バイアップがある静的レベニューマネジメントモデル
A Static Revenue Management Model with Buy-up

筑波大学名誉教授・高木英明
Hideaki Takagi
Professor Emeritus, University of Tsukuba

概 要

In the classical Littlewood's two-period model of static revenue management for airline seat reservation as well as its extensions to multi-period models by others, it is assumed that the demands in each period are independent and that customers whose request for reservation are once rejected disappear immediately. This assumption does not reflect a common behavior of customers in practice that they tend to seek booking again at higher fare. The theoretical treatment of such *buy-up* behavior is not simple because of the resultant mutual dependence of the demands over several periods. Some literature heuristically (incorrectly) treats the two-period model with customers' buy-up behavior.

In this paper, we study the optimal booking limits in the two- and three-period static revenue management models with customers' buy-up behavior in which a given fraction of customers whose request for seat reservation are rejected in each period try to book in the following periods at higher fare with some probability successively. Specifically, for the three-period model with buy-up factor α from the third to the second period and another factor β from the second to the first period, we derive a set of simultaneous equations for the optimal booking limits for the third and second periods in terms of the multiple integrals involving the distribution functions for the original demands in the three periods. Numerical examples are provided to illustrate the dependence of the optimal booking limits on α and β. It is observed that the maximized expected revenue increases as α and β increase by reducing the optimal booking limits accordingly.

1 はじめに

レベニューマネジメント (revenue management)（以前は**イールドマネジメント** (yield management) と言われた）の発端は，1978 年に米国で航空会社規制緩和法 (Airline Deregulation Act) が成立し，航空市場が自由化されて急成長した格安航空会社の PeopleExpress 社の安値攻勢に対抗するため，大手航空会社の American Airlines 社が既存のオンライン座席予約システム SABRE に蓄えられた予約実績から将来の予約数を予測し，予約日によって料金を変えることを編み出した画期的なビジネスモデルである [6], [13, p. 6].

現在のレベニューマネジメントの基礎となる数理モデルの鏑矢は，当時，British Airways 社に属した Ken Littlewood (1972) が提案した 2 期間モデルである [10]．このモデルでは，旅行を早期に計画できるレジャー客には安い料金で売り，搭乗日が近づいて予約を求めるビジネス客には高く売ることにより，予約数を最大化するのではなく，収益を最大化することを目指す．早期に来る多くのレジャー客に安く売ると，後になって高い料金でも厭わないビジネス客が来ても空席がないという機会損失を恐れ，レジャー客に売ってもよい座席数に上限を設ける．しかし，この制限値が低すぎると，ビジネス客が期待したほどに来なければ，航空機は多くの空席を残したまま離陸しなければならなくなる．従って，レジャー客とビジネス客の数が不確定なときに，期待収益が最大になるようなレジャー客予約可能数の最適値 (**最適ブッキングリミット**，optimal booking limit) を求める問題が定式化される．

今日，**Littlewood の法則** (Littlewood's rule) と呼ばれる公式は，総座席数を C，早期の予約料金を r_2，後期の予約料金を r_1 ($> r_2$) とし，ビジネス客の数（確率変数）D_1 の確率分布が与えられたときに，レジャー客に予約を与える上限の最適値 b_2^* を計算する式

$$\frac{r_2}{r_1} = P\{D_1 > C - b_2^*\} \tag{1}$$

である．ここで，r_2/r_1 を**料金比** (fare ratio) という．早期に売れ残った座席は後期に r_1 円で売られるという **ネスト式ブッキング** (nested booking) 方式を仮定している．この式は，b_2^* がビジネス客の数 D_1 だけに依存し，レジャー客の数 D_2 に依存していないことに注意する．

この公式では，予約できなかったレジャー客はすべて退散することを前提としているが，実際には，それら客の一部は高い料金でも予約しようとするので，ビジネス客が増えたような状況になる．このような顧客行動は（客から見て）**バイアップ** (buy-up),（航空会社から見て）sell-up, あるいは vertical shift, upgrade などと呼ばれ，各文献でその影響が考察されている．バイアップ客の増分はもとのレジャー客数に依存するので，理論的には，2 つの期における需要が独立ではないレベニューマネジメント問題となり，多期間モデルの厳密な解析は簡単ではない．

予約できなかったレジャー客が後期に予約を求める割合を**バイアップ率** (buy-up factor) と言い，α で表す ($0 \le \alpha \le 1$)．レベニューマネジメントの代表的参考書である Phillips [12] と Talluri and van Ryzin [13] には，決定木の方法や限界収益法により，レジャー客予約可能数の最適値 b_2^* を計算する式

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{r_2}{r_1} - \alpha\right) = P\{D_1 > C - b_2^*\} \tag{2}$$

が示されている．この式の左辺は**変形料金比** (modified fare ratio) と呼ばれる [12, p. 168]．

式 (2) は $\alpha \to 0$（バイアップがない）のとき，式 (1) に帰着する．しかし，式 (2) は，バイアップがある場合に影響を与えるはずのレジャー客数 D_2 を含んでいないので，疑わしいことが明らかである．本稿の第 2 章に式 (2) を訂正する式 (3) を示す．この正しい式は Pfeifer (1989) [11] や Brumelle ら (1990) [5] によって導かれたものであるが，何故か，後続の文献 [12, 13, 14] に引用されていない．

バイアップがない場合の Littlewood の法則 (1) の多期間モデルへの拡張として，Belobaba [1, 2] による **EMSR**(expected marginal seat revenue) 近似法がある．この近似法は，理論的に厳密に導かれたものではなく，かなり不正確な結果を出すことがあるが，簡単で分かりやすいので，今でも現実のソフトウェアに使われているとのことである [15, p. 136]．EMSR 及び決定木による方法のバイアップがある多期間モデルへの適用が Bodily and Weatherford (1994) [4] と Belobaba and Weatherford (1996) [3] に示されているが，Phillips [12, p. 169] は "heuristic grafted on to another heuristic" と，また Talluri and van Ryzin [13, p. 63] は "somewhat ad hoc adjustment to an already heuristic approach" と評している．後者は「バイアップ率を使う方法は，現実の顧客行動を取り入れる粗削りの方法である」と言っている．

バイアップがある静的レベニューマネジメントモデルは，各期の需要が相互依存するモデルの簡単な例であるが，その解析は容易ではない．Gallego and Topalogue (2019) [7] は「実務家は，多年にわたり，各期の需要が相互依存する場合に対する Littlewood の法則や EMSR 近似法の拡張を求めてきた．しかし，Littlewood の法則を正しく拡張する方法は，思ったより難しいことが分かった」と述べている．

なお,「バイアップモデル」という呼称で研究されている動的レベニューマネジメント問題があるので，注意を要する．You (2001) [16] 及び (2003) [17] は，バイアップがない場合を扱っ

た Lee and Hersh (1993) [9] の動的モデルを，バイアップがある場合に拡張している．さらに，Jiang and Miglionico (2014) [8] は，乗り継ぎ路線を扱うネットワーク型レベニューマネジメントを解析している．動的レベニューマネジメントでは，時間軸を短い時間間隔に区切り，t 番目の時間間隔に到着する客（高々1 人）は確率 P_{it} で料金 r_i の座席を予約を求めると仮定する ($r_1 > r_2 > \cdots > r_i > r_{i+1} > \cdots$)．もし料金 r_i の座席がなければ，代わりに高額の料金 r_j ($j < i$) の座席を求める (1 回だけ可能）が，それもなければ予約を諦める．これらの論文における「バイアップ」は本研究の「バイアップ」とは似て非なるものである．

本研究は 3 期間モデルまでしか扱えなかったが，その成果と今後の課題は以下のとおりである．

(1) モデルの新規性
- 現実の客の行動を取り入れた．
- 各期の需要が独立でないモデルを厳密に解析した．
- 動的計画法で活用される「Bellman の最適性原理」が適用できないモデルを扱った．

(2) 解法の新規性
- 全期間にわたる最適化問題を全体的に展望し，定式化した．
- 各期の最適ブッキングリミットを算出するための連立方程式を明示的に示した．
- 数学的には，大学初年級の確率論と多変数関数の微積分法のみを用いた．

(3) 貢献
- 最適ブッキングリミットがバイアップ率とともに減少することを確認した．
- 最大化された期待収益がバイアップ率とともに増加することを確認した．
- 変形料金比に対する正しい公式を簡単な方法で導き，その意味を解釈した．

(4) 今後の課題
- 同じ方法は，原理的に 4 期間以上のモデルにも拡張できるが，煩雑になる．
- バイアップの客と新規客との間に予約を与える優先度に差を付けた扱いはできるか？
- バイアップの回数によってバイアップの意欲が違ってくるモデルは扱えるか？

2　2 期間モデル

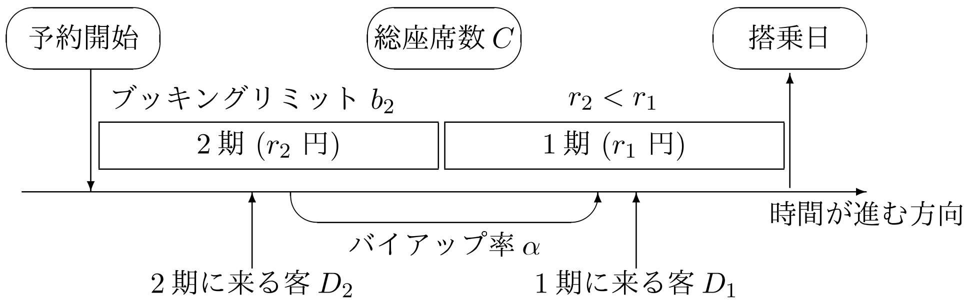

図 1: バイアップがある 2 期間静的レベニューマネジメントモデル．

バイアップがある 2 期間静的レベニューマネジメントモデル (図 1) における最適ブッキングリミットを計算する式として，式 (2) の間違いは既に指摘した．正しい式は，初級の確率論と微積分法により，次のように導かれる．慣例により，期の番号は，時間の進む方向とは逆に，後期を 1 期，早期を 2 期と呼ぶ．

まず，2 期に予約される座席数は

$$S_2(b_2) = \min\{b_2, D_2\} = \begin{cases} D_2 & D_2 \le b_2, \\ b_2 & D_2 > b_2 \end{cases}$$

であり，1 期に予約される座席数は

$$\begin{aligned} S_1(C, b_2) &= \min\{\underbrace{C - b_2 + \max\{0, b_2 - D_2\}}_{\text{2 期に売れ残った座席数}}, \underbrace{D_1 + \alpha \max\{0, D_2 - b_2\}}_{\text{1 期に予約を求める客数}}\} \\ &= \begin{cases} \min\{C - D_2, D_1\} & D_2 \le b_2, \\ \min\{C - b_2, D_1 + \alpha(D_2 - b_2)\} & D_2 > b_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} D_1 & D_1 + D_2 \le C, D_2 \le b_2, \\ C - D_2 & D_1 + D_2 > C, D_2 \le b_2, \\ D_1 + \alpha(D_2 - b_2) & D_1 + \alpha(D_2 - b_2) \le C - b_2, D_2 > b_2, \\ C - b_2 & D_1 + \alpha(D_2 - b_2) > C - b_2, D_2 > b_2 \end{cases} \end{aligned}$$

である．

今後の式を簡単にするため，各期に来る需要（客数）は非負の連続的な値を取る確率変数であると仮定し (この仮定は，客数が大きければ近似的に正しい)，その分布関数と密度関数を

$$\begin{aligned} &F_t(x) := P\{D_t \le x\} \quad ; \quad f_t(x) := dF_t(x)/dx, \quad x \ge 0 \\ &F_t(0) = 0 \quad ; \quad F_t(\infty) = 1, \quad t = 1, 2 \end{aligned}$$

で与える．そうすると，各期に予約される座席数の期待値が

$$\begin{aligned} E[S_2(b_2)] &= \int_0^{b_2} [1 - F_2(x)] dx, \\ E[S_1(C, b_2)] &= C - b_2 + \int_0^{b_2} F_2(x)[1 - F_1(C - x)] dx \\ &\quad - \int_0^{C - b_2} F_2\left(b_2 + \frac{C - b_2 - x}{\alpha}\right) F_1(x) dx \end{aligned}$$

と表される．

このとき，予約される全座席数は

$$E[S(C, b_2)] = E[S_2(b_2)] + E[S_1(C, b_2)]$$

であり，**期待収益** (expected revenue)

$$E[R(C, b_2)] = r_2 E[S_2(b_2)] + r_1 E[S_1(C, b_2)]$$

である．これらは 1 変数 b_2 の連続関数である．これらが微分可能でもあると仮定すれば，期待収益を最大化する b_2 の値（最適ブッキングリミット）b_2^* は

$$\left.\frac{dE[R(C,b_2)]}{db_2}\right|_{b=b_2^*} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{d^2E[R(C,b_2)]}{db_2^2}\right|_{b=b_2^*} < 0$$

で算出できる．左の方程式から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right) &= \frac{\displaystyle\int_{b_2^*}^{b_2^*+(C-b_2^*)/\alpha} f_2(y)F_1[C-b_2^*-\alpha(y-b_2^*)]dy}{1-F_2(b_2^*)} \\
&= \frac{P\{D_2 > b_2^*, D_1+\alpha D_2 \le C-(1-\alpha)b_2^*\}}{P\{D_2 > b_2^*\}} \\
&= P\{D_1+\alpha(D_2-b_2^*) \le C-b_2^* \mid D_2 > b_2^*\}
\end{aligned}$$

が得られる．これが最適ブッキングリミット b_2^* を決める正しい公式であり, 変形料金比

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{r_2}{r_1}-\alpha\right) = P\{ \underbrace{D_1+\alpha(D_2-b_2^*) > C-b_2^*}_{\text{1 期に予約を求める客数が空席数より多い}} \mid D_2 > b_2^*\} \tag{3}$$

に書き直すことができる．式 (3) は，Pfeifer (1989) [11] と Brumelle ら (1990) [5] において，もっと難しい議論により導かれているが，上記のように，簡単に導かれる．間違った公式 (2) を使って計算した b_2^* の値は，正しい b_2^* よりも大きくなり，期待収益が少なくなるので，使わないのが良いだろう．

以上の結果の数値例を示す．総座席数と各期の料金は $C = 100, r_1 = 100, r_2 = 70$ と仮定し，需要は平均 $\mu_1 = 50, \mu_2 = 80$ と標準偏差 $\sigma_1 = \sigma_2 = 25$ をもつ正規分布を条件 $F_t(0) = 0, F_t(\infty) = 1, t = 1, 2$ を満たすように変形した

$$\begin{aligned}
F_t(x) &:= \left[\Phi\left(\frac{x-\mu_t}{\sigma_t}\right) - \Phi\left(\frac{-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right] \Big/ \left[1-\Phi\left(\frac{-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right], \\
f_t(x) &:= \frac{1}{\sigma_t}\phi\left(\frac{x-\mu_t}{\sigma_t}\right) \Big/ \left[1-\Phi\left(\frac{-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right] \qquad 0 \le x < \infty, \quad t = 1, 2
\end{aligned} \tag{4}$$

を仮定する．ここで $\Phi(x)$ と $\phi(x)$ は標準正規分布の分布関数と密度関数である．

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad ; \quad \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x}\phi(y)dy = \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \qquad -\infty < x < \infty.$$

この変形により，D_t の平均及び標準偏差は μ_t 及び σ_t からずれるが，そのずれは $\sigma_t/\mu_t \ll 1$ なら無視できるほど小さい．

数値結果を表 1 に示す．この表を見ると，バイアップ率 α が増えると，最適ブッキングリミット b_2^* を下げる (レジャー客の予約可能数を減らす) ことにより，期待利益が増えることが分かる．バイアップ率がある程度以上に高い (今の例では $\alpha > 0.513$) 場合には，レジャー客には全く売らない ($b_2^* = 0$) 方策が良いということになる．

表 1: バイアップがある 2 期間静的レベニューマネジメントモデルにおける最適ブッキングリミットと期待収益と予約座席数の期待値の数値例.

α	式 (3) による b_2^*	$E[R(C,b_2^*)]$	$E[S(C,b_2^*)]$	$E[S_2(b_2^*)]$	$E[S_1(C,b_2^*)]$
0.00	$\uparrow$ 61.9781	$\downarrow$ 7665.45	$\uparrow$ 94.2272	$\uparrow$ 58.5756	$\downarrow$ 35.6516
0.10	$\uparrow$ 56.6482	$\downarrow$ 7737.69	$\uparrow$ 93.6766	$\uparrow$ 56.5926	$\downarrow$ 39.3443
0.20	$\uparrow$ 50.0483	$\downarrow$ 7830.30	$\uparrow$ 92.9065	$\uparrow$ 48.6782	$\downarrow$ 44.2282
0.30	$\uparrow$ 41.2456	$\downarrow$ 7955.11	$\uparrow$ 91.7387	$\uparrow$ 40.6253	$\downarrow$ 51.1134
0.40	$\uparrow$ 28.0141	$\downarrow$ 8137.54	$\uparrow$ 89.7354	$\uparrow$ 27.8667	$\downarrow$ 61.8687
0.45	$\uparrow$ 18.1528	$\downarrow$ 8267.56	$\uparrow$ 88.1102	$\uparrow$ 27.8667	$\downarrow$ 69.9946
0.50	$\uparrow$ 4.44990	$\downarrow$ 8442.45	$\uparrow$ 85.7592	$\uparrow$ 4.44875	$\downarrow$ 81.3104
0.513	$\uparrow$ 0.01449	$\downarrow$ 8498.24	$\bullet$ 84.9868	$\uparrow$ 0.01449	$\downarrow$ 84.9723
0.514	0	$\downarrow$ 8502.73	$\downarrow$ 85.0273	0	$\downarrow$ 85.0273
0.55	0	$\downarrow$ 8657.38	$\downarrow$ 86.5738	0	$\downarrow$ 86.5738
0.60	0	$\downarrow$ 8850.30	$\downarrow$ 88.5030	0	$\downarrow$ 88.5030
0.70	0	$\downarrow$ 9164.49	$\downarrow$ 91.6449	0	$\downarrow$ 91.6449
0.80	0	$\downarrow$ 9395.44	$\downarrow$ 93.9544	0	$\downarrow$ 93.9544
0.90	0	$\downarrow$ 9560.60	$\downarrow$ 95.6060	0	$\downarrow$ 95.6060
1.00	0	$\downarrow$ 9676.96	$\downarrow$ 96.7696	0	$\downarrow$ 96.7696

3　3 期間モデル

バイアップがある多期間レベニューマネジメントモデルの厳密な解析が難しい理由は

- 各期に予約を求める客の数（需要）が独立でない
- 将来が過去の履歴に依存するので，動的計画法において，**Bellman の最適性原理** (Bellman's optimality principle) による**逆向き反復法** (backward recursion) が使えない

ことである．

そのため，3 期間モデルについても，2 期間モデルに対する前章の方法を用いる（記号も踏襲する）．3 期間モデルにおいて，期の番号は，時間の進む方向とは逆に，1 期 (搭乗直前)，2 期，3 期（予約開始）と呼ぶ．3 期に予約できなかった客が 2 期に予約を求める確率を α とし，2 期に予約できなかった客が 1 期に予約を求める確率を β とする（図 2）．t 期に新たに来る客の数（需要）を非負の連続型確率変数 D_t とし，それらは互いに独立であり，分布関数 $F_t(x) := P\{D_t \leq x\}$ と密度関数 $f_t(x) := dF_t(x)/dx, x \geq 0$ をもち，$F_t(0) = 0, F_t(\infty) = 1$ を仮定する ($t = 1, 2, 3$)．総座席数を C とし，t 期の料金を r_t ($r_3 < r_2 < r_1$) とし，ブッキングリミットを b_t ($b_3 \leq b_2 \leq C$) とする．

この 3 期間モデルにおいて，各期に予約される座席数は

$$S_3(b_3) = \min\{b_3, D_3\},$$

$$S_2(b_2, b_3) = \begin{cases} \min\{b_2 - D_3, D_2\} & D_3 \leq b_3, \\ \min\{b_2 - b_3, D_2 + \alpha(D_3 - b_3)\} & D_3 > b_3, \end{cases}$$

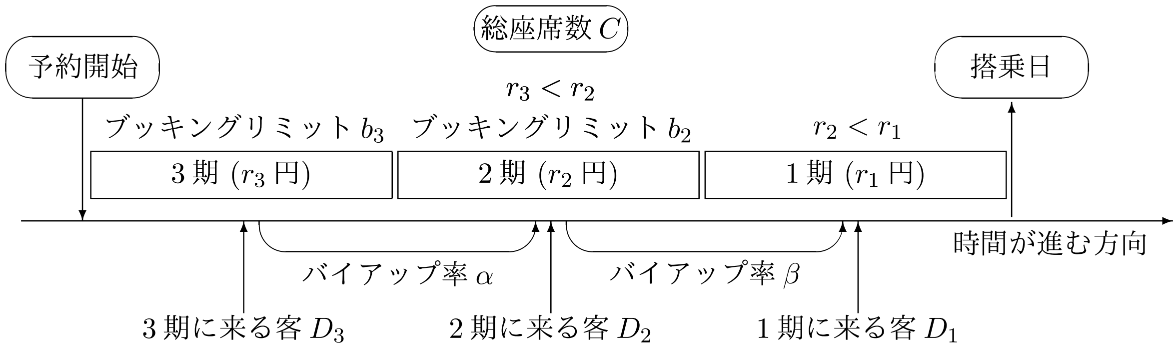

図 2: バイアップがある 3 期間静的レベニューマネジメントモデル.

$$
\begin{aligned}
&S_1(C, b_2, b_3)\\
&= \begin{cases}
\min\{C - D_2 - D_3, D_1\} & D_2 + D_3 \le b_2, D_3 \le b_3,\\
\min\{C - b_2, D_1 + \beta(D_2 + D_3 - b_2)\} & D_2 + D_3 > b_2, D_3 \le b_3,\\
\min\{C - D_2 - b_3 - \alpha(D_3 - b_3), D_1\} & D_2 + \alpha(D_3 - b_3) \le b_2 - b_3, D_3 > b_3,\\
\min\{C - b_2, D_1 + \beta[D_2 + \alpha(D_3 - b_3) - b_2 + b_3]\} & D_2 + \alpha(D_3 - b_3) > b_2 - b_3, D_3 > b_3
\end{cases}
\end{aligned}
$$

で与えられる．$D_3 > b_3$ のとき，2 期には $\alpha(D_3 - b_3)$ のバイアップ客が来ることに注意する．

これらの期待値は

$$
E[S_3(b_3)] = \int_0^{b_3} [1 - F_3(x)]dx,
$$

$$
\begin{aligned}
&E[S_2(b_2, b_3)] = b_2 - b_3 + \int_0^{b_3} F_3(x)[1 - F_2(b_2 - x)]dx\\
&- \int_0^{b_2 - b_3} F_3\left(b_3 + \frac{b_2 - b_3 - x}{\alpha}\right) F_2(x)dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E[S_1(C, b_2, b_3)] = C - b_2 + \int_0^{b_3} F_3(z)dz \int_0^{b_2 - z} f_2(y)[1 - F_1(C - z - y)]dy\\
&+ \int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3 + \frac{z - b_3}{\alpha}\right) dz \int_0^{b_2 - z} f_2(y)[1 - F_1(C - z - y)]dy\\
&- \int_0^{b_3} F_3(z)dz \int_0^{C - b_2} f_2\left(b_2 - z + \frac{C - b_2 - x}{\beta}\right) F_1(x)dx\\
&- \int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3 + \frac{z - b_3}{\alpha}\right) dz \int_0^{C - b_2} f_2\left(b_2 - z + \frac{C - b_2 - x}{\beta}\right) F_1(x)dx\\
&- \int_{b_2}^{b_2 + (C - b_2)/\beta} F_3\left(b_3 + \frac{z - b_3}{\alpha}\right) dz \int_0^{C - b_2 - \beta(z - b_2)} f_2\left(b_2 - z + \frac{C - b_2 - x}{\beta}\right) F_1(x)dx
\end{aligned}
$$

である．

従って，期待収益は 2 変数 b_2, b_3 の関数

$$E[R(C,b_2,b_3)] = r_3E[S_3(b_3)] + r_2E[S_2(b_2,b_3)] + r_1E[S_1(C,b_2,b_3)]$$

である．そして，期待収益を最大化する $b_2 = b_2^*$ と $b_3 = b_3^*$ は，連立方程式

$$\left.\frac{\partial E[R(C,b_2,b_3)]}{\partial b_2}\right|_{b_2=b_2^*,b_3=b_3^*} = \left.\frac{\partial E[R(C,b_2,b_3)]}{\partial b_3}\right|_{b_2=b_2^*,b_3=b_3^*} = 0$$

の解として得られる (必要条件)．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[R(C,b_2,b_3)]}{\partial b_2} &= r_2\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3)]}{\partial b_2} + r_1\frac{\partial E[S_1(C,b_2,b_3)]}{\partial b_2}, \qquad (5)\\ \frac{\partial E[R(C,b_2,b_3)]}{\partial b_3} &= r_3\frac{dE[S_3(b_3)]}{db_3} + r_2\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3)]}{\partial b_3} + r_1\frac{\partial E[S_1(C,b_2,b_3)]}{\partial b_3}\end{aligned}$$

である．

ここに現れる予約座席数の期待値のブッキングリミットに関する 1 階微分は，各期の需要の分布関数と密度関数の多重定積分として，次のように与えられる．まず，3 期の期待予約座席数は，ブッキングリミット b_3 を増やすと増加し，

$$\frac{dE[S_3(b_3)]}{db_3} = 1 - F_3(b_3) = P\{D_3 > b_3\} > 0$$

である．2 期の期待予約座席数については，$0 < \alpha \le 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3)]}{\partial b_2} &= 1 - \int_0^{b_3} F_3(z)f_2(b_2-z)dz - \int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3 + \frac{z-b_3}{\alpha}\right) f_2(b_2-z)dz\\ &= P\{D_3 \le b_3, D_2 + D_3 > b_2\} + P\{D_3 > b_3, D_2 + \alpha(D_3 - b_3) > b_2 - b_3\} > 0\end{aligned}$$

である．これは 1 期にバイアップ客がある確率である．2 期の期待予約座席数は，2 期のブッキングリミット b_2 を増やすと増加する．また，

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3)]}{\partial b_3} &= -1 + F_3(b_3) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\int_{b_3}^{b_2} f_3\left(b_3 + \frac{z-b_3}{\alpha}\right) F_2(b_2-z)dz\\ &= -P\{D_3 > b_3, D_2 + \alpha(D_3 - b_3) > b_2 - b_3\}\\ &\quad -\alpha P\{D_3 > b_3, D_2 + \alpha(D_3 - b_3) \le b_2 - b_3\} < 0\end{aligned}$$

である．2 期の期待予約座席数は，3 期のブッキングリミット b_3 を増やすと減少する．

1 期の期待予約座席数については，$0 < \alpha \le 1$ 及び $0 < \beta \le 1$ のとき，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial E[S_1(C,b_2,b_3)]}{\partial b_2} = -1 + [1 - (1-\beta)F_1(C-b_2)]\\ &\qquad \times \left[\int_0^{b_3} F_3(z)f_2(b_2-z)dz + \int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3 + \frac{z-b_3}{\alpha}\right) f_2(b_2-z)dz\right]\\ &+ (1-\beta)\left[\int_0^{b_3} F_3(z)dz \int_0^{C-b_2} f_2\left(b_2 - z + \frac{C-b_2-x}{\beta}\right) f_1(x)dx\right.\\ &+ \int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3 + \frac{z-b_3}{\alpha}\right) dz \int_0^{C-b_2} f_2\left(b_2 - z + \frac{C-b_2-x}{\beta}\right) f_1(x)dx\\ &\left.+ \int_{b_2}^{b_2+(C-b_2)/\beta} F_3\left(b_3 + \frac{z-b_3}{\alpha}\right) dz \int_0^{C-b_2-\beta(z-b_2)} f_2\left(b_2 - z + \frac{C-b_2-x}{\beta}\right) f_1(x)dx\right],\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E[S_1(C,b_2,b_3)]}{\partial b_3} &= (1-\alpha)\left\{F_3(b_3)\int_0^{b_2-b_3} f_2(y)[1-F_1(C-b_3-y)]dy\right.\\
&+\int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3+\frac{z-b_3}{\alpha}\right)dz\int_0^{b_2-z} f_2(y)f_1(C-z-y)dy\\
&-[1-(1-\beta)F_1(C-b_2)]\int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3+\frac{z-b_3}{\alpha}\right)f_2(b_2-z)dz\\
&-F_3(b_3)\int_0^{C-b_2} f_2\left(b_2-b_3+\frac{C-b_2-x}{\beta}\right)F_1(x)dx\\
&+\beta\left[\int_{b_3}^{b_2} F_3\left(b_3+\frac{z-b_3}{\alpha}\right)dz\int_0^{C-b_2} f_2\left(b_2-z+\frac{C-b_2-x}{\beta}\right)f_1(x)dx\right.\\
&\left.\left.+\int_{b_2}^{b_2+(C-b_2)/\beta} F_3\left(b_3+\frac{z-b_3}{\alpha}\right)dz\int_0^{C-b_2-\beta(z-b_2)} f_2\left(b_2-z+\frac{C-b_2-x}{\beta}\right)f_1(x)dx\right]\right\}
\end{aligned}
$$

である．$\alpha=0$ や $\beta=0$ の場合，及び境界線 $b_2=b_3$ 上でも明示的な式を書き下すことができるが，紙数制限のため，割愛する．

数値計算ソフトウェアの Mathematica を用いると，2 変数関数 $E[R(C,b_2,b_3)]$ の最大値を `FindMaximum` で直接求めることも，連立方程式の解を `FindRoot` で求めることもできる．

ここで，式 (5) から得られる変形料金比

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{r_2}{r_1}-\beta\right)\\
&=\frac{\left\{\begin{array}{l} P\{D_3\le b_3^*, D_2+D_3>b_2^*, D_1+\beta(D_2+D_3-b_2^*)>C-b_2^*\}\\ +\,P\{D_3>b_3^*, D_2+\alpha(D_3-b_3^*)>b_2^*-b_3^*, D_1+\beta[D_2+\alpha(D_3-b_3^*)-b_2^*+b_3^*]>C-b_2^*\}\end{array}\right\}}{P\{D_3\le b_3^*, D_2+D_3>b_2^*\}+P\{D_3>b_3^*, D_2+\alpha(D_3-b_3^*)>b_2^*-b_3^*\}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

に注目する (この結果は本研究における新発見である)．

式 (6) の右辺の分母は，ブッキングリミットが最適値 b_2^*, b_3^* のときに，1 期にバイアップ客がある確率

$$
\begin{aligned}
&P\{D_3\le b_3^*, D_2+D_3>b_2^*\}+P\{D_3>b_3^*, D_2+\alpha(D_3-b_3^*)>b_2^*-b_3^*\}\\
&=1-\int_0^{b_3^*} F_3(z)f_2(b_2^*-z)dz-\int_{b_3^*}^{b_2^*} F_3\left(b_3^*+\frac{z-b_3^*}{\alpha}\right)f_2(b_2^*-z)dz
\end{aligned}
$$

である．また，式 (6) の右辺の分子は，1 期において，予約を求める客数が空席数よりも多い確率であり，その上段が $D_3\le b_3^*$ の場合に，下段が $D_3>b_3^*$ の場合になっている．

$$
\begin{aligned}
&P\{D_3\le b_3^*, D_2+D_3>b_2^*, D_1+\beta(D_2+D_3-b_2^*)>C-b_2^*\}\\
&+P\{D_3>b_3^*, D_2+\alpha(D_3-b_3^*)>b_2^*-b_3^*, D_1+\beta[D_2+\alpha(D_3-b_3^*)-b_2^*+b_3^*]>C-b_2^*\}\\
&=1-[1-F_1(C-b_2^*)]\left[\int_0^{b_3^*} F_3(z)f_2(b_2^*-z)dz+\int_{b_3^*}^{b_2^*} F_3\left(b_3^*+\frac{z-b_3^*}{\alpha}\right)f_2(b_2^*-z)dz\right]\\
&-\left[\int_0^{b_3^*} F_3(z)dz\int_0^{C-b_2^*} f_2\left(b_2^*-z+\frac{C-b_2^*-x}{\beta}\right)f_1(x)dx\right.
\end{aligned}
$$

$$
+\int_{b_3^*}^{b_2^*} F_3\left(b_3^* + \frac{z-b_3^*}{\alpha}\right) dz \int_0^{C-b_2^*} f_2\left(b_2^* - z + \frac{C-b_2^*-x}{\beta}\right) f_1(x)dx
$$

$$
\left. + \int_{b_2^*}^{b_2^*+(C-b_2^*)/\beta} F_3\left(b_3^* + \frac{z-b_3^*}{\alpha}\right) dz \int_0^{C-b_2^*-\beta(z-b_2^*)} f_2\left(b_2^* - z + \frac{C-b_2^*-x}{\beta}\right) f_1(x)dx \right].
$$

この解釈は，2 期間モデルの変形料金比 (3) に対する解釈と同様である．

3 期間モデルの数値例を示す．総座席数を $C = 180$ とし，需要は 2 期間モデルと同様の変形正規分布 (4) に従うと仮定する．各期の料金と需要の正規分布のパラメタ値を表 2 に示す．

表 2: 3 期間モデルの数値例のパラメタ値．

期	料金	変形正規分布に従う需要 D_t				比
t	r_t	μ_t	平均	σ_t	標準偏差	σ_t/μ_t
1	600	45	47.0473	25	22.9930	0.4887
2	300	48	49.6234	25	23.3332	0.4702
3	150	57	57.7498	25	24.1184	0.4176
計		150				

図 3 に，(α, β) 平面上で最大化された期待収益 $E[R(C, b_2^*, b_3^*)]$ をプロットする．

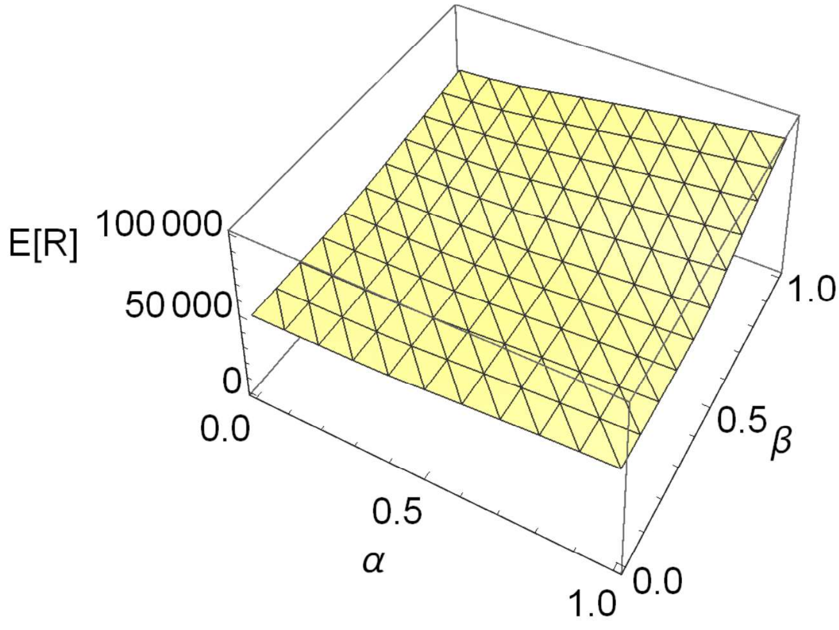

図 3: (α, β) 平面上で最大化された期待収益 $E[R(C, b_2^*, b_3^*)]$．

表 3 に，バイアップ率 α と β をもつ 3 期間モデルにおける最大期待収益を示す．

表 3: バイアップ率 α と β をもつ 3 期間モデルにおける最大期待収益.

	β \ α	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
		$b_2^* > b_3^* > 0$ の領域					$b_2^* > b_3^* = 0$ の領域					
	0	48640.5	48754.2	48930.6	49230.0	49830.1	51177.1	52591.4	53888.7	55054.7	56083.3	56975.7
	0.1	48706.6	48808.9	48972.7	49258.1	49842.6	51185.4	52609.0	53992.7	55115.2	56182.4	57127.6
	0.2	48822.8	48906.0	49047.9	49308.7	49865.6	51199.9	52638.1	53976.8	55207.6	56329.1	57345.8
	0.3	49061.4	49108.1	49206.1	49416.0	49689.6	51228.3	52692.3	54072.2	55363.3	56566.7	57687.5
	0.4	49642.7	49653.0	49666.6	49738.0	50066.3	51298.9	52816.8	54276.4	55677.3	57022.1	58315.7
β	0.5	50817.0	50893.5	50988.1	51113.0	51300.5	51776.1	53507.5	55238.0	56967.3	58694.6	60419.0
	0.6	52605.1	52845.4	53162.6	53623.1	54471.5	56479.2	58552.2	60621.2	62684.0	64737.6	66777.9
	0.7	54736.3	55194.6	55813.6	56758.3	58752.7	61164.2	63566.4	65954.4	68321.3	70658.5	72955.4
	0.8	57029.7	57738.8	58716.8	60338.6	63073.0	65801.7	68504.0	71168.0	73778.7	76319.0	78770.9
	0.9	59391.7	60379.7	61779.4	64280.4	67330.8	70340.0	73289.8	76158.0	78920.4	81552.5	84032.5
	1	61768.1	63063.5	64969.4	68161.3	71475.7	74708.3	77829.6	80807.6	83611.8	86216.6	88603.8
		$b_2^* = b_3^* > 0$ の領域			$b_2^* = b_3^* = 0$ の領域							

図 3 及び表 3 を見ると，バイアップ率 α と β が増えると，最大期待収益が増加することが分かる．最大期待収益は $\alpha = \beta = 0$ (バイアップなし) の場合に最も小さく，$\alpha = \beta = 1$ (予約できなかった全ての客がバイアップ) の場合に最も大きくなる．

表 3 は 4 つの部分に分かれている．(i) α と β がともに小さいとき，最適ブッキングリミットは $b_2^* > b_3^* > 0$ である．(ii) α が大きく β が小さい (3 期に予約できなかった多くの客は 2 期に予約を求める) とき，最適ブッキングリミットは $b_2^* > b_3^* = 0$ であるから，3 期には予約を受け付けないで，3 期に来た客のうちの多くを 2 期に買わせることで，収益を上げる．(iii) α が小さく β が大きい (2 期に予約できなかった多くの客は 1 期に予約を求める) とき，最適ブッキングリミットは $b_2^* = b_3^* > 0$ であるから，2 期に新しく予約可能枠を与えないで，1 期に買わせることで，収益を上げる．(iv) α も β も大きいときには，最適ブッキングリミットは $b_2^* = b_3^* = 0$ として，3 期にも 2 期にも予約を受け付けず，多くの客を 1 期に買うように仕向けることで，収益を上げる．

参考文献

[1] Belobaba PP, *Air Travel Demand and Airline Seat Inventory Management*, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1987.

[2] Belobaba PP, Application of a probabilistic decision model to airline seat inventory control, *Operations Research*, 37(2), pp.183–197, 1989.

[3] Belobaba PP and Weatherford LR, Comparing decision rules that incorporate customer diversion in perishable asset revenue management situations, *Decision Sciences*, 27(2), pp.343–363, Spring 1996.

[4] Bodily SE and Weatherford LR, Perishable-asset revenue management: generic and multiple-price yield management with diversion, *Omega*, 23(2), pp.173–185, 1995.

[5] Brumelle SL, McGill JI, Oum TH, Sawaki K, and Tretheway MW, Allocation of airline seats between stochastically dependent demands, *Transportation Science*, 24(3), pp.183–192, August 1990.

[6] Cross RG, *Revenue Management*, Broadway Books, 1997. 水島温夫訳, 儲からない時代に利益を生み出すRM[収益管理］のすべて，日本実業出版社，1998年10月．第4章 ダビデの敗北～ピープル・エクスプレス vs アメリカン航空．

[7] Gallego G and Topaloglu H, *Revenue Management and Pricing Analytics*, Springer Science + Business Media, 2019.

[8] Jiang H and Miglionico G, Airline network revenue management with buy-up, *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, Published online: 10 March, 2014. `http://dx.doi.org/10.1080/02331934.2014.896079`.

[9] Lee TL and Hersh M, A model for dynamic airline seat inventory control with multiple seat bookings, *Transportation Science*, 27(3), pp.252–265, August 1993.

[10] Littlewood K, Forecasting and control of passenger bookings, *Proceedings of the Twelfth Annual AGIFORS Symposium* (edited by J. Hinson), pp.95–117, Nathanya, Israel, 1972. Reprinted in the *Journal of Revenue and Pricing Management*, 4(2), pp.111–123, 2005.

[11] Pfeifer PE, The airline discount fare allocation problem, *Decision Sciences*, 20(1), pp.149–157, Winter 1989.

[12] Phillips R, *Pricing and Revenue Optimization*, Stanford University Press, 2005.

[13] Talluri KT and van Ryzin GJ, *The Theory and Practice of Revenue Management*, Springer Science + Business Media, 2004.

[14] van Ryzin GJ and Talluri KT, An introduction to revenue management, *Tutorials in Operations Research*, pp.142–194, INFORMS 2005.

[15] Walczak D, Boyd EA, and Cramer R, Revenue management, in *Quantitative Problem Solving Methods in the Airline Industry, A Modeling Methodology Handbook* (eds. C. Barnhart and B. C. Smith), Springer Science + Business Media (2012), pp.101–161.

[16] You PS, Airline seat management with rejection-for-possible-upgrade decision, *Transportation Research Part B: Methodological*, 35(5), pp.507–524, June 2001.

[17] You PS, Dynamic rationing policies for product with incremental upgrading demands, *European Journal of Operational Research*, 144, pp.128–137, 2003.