $\mathcal{P}(A, B, \boldsymbol{p}^{A\cup B}, \boldsymbol{c}^{A\cup B})$ と表す．この問題の最適値を $v(A, B, \boldsymbol{p}^{A\cup B}, \boldsymbol{c}^{A\cup B})$ とする．

命題 3. （文献 *[3]*）最適値関数 v は，$B \neq \emptyset$ のとき

$$\begin{aligned} v(A, B, &\boldsymbol{p}^{A\cup B}, \boldsymbol{c}^{A\cup B}) \\ &= \min \begin{cases} \min_{i\in A}\{1 + c_i + (1 - p_i)v(B, A \setminus \{i\}, \boldsymbol{p}^{B\cup(A\setminus\{i\})}, \boldsymbol{c}^{B\cup(A\setminus\{i\})})\}, \\ \min_{i\in B}\{2 + c_i + (1 - p_i)v(A, B \setminus \{i\}, \boldsymbol{p}^{A\cup(B\setminus\{i\})}, \boldsymbol{c}^{A\cup(B\setminus\{i\})})\}. \end{cases} \end{aligned}$$

を満たす．$B = \emptyset$ のとき，グラフは木であり

$$v(A, \emptyset, \boldsymbol{p}^{A}, \boldsymbol{c}^{A}) = \min_{i\in A}\{1 + c_i + (1 - p_i)[1 + v(A \setminus \{i\}, \emptyset, \boldsymbol{p}^{A\setminus\{i\}}, \boldsymbol{c}^{A\setminus\{i\}})]\}.$$

を満たす．さらに，$v(\{1\}, \emptyset, \boldsymbol{p}^{\{1\}}, \boldsymbol{c}^{\{1\}}) = 1 + c_1$.

命題 3 の中に現れる問題 $\mathcal{P}(B, A \setminus \{i\}, \boldsymbol{p}^{B\cup(A\setminus\{i\})})$ と $\mathcal{P}(A, B \setminus \{i\}, \boldsymbol{p}^{A\cup(B\setminus\{i\})})$ は完全二部グラフ上の問題とみなしてよいことに注意する．さらに，

$$\begin{aligned} &c_i = a, \forall i \in A, c_i = b, \forall i \in B, \\ &p_1 = \cdots = p_\ell = p_{\ell+1} = \cdots = p_{\ell+m} = \frac{1}{\ell + m} \end{aligned}$$

を仮定し $|A|=\ell, |B|=m$ とおくと，問題は $\mathcal{P}(\ell a, mb)$ と表される．命題 3 により

$$v(\ell a, mb) = \min \begin{cases} 1+a+(1-\frac{1}{\ell+m})v(mb,(\ell-1)a), \\ \quad \text{(if the searcher searches a node in } A) \\ 2+b+(1-\frac{1}{\ell+m})v(\ell a,(m-1)b), \\ \quad \text{(if the searcher searches a node in } B) \end{cases}$$

$$v(\ell a, 0b) = 1+a+(1-\frac{1}{\ell})[1+v((\ell-1)a,0b)] = \ell + \frac{\ell+1}{2}a,$$

$$v(1a,0b) = 1+a, \quad v(1b,0a) = 1+b.$$

さらに，$a=b$ ならば

$$v(\ell a, ma) = \frac{m^2+m+\ell^2}{m+\ell} + \frac{\ell+m+1}{2}a$$

が得られる（文献 [3] 参照）．

6 おわりに

次の諸点が今後の検討課題である．

1. 例 2（$n=3$）で与えた手順を $n \geq 4$ の場合に拡張すること．
2. グラフ $\mathcal{G}=(N,E)$ 上の問題において，まず $i \in N, i \neq 0$ を調べて目標物が存在しなかったとする．次は，i を出発ノードとしてグラフ $\mathcal{G}'$ 上の問題を考えることになる．このとき，グラフ $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ が，ノード間の距離まで含めて，同じ構造を持つようなグラフ $\mathcal{G}$ はどのようなものか．完全グラフや完全二部グラフ以外にあるかどうかの検討．
3. ここで考えた問題に対して動的計画法を応用した効率的な解法を検討すること．
4. （12）のすべての量を用いた計算手順の検討．

参考文献

[1] Alpern, S. ,Fokkink, R., Gasieniec,L., Lindelauf R., and Subrahmanian, V.S. (2013)*Search theory: a game theoretic perspective*, Springer.

[2] Alpern,S. and Gal,S. (2003)*The theory of search games and rendezvous*, Kluwer's International Series in Operations Research and Management Sciences, Kluwer, Boston.

[3] Baston,V. and Kikuta,K.(2019) A search problem on a bipartite network. *European J. Operational Research* **277** 227-237.

[4] Gluss, B. (1961) Approximately optimal one-dimensional search policies in which search costs vary through time, *Naval Research Logistics Quarterly* 8,277-283.

[5] 菊田健作 (2018) グリッドグラフ上の探索問題. 日本 OR 学会 2018 年秋季研究発表会アブストラクト集，88-89.

[6] 菊田健作 (2019) 完全二部グラフ上の探索問題. 日本 OR 学会 2019 年秋季研究発表会アブストラクト集，130-131.

[7] Ruckle, W. (1983)*Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston.