合流型の確率的推移をもつ決定過程問題について

九州工業大学・大学院工学研究院　藤田 敏治
Toshiharu Fujita
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1　はじめに

ノンシリアル動的計画における推移法則の一つである合流型推移（Converging Branch Systems）では，一般に複数の初期状態が与えられ，途中で合流を繰り返した後，最終的に一つの終端状態へ達してシステムが終了する．本報告では，この推移において（初期状態以外の）各状態が確率的に生じる場合を考え，決定過程問題として定式化し，動的計画法による再帰式（最適方程式）を導く．この種の問題では，部分問題の構成方法により幾種類かの再帰的解法が考えられるが，ここでは，1 状態変数ずつ追加する形で部分問題を構成し，再帰的関係式による解法を与える．

2　定式化

合流型の確率的推移をもつ有限段決定過程問題を考える．合流型推移においては，複数の初期状態があり，状態推移の過程で合流し，最後は 1 つの終端状態に達しシステムの終了となる．推移の過程では，一般に，状態とそれに対する決定の複数の組に対して，次の状態が確率的に生じる．そして，各状態とそれに対する決定に対し利得が与えられ，すべての利得の和を目的関数とし最大化することが目的である．

まず，

X　：有限状態空間（$X \neq \phi$）

U　：有限決定空間（$U \neq \phi$）

とし，状態変数を $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_N$ $(N > 2)$ であらわし，最初の C 個 $x_1,\ x_2\ , \ldots,\ x_C$ $(1 < C < N)$ は初期状態，x_N は終端状態とする．各状態 x_n が実際に取りうる範囲を $X_n \subset X$ とおく．また，$U_n : X_n \to 2^U \setminus \{\phi\}$ $(n = 1,\ 2, \ldots,\ N-1)$ は，状態 $x_n \in X_n$ に対し選択可能な決定全体をあたえるものとし，各状態 $x_n \in X_n$ $(n = 1,\ 2, \ldots,\ N-1)$ に対し，選択した決定を $u_n \in U_n(x_n)$ であらわす．このとき，

r_n ：$Gr(U_n) \to \mathbf{R}$：状態 x_n に対し決定 u_n を選択した際の利得 $(n = 1,\ 2, \ldots,\ N-1)$

k ：$X_N \to \mathbf{R}$ ：終了状態 x_N に対する終端利得

とする．ただし，

$$Gr(U_n) = \{(x_n, u_n) \,|\, u_n \in U_n(x_n),\ x_n \in X_n\}$$

である．

状態推移に関しては，

$$e_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & (x_j \text{ が } x_i \text{ の次の状態}) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

とおき，推移行列 $E=(e_{ij})\in\{0,1\}^{N\times N}$ を定め，合流型確率的推移法則を

$$p_n(\,\cdot\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_n})\qquad n=C+1,\ C+2,\ldots,\ N$$

であらわす．ただし，

$$I_j=\{i\,|\,e_{ij}=1\}\qquad j=C+1,\ C+2,\ldots,\ N$$

であり（便宜上，$j=1,\ 2,\ldots,\ C$ に対しては $I_j=\phi$ とする），また，添え字集合 $I=\{m_1,\ m_2,\ldots,\ m_M\}$ （$m_1<m_2<\cdots<m_M$）に対し，状態と決定の相互列：

$$x_{m_1},\ u_{m_1},\ x_{m_2},\ u_{m_2},\ldots,\ x_{m_M},\ u_{m_M}$$

を $\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I}$ とあらわす．すなわち，状態と決定の列 $\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_n}$ が与えられたとき，次状態 x_n の生じる確率が条件付確率 $p_n(x_n\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_n})$ であり，

$$\sum_{x_n\in X_n}p_n(x_n\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_n})\ =\ 1\qquad {}^\forall\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_n}$$

が成り立つ．以後，この推移を

$$x_n\sim p_n(\,\cdot\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_n})$$

とあらわす．

このとき，考える問題は，次の期待値最大化問題である．

$$\begin{array}{lll}\text{(P)} & \text{Maximize} & E\big[r_1(x_1,u_1)+r_2(x_2,u_2)+\cdots+r_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})+k(x_N)\big]\\ & \text{subject to} & x_n\sim p_n(\,\cdot\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_n})\quad n=C+1,\ C+2,\ldots,\ N\\ & & u_n\in U_n(x_n)\quad n=1,\ 2,\ldots,\ N-1.\end{array}$$

目的関数は，初期状態 $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_C$，決定 $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_{N-1}$ ($u_n\in U_n(x_n)$) および確率的推移法則 $p_{C+1},\ p_{C+2},\ldots,\ p_N$ により以下のように定まる：

$$\begin{aligned}&E\big[r_1(x_1,u_1)+r_2(x_2,u_2)+\cdots+r_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})+k(x_N)\big]\\ =&\sum_{x_{C+1},\ x_{C+2},\ldots,\ x_N}\big[r_1(x_1,u_1)+r_2(x_2,u_2)+\cdots+r_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})+k(x_N)\big]\\ &\quad\times p_{C+1}(\,x_{C+1}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{C+1}})p_{C+2}(\,x_{C+2}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{C+2}})\cdots\ p_N(\,x_N\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_N}).\end{aligned}$$

例 2.1 図 1 で表される合流型状態推移をもつ決定過程問題について考える．まず，状態数については $N=9$ であり状態変数は $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9$，初期状態は $C=5$ で $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$，終端状態は x_9 とおく．各状態 x_n ($n=1,\ 2,\ldots,\ 8$) に対応する決定は u_n で，利得は $r_n(x_n,u_n)$ ($n=1,\ 2,\ldots,\ 8$)，終端利得は $k(x_9)$ となる（図 2 参照）．

また，図 2 において

$$I_1=I_2=I_3=I_4=I_5=\phi$$

$$I_6=\{4\},\quad I_7=\{1,\ 2\},\quad I_8=\{5,\ 6\},\quad I_9=\{3,\ 7,\ 8\}$$

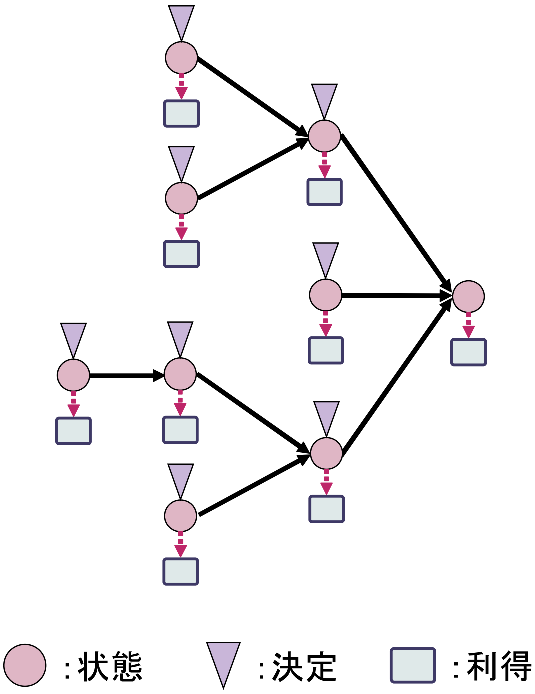

図 1: 合流型状態推移図 1

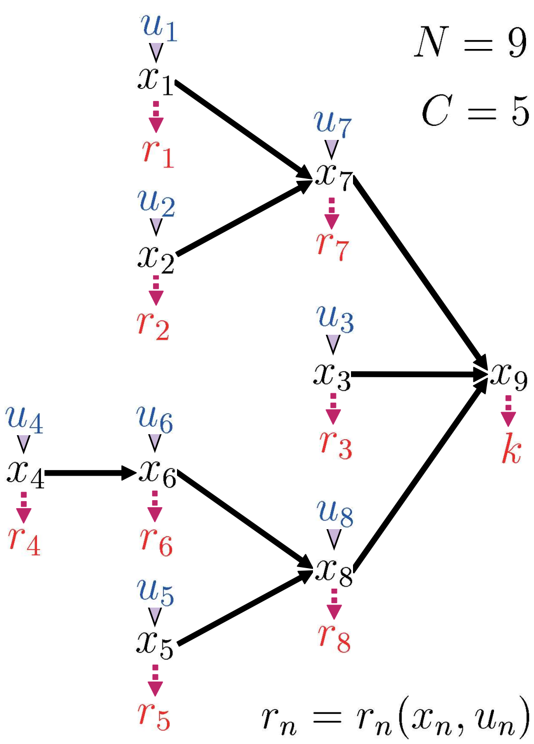

図 2: 合流型状態推移図 2

であり，状態推移は

$$
\begin{aligned}
x_6 &\sim p_6(\cdot\,|\,x_4,\ u_4) \\
x_7 &\sim p_7(\cdot\,|\,x_1,\ u_1,\ x_2,\ u_2) \\
x_8 &\sim p_8(\cdot\,|\,x_5,\ u_5,\ x_6,\ u_6) \\
x_9 &\sim p_9(\cdot\,|\,x_3,\ u_3,\ x_7,\ u_7,\ x_8,\ u_8)
\end{aligned}
$$

で与えられる．

このとき，所与の x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ に対し

$$E\big[r_1(x_1,u_1)+r_2(x_2,u_2)+\cdots+r_8(x_8,u_8)+k(x_9)\big]$$

を最大化する決定 u_n $(n=1,\ 2,\ldots,\ 8)$ の与え方（政策）を求めることが目的である． □

3　部分問題群の構成

部分問題群の構成法を与える．終端状態のみを含む部分問題（式）から開始し，順に 1 状態ずつ付け加えた部分問題を構成する．ある時点で付け加えられる状態は，その状態からの推移先すべてがが直前に構成された部分問題に含まれていなければならない．よって，初期状態は最後に付け加えられることとなる．なお，もし各時点において付け加えることができる状態が複数ある場合，その中から任意に選ぶことができるものとする．具体的な構成手順は以下のとおりである．

最初に

$$j_N \;=\; N,\quad J_N \;=\; \{j_N\}\ \big(=\ \{N\}\big)$$

とおく．j_n $(n=N,\ N-1,\ldots,\ 1)$ は，付け加える状態の添え字を表す．よって J_N の値 N は最初に考える（付け加える）状態が x_N すなわち終端状態であることを意味する．添え字集合 J_n $(n=N,\ N-1,\ldots,\ 1)$ はその時点で，部分問題に含まれるすべての状態の添え字集合をあらわす．

次に，$n=N-1,\ N-2,\ldots,\ 1$ に対し

$$B_n \;=\; \{j\in J_{n+1}\,|\,j>C,\ I_j\setminus J_{n+1}\neq\phi\}$$

とおき，$l\in B_n$ に対し（任意に選んでよい），$j_n\in I_l\setminus J_{n+1}$ をとり，

$$J_n \;=\; J_{n+1}\cup\{j_n\}$$

とおく．さらに

$$
\begin{aligned}
K_n &= \{j\in B_n\,|\,I_j\cap J_n=\phi\} \\
L_n &= \{j\in B_n\,|\,I_j\cap J_n\neq\phi\}
\end{aligned}
$$

$$M_n \;=\; \Bigg(\bigcup_{j\in L_n} I_j\Bigg)\setminus J_n$$

とおく．

このとき，$(N-n+1)$ 個の状態変数 $\{x_i\}_{i\in J_n}$ を含む部分問題群は次のように与えられ，その最適値を値関数 v^{j_n} とおく：

$$v^{j_N}(x_{j_N}) \;=\; k(x_{j_N}) \qquad x_{j_N}\in X_{j_N} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & v^{j_n}\big(x_{j_n};\langle x_m\rangle_{m\in K_n},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_n}\big) \\ = & \max_{u_{j_n},\,u_{j_{n+1}},\ldots,\,u_{j_{N-1}}} E\big[r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+ \\ & \qquad\qquad \cdots+r_{j_{N-1}}(x_{j_{N-1}},u_{j_{N-1}})+k(x_{j_N})\big] \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_{j_n}\in X_{j_n},\quad x_m\in X_m\ (m\in K_n),\quad (x_m,u_m)\in \mathrm{Gr}(U_m)\ (m\in M_n)$$
$$n=N-1,\ N-2,\ldots,\ 1,$$

ただし，$\displaystyle\bigcup_{i=n}^{N-1}L_i=\{l_1,l_2,\cdots,l_d\}$ とおくとき

$$\begin{aligned} & E\big[r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+\cdots+k(x_{j_N})\big] \\ = & \sum_{x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_d}} \Big\{\big[r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+\cdots+k(x_{j_N})\big] \\ & \qquad \times p_{l_1}(x_{l_1}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_1}})p_{l_2}(x_{l_2}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_2}})\cdots p_{l_d}(x_{l_d}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})\Big\} \end{aligned}$$

である．

なお，部分問題の構成手順から必ず，式 (1) は

$$v^N(x_N) \;=\; k(x_N) \qquad x_N\in X_N,$$

$n=1$ に対する 式 (2) は，$K_1=M_1=\phi$ から

$$v^{j_1}\big(x_{j_1};\langle x_m\rangle_{m\in K_1},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_1}\big)=v^{j_1}\big(x_{j_1}\big)$$

となり，この右辺は与えられた問題に一致する．

例 3.1 例 2.1 で扱った合流型の確率的状態推移をもつ決定過程問題について考える（図 2 参照）．最初に，$N=9$ より，$j_9=9,\ J_9=\{9\}$ を得る．これより

$$v^9(x_9) \;=\; k(x_9)$$

と定まる．

次に，$n=N-1=8$ に対し

$$B_8 \;=\; \{j\in J_9\,|\,j>5,\ I_j\setminus J_9\neq\phi\}.$$

ここで $j=9\in J_9$ に対し，$I_9=\{3,\ 7,\ 8\}$ より $I_9\setminus J_9\neq\phi$．よって

$$B_8 \;=\; \{9\}$$

である．ここで，$l=9\in B_8$ をとり，$I_9\setminus J_9=\{3,\ 7,\ 8\}$ から，(3, 7, 8 のいずれでもよいが，例えば）$j_8=3$ をとる．そして

$$J_8 \;=\; J_9\cup\{3\} \;=\; \{3,\ 9\}$$

と更新する．さらに

$$
\begin{aligned}
K_8 &= \{j \in B_8 \,|\, I_j \cap J_8 = \phi\} = \phi \\
L_8 &= \{j \in B_8 \,|\, I_j \cap J_8 \neq \phi\} = \{9\}
\end{aligned}
$$

$$
M_8 = \left(\bigcup_{j \in L_8} I_j \right) \setminus J_8 = I_9 \setminus J_8 = \{7,\ 8\}
$$

を得て，部分問題：

$$
v^3\big(x_3; x_7, u_7, x_8, u_8\big) = \max_{u_3} E[r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]
$$

が定まる．

同様にして，$n = N - 2 = 7$ に対し，

$$
B_7 = \{j \in J_8 \,|\, j > 5,\ I_j \setminus J_8 \neq \phi\} = \{9\}
$$

となり，$j_7 = 7$ を選べば，

$$
J_7 = J_8 \cup \{7\} = \{3,\ 7,\ 9\}.
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
K_7 &= \{j \in B_7 \,|\, I_j \cap J_7 = \phi\} = \phi \\
L_7 &= \{j \in B_7 \,|\, I_j \cap J_7 \neq \phi\} = \{9\}
\end{aligned}
$$

$$
M_7 = \left(\bigcup_{j \in L_7} I_j \right) \setminus J_7 = I_9 \setminus J_7 = \{8\}
$$

より，次の部分問題が

$$
v^7\big(x_7; x_8, u_8\big) = \max_{u_3,\ u_7} E[r_7(x_7, u_7) + r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]
$$

と定まる．

以後，$n = 1$ まで繰り返した結果を表 1 に示す．

$n = 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$ に対応する部分問題は，それぞれ以下のようになる：

$$
v^8(x_8; x_7) = \max_{u_8, u_7, u_3} E[r_8(x_8, u_8) + r_7(x_7, u_7) + r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]
$$

$$
v^1(x_1; x_8, x_2, u_2) = \max_{u_1, u_8, u_7, u_3} E[r_1(x_1, u_1) + r_8(x_8, u_8) + r_7(x_7, u_7) + r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]
$$

$$
v^2(x_2; x_8) = \max_{u_2, u_1, u_8, u_7, u_3} E[r_2(x_2, u_2) + r_1(x_1, u_1) + r_8(x_8, u_8) + r_7(x_7, u_7) + r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]
$$

$$
\begin{aligned}
v^6(x_6; x_5, u_5) = \max_{u_6, u_2, u_1, u_8, u_7, u_3} & E[r_6(x_6, u_6) + r_2(x_2, u_2) \\
& + r_1(x_1, u_1) + r_8(x_8, u_8) + r_7(x_7, u_7) + r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]
\end{aligned}
$$

n	B_n	j_n	J_n	K_n	L_n	M_n
$N=9$		9	$\{9\}$			
8	$\{9\}$	3	$\{3,\ 9\}$	ϕ	$\{9\}$	$\{7,\ 8\}$
7	$\{9\}$	7	$\{3,\ 7,\ 9\}$	ϕ	$\{9\}$	$\{8\}$
6	$\{7,\ 9\}$	8	$\{3,\ 7,\ 8,\ 9\}$	$\{7\}$	$\{9\}$	ϕ
5	$\{7,\ 8\}$	1	$\{1,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9\}$	$\{8\}$	$\{7\}$	$\{2\}$
4	$\{7,\ 8\}$	2	$\{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9\}$	$\{8\}$	$\{7\}$	ϕ
3	$\{8\}$	6	$\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$	ϕ	$\{8\}$	$\{5\}$
2	$\{6,\ 8\}$	5	$\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$	$\{6\}$	$\{8\}$	ϕ
1	$\{6\}$	4	$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$	ϕ	$\{6\}$	ϕ

表 1: 繰り返しの結果

$$\begin{aligned} v^5(x_5;x_6) &= \max_{u_5,u_6,u_2,u_1,u_8,u_7,u_3} E[r_5(x_5,u_5)+r_6(x_6,u_6)+r_2(x_2,u_2) \\ &\qquad +r_1(x_1,u_1)+r_8(x_8,u_8)+r_7(x_7,u_7)+r_3(x_3,u_3)+k(x_9)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^4(x_4) &= \max_{u_4,u_6,u_5,u_2,u_1,u_8,u_7,u_3} E[r_4(x_4,u_4)+r_5(x_5,u_5)+r_6(x_6,u_6)+r_2(x_2,u_2) \\ &\qquad +r_1(x_1,u_1)+r_8(x_8,u_8)+r_7(x_7,u_7)+r_3(x_3,u_3)+k(x_9)]. \end{aligned}$$

□

4 再帰式

前節で定めた最適値関数 v^{j_n} に対し，次の再帰式が成り立つ：

定理 4.1

$$v^{j_N}(x_{j_N}) = k(x_{j_N}) \tag{3}$$

(i) j_n が $e_{j_n h}=1$ なる h に対し，$I_h \cap J_{n+1} \neq \phi$ を満たすとき

$$\begin{aligned} & v^{j_n}\big(x_{j_n};\langle x_m\rangle_{m\in K_n},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_n}\big) \\ &= \max_{u_{j_n}}\Big[r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+v^{j_{n+1}}\big(x_{j_{n+1}};\langle x_m\rangle_{m\in K_{n+1}},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_{n+1}})\big)\Big] \\ &\qquad x_{j_n}\in X_{j_n},\quad x_m\in X_m\ (m\in K_n),\quad (x_m,u_m)\in \mathrm{Gr}(U_m)\ (m\in M_n) \end{aligned} \tag{4}$$

(ii) j_n が $e_{j_n h}=1$ なる h に対し，$I_h \cap J_{n+1} = \phi$ を満たすとき

$$\begin{aligned} & v^{j_n}\big(x_{j_n};\langle x_m\rangle_{m\in K_n},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_n}\big) \\ &= \max_{u_{j_n}}\Big[r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+\sum_{x_h\in X} v^{j_{n+1}}\big(x_{j_{n+1}};\langle x_m\rangle_{m\in K_{n+1}},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_{n+1}}\big)p_h\big(x_h|\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_h}\big)\Big] \\ &\qquad x_{j_n}\in X_{j_n},\quad x_m\in X_m\ (m\in K_n),\quad (x_m,u_m)\in \mathrm{Gr}(U_m)\ (m\in M_n) \end{aligned} \tag{5}$$

なお，$n=N-1$ のときは $h=N$ かつ $J_N=\{N\}$ より $I_h\cap J_N=\phi$ となるため，必ず (ii) に該当する．

証明　【(i) の場合】($n \le N-2$ の時のみ考えればよい)
j_n が $e_{j_n h}=1$ なる h に対し，$I_h \cap J_{n+1} \neq \phi$ を満たすとき，

$$L_n \ \subset \ \bigcup_{i=n+1}^{N-1} L_i$$

が成り立ち，$\displaystyle\bigcup_{i=n}^{N-1} L_i = \bigcup_{i=n+1}^{N-1} L_i = \{l_1, l_2, \cdots, l_d\}$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}
& v^{j_n}\big(x_{j_n}; \langle x_m\rangle_{m\in K_n}, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in M_n}\big) \\
= \ & \max_{u_{j_n}, u_{j_{n+1}}, \ldots, u_{j_{N-1}}} E\big[r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}}, u_{j_{n+1}}) + k(x_{j_N})\big] \\
= \ & \max_{u_{j_n}, u_{j_{n+1}}, \ldots, u_{j_{N-1}}} \sum_{x_{l_1}, x_{l_2}, \cdots, x_{l_d}} \Big(\big[r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}}, u_{j_{n+1}}) + \cdots + k(x_{j_N})\big] \\
& \qquad \times p_{l_1}(x_{l_1} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_1}}) p_{l_2}(x_{l_2} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_2}}) \cdots p_{l_d}(x_{l_d} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})\Big).
\end{aligned}$$

$\displaystyle\bigcup_{i=n}^{N-1} L_i \subset J_{n+1}$ より $\displaystyle j_n \notin \bigcup_{i=n}^{N-1} L_i$ なので

$$\begin{aligned}
& v^{j_n}\big(x_{j_n}; \langle x_m\rangle_{m\in K_n}, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in M_n}\big) \\
= & \max_{u_{j_n}, u_{j_{n+1}}, \ldots, u_{j_{N-1}}} \Big\{r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + \sum_{x_{l_1}, x_{l_2}, \cdots, x_{l_d}} \Big(\big[r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}}, u_{j_{n+1}}) + \cdots + k(x_{j_N})\big] \\
& \qquad \times p_{l_1}(x_{l_1} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_1}}) p_{l_2}(x_{l_2} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_2}}) \cdots p_{l_d}(x_{l_d} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})\Big)\Big\} \\
= \ & \max_{u_{j_n}} \Big\{r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + \max_{u_{j_{n+1}}, \ldots, u_{j_{N-1}}} \sum_{x_{l_1}, x_{l_2}, \cdots, x_{l_d}} \Big(\big[r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}}, u_{j_{n+1}}) + \cdots + k(x_{j_N})\big] \\
& \qquad \times p_{l_1}(x_{l_1} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_1}}) p_{l_2}(x_{l_2} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_2}}) \cdots p_{l_d}(x_{l_d} \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})\Big)\Big\} \\
= \ & \max_{u_{j_n}} \Big\{r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + \max_{u_{j_{n+1}}, \ldots, u_{j_{N-1}}} E\big[r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}}, u_{j_{n+1}}) + \cdots + k(x_{j_N})\Big)\Big\} \\
= \ & \max_{u_{j_n}} \Big[r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + v^{j_{n+1}}\big(x_{j_{n+1}}; \langle x_m\rangle_{m\in K_{n+1}}, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in M_{n+1}}\big)\Big].
\end{aligned}$$

$\square$

【(ii) の場合】
(ii-a) $n=N-1$ の時
$n=N-1$ のとき，$h=N$ かつ $J_N=\{N\}$ より $I_h \cap J_N = \phi$ となるため，必ずこちらの場合に該当．また，

$$J_N=\{N\}, \quad B_{N-1}=\{N\}, \quad J_{N-1}=\{x_{N-1},\ N\}$$

より

$$K_{N-1}=\phi, \quad L_{N-1}=\{N\}.$$

よって，部分問題：

$$v^N(x_N) \ = \ k(x_N)$$

$$v^{j_{N-1}}\big(x_{j_{N-1}}; \langle x_m, u_m\rangle_{m\in M_{N-1}}\big) \ = \ \max_{u_{j_{N-1}}} E\big[r_{j_{N-1}}(x_{j_{N-1}}, u_{j_{N-1}}) + k(x_{j_N})\big]$$

に対し

$$\begin{aligned}
&v^{j_{N-1}}\bigl(x_{j_{N-1}};\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_{N-1}}\bigr)\\
=\ &\max_{u_{j_{N-1}}}\Bigl[r_{j_{N-1}}(x_{j_{N-1}},u_{j_{N-1}})+\sum_{x_N\in X}v^N\bigl(x_N\bigr)p_N\bigl(x_N|\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_N}\bigr)\Bigr]
\end{aligned}$$

を示せばよい．

$\displaystyle\bigcup_{i=N-1}^{N-1}L_i=L_{N-1}=\{N\}$ より

$$\begin{aligned}
&v^{j_{N-1}}\bigl(x_{j_{N-1}};\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_{N-1}}\bigr)\\
=\ &\max_{u_{j_{N-1}}}\Bigl[\sum_{x_N}\bigl[r_{j_{N-1}}(x_{j_{N-1}},u_{j_{N-1}})+k(x_N)\bigr]p_N(x_N\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_N})\Bigr]\\
=\ &\max_{u_{j_{N-1}}}\Bigl[r_{j_{N-1}}(x_{j_{N-1}},u_{j_{N-1}})+\sum_{x_N}k(x_N)p_N(x_N\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_N})\Bigr]\\
=\ &\max_{u_{j_{N-1}}}\Bigl[r_{j_{N-1}}(x_{j_{N-1}},u_{j_{N-1}})+\sum_{x_N\in X}v^N\bigl(x_N\bigr)p_N\bigl(x_N|\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_N}\bigr)\Bigr]
\end{aligned}$$

(ii-b) $n\le N-2$ の時

j_n が $e_{j_nh}=1$ なる h に対し，$I_h\cap J_{n+1}=\phi$ を満たすとき，

$$L_n\setminus\Bigl(\bigcup_{i=n+1}^{N-1}L_i\Bigr)\ =\ \{h\}$$

が成り立つので，$\displaystyle\bigcup_{i=n+1}^{N-1}L_i=\{l_1,l_2,\cdots,l_d\}$ とおくと，$\displaystyle\bigcup_{i=n}^{N-1}L_i=\{l_1,l_2,\cdots,l_d,h\}$ である．よって

$$\begin{aligned}
&v^{j_n}\bigl(x_{j_n};\langle x_m\rangle_{m\in K_n},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_n}\bigr)\\
=\ &\max_{u_{j_n},u_{j_{n+1}},\dots,u_{j_{N-1}}}E\bigl[r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+k(x_{j_N})\bigr]\\
=\ &\max_{u_{j_n},u_{j_{n+1}},\dots,u_{j_{N-1}}}\sum_{x_{l_1},\cdots,x_{l_d},x_h}\Bigl(\bigl[r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+\cdots+k(x_{j_N})\bigr]\\
&\times p_{l_1}(x_{l_1}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_1}})\cdots p_{l_d}(x_{l_d}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})p_h(x_h\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_h})\Bigr).
\end{aligned}$$

$\displaystyle\bigcup_{i=n}^{N-1}L_i\subset J_{n+1}$ より $\displaystyle j_n\notin\bigcup_{i=n}^{N-1}L_i$ なので

$$\begin{aligned}
&v^{j_n}\bigl(x_{j_n};\langle x_m\rangle_{m\in K_n},\langle x_m,u_m\rangle_{m\in M_n}\bigr)\\
=&\max_{u_{j_n},u_{j_{n+1}},\dots,u_{j_{N-1}}}\Bigl\{r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+\sum_{x_{l_1},\cdots,x_{l_d},x_h}\Bigl(\bigl[r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+\cdots+k(x_{j_N})\bigr]\\
&\times p_{l_1}(x_{l_1}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_1}})\cdots p_{l_d}(x_{l_d}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})p_h(x_h\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_h})\Bigr)\Bigr\}\\
=\ &\max_{u_{j_n}}\Bigl\{r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+\max_{u_{j_{n+1}},\dots,u_{j_{N-1}}}\sum_{x_{l_1},\cdots,x_{l_d},x_h}\Bigl(\bigl[r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+\cdots+k(x_{j_N})\bigr]\\
&\times p_{l_1}(x_{l_1}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_1}})\cdots p_{l_d}(x_{l_d}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})p_h(x_h\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_h})\Bigr)\Bigr\}\\
=\ &\max_{u_{j_n}}\Bigl\{r_{j_n}(x_{j_n},u_{j_n})+\max_{u_{j_{n+1}},\dots,u_{j_{N-1}}}\sum_{x_h}\ \sum_{x_{l_1},\cdots,x_{l_d}}\Bigl(\bigl[r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}},u_{j_{n+1}})+\cdots+k(x_{j_N})\bigr]\\
&\times p_{l_1}(x_{l_1}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_1}})\cdots p_{l_d}(x_{l_d}\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_{l_d}})\Bigr)p_h(x_h\,|\,\langle x_m,u_m\rangle_{m\in I_h})\Bigr\}.
\end{aligned}$$

$I_h \cap \{j_{n+1}, j_{n+2}, \ldots, j_{N-1}\} = \phi$ より

$$\begin{aligned}
& v^{j_n}\big(x_{j_n}; \langle x_m\rangle_{m\in K_n}, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in M_n}\big) \\
= \;& \max_{u_{j_n}} \Big\{ r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + \sum_{x_h} \Big(\max_{u_{j_{n+1}},\ldots,u_{j_{N-1}}} E\big[r_{j_{n+1}}(x_{j_{n+1}}, u_{j_{n+1}}) + \\
& \qquad \cdots + k(x_{j_N})\big]\Big) p_h(x_h \,|\, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_h}) \Big\} \\
= \;& \max_{u_{j_n}} \Big[r_{j_n}(x_{j_n}, u_{j_n}) + \sum_{x_h} v^{j_{n+1}}\big(x_{j_{n+1}}; \langle x_m\rangle_{m\in K_{n+1}}, \langle x_m, u_m\rangle_{m\in M_{n+1}}\big) p_h\big(x_h | \langle x_m, u_m\rangle_{m\in I_h}\big)\Big]
\end{aligned}$$

□

例 4.1 例 3.1 で定義した部分問題群に対し再帰式を求める．まず，

$$v^9(x_9) \;=\; k(x_9).$$

次いで，$v^9(x_9)$ と

$$v^3\big(x_3; x_7, u_7, x_8, u_8\big) \;=\; \max_{u_3} E[r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]$$

の間の再帰式だが，このとき，$j_8 = 3$ に該当し，$e_{39} = 1$（すなわち $h = 9$）なので $I_9 \cap J_9$ が空集合か否かが問題となる．実際，$I_9 = \{3,\ 7,\ 8\}$，$J_9 = \{9\}$ であるから $I_9 \cap J_9 = \phi$. したがって，定理の (ii) の場合となり再帰式は

$$v^3(x_3; x_7, u_7, x_8, u_8) \;=\; \max_{u_3} \Big(r_3(x_3, u_3) + \sum_{x_9\in X} v^9(x_9) p_9(x_9 \,|\, x_3, u_3, x_7, u_7, x_8, u_8)\Big)$$

が成り立つ．

次に，$v^3(x_3; x_7, u_7, x_8, u_8)$ と

$$v^7(x_7; x_8, u_8) \;=\; \max_{u_7, u_3} E[r_7(x_7, u_7) + r_3(x_3, u_3) + k(x_9)]$$

の間の再帰式について考える．このとき，$j_7 = 7$ に該当し，$e_{79} = 1$（すなわち $h = 9$）である．$I_9 = \{3,\ 7,\ 8\}$，$J_8 = \{3,\ 9\}$ より $I_9 \cap J_8 \neq \phi$ となり，今度は定理の (ii) の場合となる．よって次の再帰式を得る：

$$v^7(x_7; x_8, u_8) \;=\; \max_{u_7} \big(r_7(x_7, u_7) + v^3(x_3; x_7, u_7, x_8, u_8)\big).$$

以後，同様にして再帰式群：

$$\begin{aligned}
v^8(x_8; x_7) &= \max_{u_8} \big(r_8(x_8, u_8) + v^7(x_7; x_8, u_8)\big) \\
v^1(x_1; x_2, u_2, x_8) &= \max_{u_1} \Big(r_1(x_1, u_1) + \sum_{x_7\in X} v^8(x_8; x_7) p_7(x_7 \,|\, x_1, u_1, x_2, u_2)\Big) \\
v^2(x_2; x_8) &= \max_{u_2} \big(r_2(x_2, u_2) + v^1(x_1; x_2, u_2, x_8)\big) \\
v^6(x_6; x_5, u_5) &= \max_{u_6} \Big(r_6(x_6, u_6) + \sum_{x_8\in X} v^2(x_2; x_8) p_8(x_8 \,|\, x_5,\ u_5,\ x_6,\ u_6)\Big) \\
v^5(x_5; x_6) &= \max_{u_5} \big(r_5(x_5, u_5) + v^6(x_6; x_5, u_5)\big) \\
v^4(x_4) &= \max_{u_4} \Big(r_4(x_4, u_4) + \sum_{x_6\in X} v^5(x_5; x_6) p_6(x_6 \,|\, x_4, u_4)\Big)
\end{aligned}$$

を得る. □

謝辞

本研究は科研費 15K05004 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] U. Bertelé and F. Brioschi: *Nonserial Dynamic Programming* Academic Press, New York, 1972.

[2] A.O. Esogbue and N.A. Warsi, A High-level Computing Algorithm for Diverging and Converging Branch Nonserial Dynamic Programming Systems, Computers and Mathematics with Applications, 12, pp.719–732, 1986.

[3] A.O. Esogbue, A High Level Dynamic Programming Algorithm for Processing Nonserial Looped System, Computers and Mathematics with Applications, 16, 801–813, 1988.

[4] T. Fujita, 結合型評価をもつ相互依存型決定過程, 京都大学数理解析研究所講究録 1802, pp.78–84, 2012.

[5] T. Fujita, Three Recursive Approaches for Decision Processes with a Converging Branch System, Bulletin of the Kyushu Institute of Technology. Pure and applied mathematics, 65, pp. 1–21, 2018.

[6] T. Fujita, N. Saikawa, 合流型推移をもつ決定過程について, 京都大学数理解析研究所講究録 2078, pp.250–256, 2018.

[7] G.L. Nemhauser: *Introduction to Dynamic Programming* Wiley, NY, 1966.