多変数留数の計算アルゴリズム III

金沢大学・理工研究域　小原　功任 [*]
Katsuyoshi OHARA
Faculty of Mathematics and Physics
Institute of Science and Engineering
Kanazawa University

新潟大学・大学院自然科学研究科　田島　慎一 [†]
Shinichi TAJIMA
Graduate School of Science and Technology
Niigata University

1　はじめに

本稿では，多変数留数を exact に計算するアルゴリズム ([6, 7]) について，その高速化手法を議論する．まず，Griffiths-Harris [1] に基づいて，多変数留数の解析的定義を述べよう．

定義 1. 領域 $U \subset \mathbf{C}^n$ 上の正則関数の組 $F = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ が regular sequence をなし，また，U における $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の共通零点は一点 $\beta \in U$ だけであるとする．このとき U 上で正則な関数 $\varphi(x)$ に対し，積分

$$\mathrm{Res}_\beta \left(\frac{\varphi}{f_1 \cdots f_n} dx \right) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^n \int_{\Gamma(\beta)} \frac{\varphi(x)}{f_1(x) \cdots f_n(x)} dx$$

を**多変数留数** (Grothendieck local residue) という．ここで $\Gamma(\beta) = \{x \in U \mid \|f_1(x)\| = \varepsilon, \ldots, \|f_n(x)\| = \varepsilon\}$ は，十分小さな $\varepsilon > 0$ で定まる実 n 次元サイクルである．

[*] ohara@se.kanazawa-u.ac.jp,　〒9201192 金沢市角間町
[†] tajima@math.tsukuba.ac.jp

すぐに分かるように，実 n 次元サイクル $\Gamma(\beta)$ の形状は非常に複雑であり，この積分から多変数留数を計算することは一般には困難である．したがって多変数留数の満す性質をうまく用いて，代数的に計算することが目標となる．特に，正則関数の組 F が多項式で与えられているときに，多変数留数の exact な計算を与える具体的なアルゴリズムを示し，計算代数システムに実装することが目的である．

共通零点 β を固定したとき，正則関数 φ に，多変数留数を対応させる線形写像 (留数写像) $\varphi \mapsto \mathrm{Res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1\cdots f_n}dx\right)$ は，超関数とみなすことができる．しかも，この超関数は $F=\{f_1,\ldots,f_n\}$ から定まる偏微分作用素 $T_F=\sum_\alpha c_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ により，$\mathrm{Res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1\cdots f_n}dx\right)=(T_F\varphi)|_{x=\beta}$ と表すことができる．したがって，偏微分作用素 T_F を知ることは，多変数留数を求めることとほとんど同じである．よって，D 加群，代数的局所コホモロジー，ネーター作用素などの手法を用いて，偏微分作用素 T_F を構成する．

以下では，主に文献 [7] に沿って多変数留数の計算アルゴリズムを概説し，さらに計算アルゴリズムの高速化について述べる．われわれのアルゴリズムにおいては，計算量の観点からワイル代数 $D_n=K\langle x,\partial\rangle$ におけるグレブナー基底を用いることは避け，多項式環 $K[x]$ における問題へと帰着させる．

2 代数的局所コホモロジー群と留数写像

複素数体 $\mathbf{C}$ の部分体 K で, $K[x]=K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ における既約分解アルゴリズムが働くような体を考える．例えば $K=\mathbf{Q}$ である．このとき $K[x]$ イデアルの準素イデアル分解が計算可能であることはよく知られている．多項式列 $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}\subset K[x]$ が regular sequence であるならば，F の生成するイデアル $I=\langle F\rangle$ は零次元であり，逆も成り立つ．以下，F は regular sequence と仮定する．したがって，共通零点集合 $Z=V_{\mathbf{C}}(I)$ は有限集合である．

共通零点集合 Z に台をもつ代数的局所コホモロジー群

$$H^n_{[Z]}(K[x])=\lim_{k\to\infty}\mathrm{Ext}^n_{K[x]}(K[x]/(\sqrt{I})^k,K[x]).$$

と，その元 $\sigma_F=\left[\frac{1}{f_1\cdots f_n}\right]$ を考える．零点 $\beta\in Z$ における留数写像は代数的局所コホモロジー類のみによって決まる．すなわち，$\mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi dx}{f_1\cdots f_n})=\mathrm{Res}_\beta(\varphi\sigma_F dx)$ である．

準素イデアル分解 $I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_N$ と零点集合の既約分解 $Z=Z_1\cup\cdots\cup Z_N$ が対応するが $(Z_\lambda=V_{\mathbf{C}}(I_\lambda))$，このとき代数的局所コホモロジー群もまた直和分解する．

$$H^n_{[Z]}(K[x])=H^n_{[Z_1]}(K[x])\oplus\cdots\oplus H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])\oplus\cdots\oplus H^n_{[Z_\ell]}(K[x])$$

よって，σ_F は，

$$\sigma_F = \sigma_{F,1} + \cdots + \sigma_{F,\lambda} + \cdots + \sigma_{F,\ell}, \qquad \sigma_{F,\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$$

と表される．特に，$\beta \in Z_\lambda$ ならば $\mathrm{Res}_\beta(\varphi\sigma_F dx) = \mathrm{Res}_\beta(\varphi\sigma_{F,\lambda} dx)$ となる．よって留数写像は既約成分 Z_λ ごとに考えてよい．

いま，素イデアル $\sqrt{I_\lambda}$ の生成系 $\{h_1, \ldots, h_n\}$ をひとつとる．代数的局所コホモロジー類

$$\delta_{Z_\lambda} = \left[\frac{J_\lambda}{h_1 h_2 \cdots h_n}\right] \in H^n_{[Y]}(K[x]), \qquad \left(J_\lambda = \det\left[\frac{\partial h_j}{\partial x_j}\right]_{ij} \right)$$

を，Z_λ に台をもつデルタ関数という．このとき，$H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ は D 加群としてデルタ関数 δ_{Z_λ} で単項生成されることが知られている．つまり，

$$\sigma_{F,\lambda} = T^*_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda} \tag{1}$$

となる偏微分作用素 $T_{F,\lambda} \in D_n$ が存在するが (記号 * は形式随伴)，このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\beta(\frac{\varphi dx}{f_1 \cdots f_n}) &= \mathrm{Res}_\beta(\varphi\sigma_F dx) \\
&= \mathrm{Res}_\beta(\varphi\sigma_{F,\lambda} dx) \\
&= \mathrm{Res}_\beta(\varphi \cdot (T^*_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda})dx) \\
&= \mathrm{Res}_\beta((T_{F,\lambda}\varphi) \cdot \delta_{Z_\lambda} dx) \\
&= (T_{F,\lambda}\varphi)|_{x=\beta}
\end{aligned}$$

であるから，$T_{F,\lambda}$ は $\beta \in Z_\lambda$ における留数写像を与える偏微分作用素となっている．したがって留数写像全体は，既約成分と偏微分作用素の組の集合

$$\{(T_{F,\lambda}, Z_\lambda) \mid \lambda = 1, 2, \ldots, N\}$$

によって記述されると考えてよい．

さて，式 (1) を満す偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ はどのようにして求めればいいだろうか．それを実現するのが，ネーター作用素と零化イデアルである．

3　準素イデアルとネーター作用素

この節では，$J = \langle g_1, \ldots, g_\mu \rangle$ は $K[x]$ 上の零次元準素イデアルとする．このとき，準素イデアル J と素イデアル $\sqrt{J}$ の関係を偏微分作用素を用いて表すことができる．つまり J の重複度を

$$m = \dim_K(K[x]/J)/\dim_K(K[x]/\sqrt{J})$$

とすると，関係式

$$J = \{h \in K[x] \mid L_1 h, L_2 h, \dots, L_m h \in \sqrt{J}\}$$

を満す m 個の偏微分作用素 $L_1, L_2, \dots, L_m \in D_n$ が存在する．この $L_1, L_2, \dots, L_m$ を (L. Ehrenpreis の意味で) ネーター作用素という．さらに交換子を用いた次の補題が知られている．

補題 1 (cf. [2])**.** 偏微分作用素 $P \in D_n$ が $PJ \subset \sqrt{J}$ を満すための必要十分条件は

$$\{Pg_1, Pg_2, \dots, Pg_\mu\} \subset \sqrt{J} \quad \text{かつ} \quad [P, x_i]J \subset \sqrt{J} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

である．

零次元準素イデアル J が与えられたとき，ネーター作用素を具体的に計算したい．ここで，一般性を失わずに $\mathrm{ord}(L_1) \le \mathrm{ord}(L_2) \le \cdots \le \mathrm{ord}(L_m)$ および $L_1 = 1$ と仮定してよい．いま，$K[x]/\sqrt{J}$ が体であることに注意して，ネーター作用素の張る $K[x]/\sqrt{J}$-ベクトル空間

$$\mathbf{NT} = \mathbf{NT}(J) = \bigoplus_{i=1}^{m} (K[x]/\sqrt{J})\, L_i$$

とその部分空間の族

$$\mathbf{NT}^{(k)} = \{L \in \mathbf{NT} \mid \mathrm{ord}(L) \le k\}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

を考える．先の補題より $P \in \mathbf{NT}^{(k)}$ となる必要十分条件は, 任意の $1 \le j \le \mu, 1 \le i \le n$ に対して

$$Pg_j \in \sqrt{J} \quad \text{かつ} \quad [P, x_i] \in \mathbf{NT}^{(k-1)} \tag{2}$$

となることである．これはメンバーシップ問題の連立系であるから，シチジーを用いて解くことができる．さらに，$\dim_{(K[x]/\sqrt{J})} \mathbf{NT} = m$ であるから，十分大きな整数 r をとると，$\mathbf{NT}^{(r)} = \mathbf{NT}$ となるので，高々 r 回解けばよい．シチジーを用いたアルゴリズムについては，文献 [7] の Algorithm 3 を参照されたい．

ここでは高速化のために，未定係数法を用いて帰納的に計算するアルゴリズムを提案する．素イデアル $\sqrt{J}$ のグレブナー基底を $G = \{h_1, \dots, h_\eta\}$ とする．さらに，代数拡大体 $K[x]/\sqrt{J}$ の K-ベクトル空間としての単項式基底を $\{x^{\gamma_1}, x^{\gamma_2}, \dots, x^{\gamma_\ell}\}$ とする．

まず初期ステップでは，$L_1 = 1$, $\mathbf{NT}^{(0)} = K[x]/\sqrt{J}$ とできる．次に，第 k ステップでは，$\mathbf{NT}^{(k-1)}$ のモニックな基底が $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ だったとする．

$$P = \sum_{|\alpha| \le k} \sum_{j=1}^{\ell} a_{j,\alpha} x^{\gamma_j} \partial^\alpha$$

と置く．先の補題より，未定係数 $a_{j,\alpha}$, $c_{i,j,\alpha}$ に関する連立方程式

$$\sum_{|\alpha|\le k}\sum_{j=1}^{\ell} a_{j,\alpha}\,\mathrm{nf}_G(x^{\gamma_j}(\partial^\alpha g_i)) = 0$$

$$\sum_{|\alpha|\le k}\sum_{j=1}^{\ell} a_{j,\alpha}\,\mathrm{nf}_G([x^{\gamma_j}\partial^\alpha, x_j]) + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{\ell} c_{i,j,\alpha}\,\mathrm{nf}_G(x^{\gamma_j}L_i) = 0$$

が得られる．nf_G は，グレブナー基底 G による正規形である．ただし記号を拡張して，多項式 f に対して，$\mathrm{nf}_G(f\partial^\alpha) := \mathrm{nf}_G(f)\partial^\alpha$ とする．この連立方程式の解で k 階項が消えないものを用いて，$\mathbf{NT}^{(k)} \setminus \mathbf{NT}^{(k-1)}$ の元を構成できる．

最後に帰納法の終了条件は，$\dim_{(K[x]/\sqrt{J})} \mathbf{NT}^{(k)} = m$ となったときである．以上より，未定係数法によるアルゴリズムが構成できた．

4 零化イデアル

多項式列 $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset K[x]$ を regular sequence とする．代数的局所コホモロジー類 $\sigma_F \in H^n_{[Z]}(K[x])$ の零化左イデアル $\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_F) = \{P \in D_n \mid P\sigma_F = 0\}$ を求めたい．ここでは，D_n におけるグレブナー基底による一般的な方法ではなく，計算量の観点から，多項式環のグレブナー基底を用いた再帰的な計算法について述べる．

まず非負整数 k に対し，$\mathcal{A}^{(k)} = \{P \in \mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_F) \mid \mathrm{ord}(P) \le k\}$ と置く．$\mathcal{A}^{(k)}$ は $K[x]$ 加群である．まず，σ_F の定義から，任意の $f_i \in F$ に対して，$f_i\sigma_F = 0$ を得る．つまり，$\mathcal{A}^{(0)} = \langle F\rangle(= I)$ である．さらに $\mathcal{A}^{(k)}$ については次の補題が成立する．

補題 2. $P \in D_n$ とする．もし $P \in \mathcal{A}^{(k)}$ ならば，$[P, f_i] \in \mathcal{A}^{(k-1)}$ である．逆に，すべての $1 \le i \le n$ について $[P, f_i] \in \mathcal{A}^{(k-1)}$ ならば，ある多項式 $c \in K[x]$ が存在して，$P + c \in \mathcal{A}^{(k)}$ となる．

零化作用素 $P \in \mathcal{A}^{(k)}$ から，零階項を除いた作用素 P' を P の主部ということにする．明らかに $[P, f_i] = [P', f_i]$ であるので，この補題は P の主部の性質について述べたものである．つまり主部はメンバーシップ問題の連立方程式

$$[P, f_1], [P, f_2], \ldots, [P, f_n] \in \mathcal{A}^{(k-1)}$$

の解である．したがって，シチジーを用いて解を求めることができる．さらに後半では，主部から零化作用素が構成できることを主張する．この部分についてもシチジーが利用で

きる．零化作用素の具体的な計算法については，文献 [4] の Algorithm 4,5 を参照されたい．

5　計算アルゴリズム

既に述べたように，多項式列 $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が regular sequence のときに，代数的局所コホモロジー類 $\sigma_F = \left[\frac{1}{f_1 \cdots f_n}\right]$ を考える．$K[x]$ イデアル $I = \langle F \rangle$ の準素イデアル分解 $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_N$ に対応して，零点集合の既約分解 $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_N$ と代数的局所コホモロジー類の分解

$$\sigma_F = \sigma_{F,1} + \sigma_{F,2} + \cdots + \sigma_{F,N}$$

が生じる．われわれの目標は $\sigma_{F,\lambda} = T^*_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ を満す偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ を具体的に構成することである．前節までに述べた方法により，それぞれの $\mathbf{NT}(I_\lambda)$ と，ある r までの $\mathcal{A}^{(r)}$ を具体的に求めることができる．

まずデルタ関数の定義から，その零化左イデアルは，$\mathrm{Ann}_{D_n}(\delta_{Z_\lambda}) = D_n\sqrt{I_\lambda}$ である．よって，$T_{F,\lambda}$ は $D_n \bmod D_n\sqrt{I_\lambda}$ の元であると解釈できる．

F のヤコビ行列式 $J_F = \det\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right)$ と準素イデアル I_λ の重複度 m_λ を考えよう．このとき，次のことが知られている．

定理 1 ([4, 8])**.** *$\tau \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ とする．$\mathrm{Ann}_{D_n}(\sigma_F) \subset \mathrm{Ann}_{D_n}(\tau)$ かつ $J_F\tau = m_\lambda\delta_{F,\lambda}$ ならば，$\tau = \sigma_{F,\lambda}$ である．*

定理 2 ([4])**.** *あるモニックな偏微分作用素 $S^* \in D_n$ と多項式 $h \in K[x]$ が存在して，次のふたつが同値となる．*

(1) $\sigma_{F,\lambda} = S^*h\delta_{Z_\lambda}$.
(2) $J_FS^*h - m_\lambda \in D_n\sqrt{I_\lambda}$.

定理 3. *準素イデアル I_λ のネーター作用素を $L_1, L_2, \ldots, L_{m_\lambda}$ とし，$R_i = L_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, m_\lambda)$ とするとき，*

$$T^*_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda} \in \mathrm{Span}_K\{R_i(K[x]/\sqrt{I_\lambda})\delta_{Z_\lambda} \mid i = 1, 2, \ldots, m_\lambda\}$$

となる．

以上のことから，既約成分 Z_λ において，偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ は次の手順で計算できる．まず，十分大きな r までの $\mathcal{A}^{(r)}$ を求めておく．次に $K[x]/\sqrt{I_\lambda}$ の K ベクトル空間

としての単項式基底と，$\mathbf{NT}(I_\lambda)$ の基底 $\{L_1, L_2, \ldots, L_{m_\lambda}\}$ を求める．次に未定多項式 $s_1, s_2, \ldots, s_{m_\lambda - 1} \in K[x]/\sqrt{I_\lambda}$ によって，

$$S^*_{F,\lambda} \equiv R_{m_\lambda} + R_{m_\lambda-1}s_{m_\lambda-1}(x) + \cdots + R_2 s_2(x) + s_1(x). \quad (\mathrm{mod}\ D_n\sqrt{I_\lambda})$$

と置く．$\mathcal{A}^r\sigma_{F,\lambda} = \{0\}$ であるから，メンバーシップ問題

$$\mathcal{A}^{(r)}S^*_{F,\lambda} \subset D_n\sqrt{I_\lambda}$$

を得る．これを未定係数に関する連立方程式と解釈し，解く．解の存在は保証されている．次に，未定多項式 $h \in K[x]/\sqrt{I_\lambda}$ をとり，メンバーシップ問題 $J_F S^* h - m_\lambda \in D_n\sqrt{I_\lambda}$ を考える．これを未定係数に関する連立方程式と解釈し，解く．最後に，$T_{F,\lambda} = S^*_{F,\lambda}h$ としたものが求める偏微分作用素である．

参考文献

[1] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.

[2] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, the third revised edition, North-Holland, 1990.

[3] S. Tajima, On Noether differential operators attached to a zero-dimensional primary ideal — a shape basis case —, Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 357–366, Kyushu Univ. Press, 2005.

[4] 田島慎一, Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1431**(2005), 123–136.

[5] S. Tajima, An algorithm for computing exponential polynomial solutions of constant coefficients holonomic PDE's — generic case —, in Methods of Complex and Clifford Analysis, eds. Le Hung Son, W. Tutschke and S. Jain, 335–344, SAS International Publ., 2006.

[6] K. Ohara and S. Tajima, An algorithm for computing Grothendieck local residues I: shape basis case, Mathematics in Computer Science **13** (2019), 205–216.

[7] K. Ohara and S. Tajima, An algorithm for computing Grothendieck local residues II: general case, to appear in Mathematics in Computer Science.

[8] S. Tajima and Y. Nakamura, Computational aspects of Grothendieck local residues, Séminaires et Congrès **10** (2005), 287–305.