

# A型量子群の既約最高ウェイト加群の結晶基底と Hive モデル

## Crystal bases of irreducible highest weight modules over a quantum group of type A and the hive model

東邦大学大学院理学研究科 成澤 翔大

SHOTA NARISAWA

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TOHO UNIVERSITY \*1

東邦大学理学部 白柳 潔

KIYOSHI SHIRAYANAGI

FACULTY OF SCIENCE, TOHO UNIVERSITY \*2

### Abstract

量子群とは、非可換非余可換な Hopf 代数である。量子群のある加群のクラスに対して定義される  $q \rightarrow 0$  での基底を結晶基底とよぶ。結晶基底は  $q \rightarrow 0$  という特殊化された状況での基底であるが、元の加群の情報を良く復元できるなどの良い性質を持つ。これは様々な実現を通して理解されており、A 型量子群の場合には Young 盤による実現が知られている。また結晶基底の組合せ論的な性質を抽出することで、様々な集合に結晶基底の構造を入れることができる。一方、近年 Hive という組合せ論の道具が導入された。これは適当な設定の元である Young 盤と一対一に対応する。その意味で Young 盤の一般化である。本稿では、これらの事実に基づいて、A 型量子群の場合に Hive 上の結晶構造を定義する。

リー環  $\mathfrak{g}$  の表現論は、その包絡環  $U(\mathfrak{g})$  の上で考えることが多い。 $\mathfrak{g}$  の包絡環  $U(\mathfrak{g})$  とは、 $\mathfrak{g}$  が埋め込まれた結合代数であり、生成元と基本関係式によって定義できる。また余可換な Hopf 代数の構造を持つ。一般に対称化可能な Kac-Moody Lie 環  $\mathfrak{g}$  に付随する量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  とは、包絡環  $U(\mathfrak{g})$  の基本関係式をパラメータ  $q$  で変形することで得られる、非可換非余可換な Hopf 代数である。 $q \rightarrow 1$  の古典極限を考えると  $U(\mathfrak{g})$  に一致する。これは可解格子模型の文脈で神保道夫と V.G.Drinfeld によって独立に導入された [3], [5].

結晶基底とは、柏原正樹により導入された  $U_q(\mathfrak{g})$  の可積分加群というクラスに対して定義される  $q \rightarrow 0$  での基底である [6], [7]. これは可積分加群の  $q \rightarrow 0$  という特殊化された状況における基底だが、元の加群の情報が復元できるなどの良い性質を持つ。しかしその定義は抽象的で、具体的に結晶基底を調べる際にはそれを実現することが重要である。古典リー環に対応する量子群の結晶基底に対しては、Young 盤による実現が知られている [8]. 特に A 型量子群の場合には、半標準盤という Young 盤の集合として実現される。量子群の表現論や結晶基底については、例えば [1], [4], [6], [7] を参照されたい。

一方、近年 A.Knutson と T.Tao によって Hive という組合せ論的な図形が導入された [9]. これは三角形の頂点に実数を配置した図形であり、適当な条件を課した K-hive が半標準盤と一対一に対応することがわかっている。その意味で Hive は Young 盤の一般化である。また Hive は様々なデータ形式と高い対称性を持ち、Young 盤による議論の見通しを良くするなどの利点がある [2].

---

\*1 6518011n@st.toho.u-ac.jp

\*2 kiyoshi.shirayanagi@is.sci.toho-u.ac.jp

本稿では、Hive と Young 盤の関係を利用して、Hive による  $A$  型量子群の結晶基底の実現を与える。具体的には、右上の境界の辺が分割  $\lambda$  で定義された Hive の集合  $\mathbb{H}(\lambda)$  上に  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶の構造を定義する。これは半標準盤で実現される既約最高ウェイト加群  $V(\lambda)$  の結晶基底  $\mathcal{B}(\lambda)$  と同型になる。

## 1 $A$ 型のリー環と量子群

以下基礎体を  $\mathbb{C}$  とし、結合代数は単位的であるとする。

結合代数  $A$  は  $[x, y] = xy - yx$  ( $x, y \in A$ ) でリー積  $[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$  を入れるとリー環になる。  $\mathbb{C}$  上  $n$  次元ベクトル空間  $V$  に対し、  $\text{End}(V)$  はこの方法でリー環になる。これを  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  とかく。本稿で扱うのは  $A$  型の場合だから、特に次の例が重要である。  $A_{n-1}$  型リー環  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  は

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{Tr}(X) = 0\} \quad (1)$$

で定義される。ここで  $\text{Tr}$  は  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対し、  $\text{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$  で定義される行列のトレースである。  $E_{ij}$  を行列単位とする。  $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$  とする。このとき、

$$e_i = E_{i, i+1}, \quad f_i = E_{i+1, i}, \quad h_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1} \quad (i \in I)$$

は  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  をリー環として生成する。また

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad [h_i, e_j] = \begin{cases} 2e_j & \text{if } i = j \\ -e_j & \text{if } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{if } |i - j| > 1 \end{cases}, \quad [h_i, f_j] = \begin{cases} -2f_j & \text{if } i = j \\ f_j & \text{if } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{if } |i - j| > 1 \end{cases},$$

が成り立つ。

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  の部分リー環

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} h_i$$

を  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  のカルタン部分環とよぶ。  $h = \text{diag}(\lambda_j \mid 1 \leq j \leq n) \in \mathfrak{h}$  に対し、線形写像  $\epsilon_i: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $j \in I$ ) を  $\epsilon_i(h) = \lambda_i$  で定める。基本ウェイト  $\Lambda_k$  ( $k \in I$ ) を  $\Lambda_k = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k$  とする。また随伴表現  $\text{ad}: \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$  を  $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$  で定義する。このとき、  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  は  $\text{ad}(\mathfrak{h})$  による同時固有空間分解を持つ。

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) &= \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi_-} \mathfrak{g}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_\alpha \right) \\ &= \left( \bigoplus_{i < j} \mathbb{C} E_{ji} \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C} (E_{ii} - E_{i+1, i+1}) \right) \oplus \left( \bigoplus_{i < j} \mathbb{C} E_{ij} \right) \end{aligned}$$

ここで  $\Phi_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j\}$ ,  $\Phi_- = -\Phi_+$  である。  $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$  をルート系とよび、  $\Phi$  の元をルートとよぶ。特に  $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \in \Phi$  ( $i \in I$ ) を単純ルートとよぶ。

リー環の表現論を考えると、そのリー環が埋め込まれた余可換な Hopf 代数である包絡環を考えることがよくある。リー環  $\mathfrak{g}$  の包絡環は、次の普遍性で特徴付けられる。リー環  $\mathfrak{g}$  と結合代数  $A$  に対し、  $\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$  を満たす  $\mathbb{C}$  線形写像  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow A$  の組  $(A, \rho)$  の中で、次の意味で universal

なものを  $\mathfrak{g}$  の包絡環という。すなわち、上の条件を満たす任意の組  $(B, \psi)$  に対し、代数射  $h: A \rightarrow B$  であって、 $\phi = h \circ \rho$  を満たすものが一意的に存在するとき  $(A, \rho)$  を  $\mathfrak{g}$  の包絡環といい、 $(U(\mathfrak{g}), \iota)$  とかく。

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\exists! h} & B \\ \iota \uparrow & \nearrow \psi & \\ \mathfrak{g} & & \end{array}$$

$q \in \mathbb{C}^\times$  を 1 のベキ根でないとする。  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  に付随する  $A$  型量子群  $U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$  とは、次の生成元と基本関係式で定義される  $\mathbb{C}(q)$  上の結合代数である。

### 定義 1

$e_i, f_i, K_i^{\pm 1}$  ( $i \in I$ ) を生成元とし、

$$\begin{aligned} K_i K_j - K_j K_i &= 0, & K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, \\ K_i e_j K_i^{-1} &= q^{\alpha_i(h)} e_j, & K_i f_j K_i^{-1} &= q^{-\alpha_i(h)} f_j, \\ e_i f_j - f_j e_i &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ e_i^2 e_j - (q + q^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 &= 0 \quad \text{for } |i - j| = 1, \\ f_i^2 f_j - (q + q^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 &= 0 \quad \text{for } |i - j| = 1, \\ e_i e_j - e_j e_i &= f_i f_j - f_j f_i = 0 \quad \text{for } |i - j| > 1 \end{aligned}$$

を基本関係式として定義される  $\mathbb{C}(q)$  上の結合代数を  $A_{n-1}$  型量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$  という。

$U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$  は非可換かつ非余可換な Hopf 代数の構造を持つ。これは古典極限  $q \rightarrow 1$  を考えると、 $U(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$  と一致する。

## 1.1 $A$ 型量子群の結晶基底

量子群  $U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$  の加群の中に可積分加群というクラスがある。このクラスの加群は、 $q \rightarrow 0$  で良い振る舞いをする結晶基底という基底を持つ [7]。これは  $q \rightarrow 0$  という特殊化された状況での基底だが、元の加群の情報をよく復元できる。詳しいことは例えば [7] を参照せよ。ここでは結晶基底の組合せ論的性質を抽出した結晶という概念を考える。

### 定義 2

集合  $\mathcal{B}$  に対し、次を満たす写像  $\text{wt}: \mathcal{B} \rightarrow P$ ,  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{0\}$ ,  $\varepsilon_i, \phi_i: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  ( $i \in I$ ) が存在する時、 $\mathcal{B}$  を  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶とよぶ。

- (1)  $\phi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \text{wt}(b)$
- (2)  $\text{wt}(\tilde{e}_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i \quad \text{if } \tilde{e}_i b \in \mathcal{B}$
- (3)  $\text{wt}(\tilde{f}_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i \quad \text{if } \tilde{f}_i b \in \mathcal{B}$
- (4)  $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \phi_i(\tilde{e}_i b) = \phi_i(b) + 1$
- (5)  $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \phi_i(\tilde{f}_i b) = \phi_i(b) - 1$
- (6)  $\tilde{f}_i b = b' \iff b = \tilde{e}_i b' (\forall b, b' \in \mathcal{B}, i \in I)$

$$(7) \phi_i(b) = -\infty \implies \tilde{f}_i b = 0$$

結晶の同型は次で定義する.

### 定義 3

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  を  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶とする.  $\mathcal{B}_1$  から  $\mathcal{B}_2$  への射  $\Psi: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  とは, 写像  $\Psi: \mathcal{B}_1 \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{B}_2 \cup \{0\}$  で

$$(1) \text{wt}(\Psi(b)) = \text{wt}(b), \varepsilon_i(\Psi(b)) = \varepsilon_i(b), \phi_i(\Psi(b)) = \phi_i(b) \text{ if } b \in \mathcal{B}_1, \Psi(b) \in \mathcal{B}_2$$

$$(2) \tilde{f}_i \Psi(b) = \Psi(\tilde{f}_i b), \tilde{e}_i \Psi(b) = \Psi(\tilde{e}_i b) \text{ if } \Psi(b), \Psi(\tilde{e}_i b), \Psi(\tilde{f}_i b) \in \mathcal{B}_2 \text{ for } b \in \mathcal{B}_1$$

$$(3) \Psi(0) = 0$$

を満たすものをいう. 射  $\Psi: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  に対し, 写像  $\Psi: \mathcal{B}_1 \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{B}_2 \cup \{0\}$  が単射のとき埋め込み, 全単射のとき同型射とよぶ. 同型射  $\Psi: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  が存在する時,  $\mathcal{B}_1$  と  $\mathcal{B}_2$  は  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶として同型であるといい,  $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$  とかく.

次に結晶のテンソル積を定義する.

### 定義 4

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  を  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶とする.  $\mathcal{B}_1$  と  $\mathcal{B}_2$  のテンソル積  $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$  を

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \{b_1 \otimes b_2 \mid b_1 \in \mathcal{B}_1, b_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

で定義する. ここで  $\text{wt}, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \varepsilon_i, \phi_i$  は次で定める.

$$\begin{aligned} \text{wt}(b_1 \otimes b_2) &= \text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2) \\ \varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) &= \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \text{wt}(b_1)(h_i)) \\ \phi(b_1 \otimes b_2) &= \max(\phi(b_2), \phi(b_1) + \text{wt}(b_2)(h_i)) \\ \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \phi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{if } \phi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \end{cases} \\ \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \phi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{if } \phi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \end{cases} \end{aligned}$$

A 型の場合には, 次の Young 図形による実現が知られている.  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ( $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i = 1, \dots, n$ ) が  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$  を満たすとき,  $\lambda$  を  $n$  の **composition** とよぶ. composition  $\lambda$  が  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  を満たすとき,  $n$  の **partition** とよぶ.  $n$  の partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対応する Young 図形  $T$  を考える.  $T$  の  $n$  個の箱に 1 から  $n$  までの自然数を左から右に進むにつれて広義に増加し, 上から下に進むにつれて狭義に増加するように書き入れたとき,  $T$  を shape  $\lambda$  の半標準盤という.  $P_{\geq 0}^+ = \{\lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$  とする. shape  $\lambda$  の半標準盤  $T$  に対し,  $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n \in P_{\geq 0}^+$  を対応させるとこれは全単射になる.  $\mathcal{B}(\lambda)$  を shape  $\lambda$  の半標準盤全体の集合とする. このとき,  $U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$  の最高ウェイト  $\lambda$  の既約最高ウェイト加群の結晶基底は,  $\mathcal{B}(\lambda)$  によって実現されることが知られている [8].

## 2 Hive

ここでは, Hive について必要な範囲で解説する. より詳しいことは, [2] を参照せよ.

一辺の長さが  $n$  の正三角形に一辺が 1 の正三角形を敷き詰めたグラフを  **$n$ -hive graph** という.  $n$ -hive graph の  $(n+1)(n+2)/2$  個の頂点に実数をラベリングしたものを  $n$ -hive graph の *vertex representation* とよぶ. 下の例は 3-hive graph の vertex representation である.

$$\begin{array}{c}
 & & a_{03} & & \\
 & & / \quad \backslash & & \\
 & a_{02} & \text{---} & a_{13} & \\
 & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & \\
 a_{01} & \text{---} & a_{12} & \text{---} & a_{23} \\
 / \quad \backslash & & / \quad \backslash & & / \quad \backslash \\
 a_{00} & \text{---} & a_{11} & \text{---} & a_{22} & \text{---} & a_{33}
 \end{array} \tag{2}$$

$n$ -hive graph に現れる (3) の図形を **elementary rhombus** という. それぞれ *left-leaning*, *upright*, *right-leaning rhombus* とよぶ.

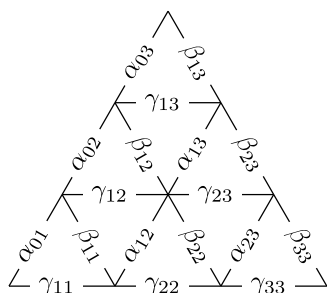
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a \text{---} b \\ \backslash \quad / \\ \quad c \text{---} d \end{array} & \begin{array}{c} a \\ / \quad \backslash \\ b \text{---} c \\ \backslash \quad / \\ \quad d \end{array} & \begin{array}{c} \quad b \text{---} a \\ / \quad \backslash \\ d \text{---} c \end{array} \\
 \text{left-leaning} & \text{upright} & \text{right-leaning}
 \end{array} \tag{3}$$

上の状況で, 不等式

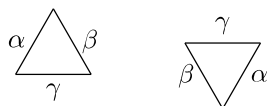
$$b + c \geq a + d \tag{4}$$

を **rhombus inequality** とよぶ.

$n$ -hive graph の各辺に実数をラベリングしたものを  $n$ -hive graph の *edge representation* という.



edge representation に現れる以下の図形



を **elementary triangle** とよび,  $\alpha + \beta = \gamma$  を **triangle condition** という. 上のラベリングで, vertex representation の  $n$ -hive graph に対し,

$$\alpha_{ij} = a_{ij} - a_{i,j-1}, \quad \beta_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j}, \quad \gamma_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j-1} \tag{5}$$

とすれば, edge representation が得られる. このとき rhombus inequality は, (6) のラベリングで  $\alpha \geq \gamma$ ,  $\beta \geq \delta$  と同値である.

$$(6)$$

$n$ -hive graph の各 elementary rhombus に対して,  $L_{ij}, U_{ij}, R_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) を次のように定める.

$$(7)$$

$$L_{ij} = \beta_{i,j-1} - \beta_{i+1,j} = \gamma_{ij} - \gamma_{i+1,j}, \quad (8)$$

$$U_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{i-1,j} = \beta_{ij} - \beta_{i,j-1}, \quad (9)$$

$$R_{ij} = \alpha_{i-1,j-1} - \alpha_{ij} = \gamma_{i,j-1} - \gamma_{ij}. \quad (10)$$

$L_{ij}, U_{ij}, R_{ij}$  をそれぞれ left-leaning, upright, right-leaning rhombus に対応した **gradient** とよぶ. rhombus inequality はそれぞれ

$$L_{ij} \geq 0, \quad U_{ij} \geq 0, \quad R_{ij} \geq 0$$

に対応する.

$n$ -hive graph の edge labelling に gradient のタイプを 1 つ指定したものを  $n$ -hive graph の *gradient representation* とよぶ.  $n = 4$  の場合を以下に示す.

$$(11)$$

構成から

$$\gamma_k = \left( \alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} U_{ik} \right) + \left( \beta_k - \sum_{j=k+1}^n U_{kj} \right)$$

がわかる. 以下  $U_{kk} := \beta_k - \sum_{j=k+1}^n U_{kj}$  また  $i > j$  のとき  $U_{ij} = 0$  とする.

vertex labelling の  $n$ -hive graph の各頂点の値を整数に制限したものを vertex labelling の  **$n$ -integer hive graph** とよぶ.

ここで gradient representation の  $n$ -integer hive graph  $H$  の境界の辺を考えよう.  $H$  の left-leaning, upright に対応する rhombus は rhombus inequality を満たすとする. このとき, gradient の定義と rhombus inequality から

$$\beta_{ij} \geq \beta_{i+1,j} \quad (12)$$

が成り立つ。すなわち右上の境界の辺は  $n$  の partition になる。

### 定義 5

size  $n$  の vertex labelling の **K-hive** とは、次を満たす vertex labelling の  $n$ -integer hive graph のことをいう。

(1) 左上の境界の頂点のラベリングは 0 である

(2) left-leaning, upright rhombus は rhombus inequality を満たす

(5) の方法で、edge representation の K-hive を考えることができる。このとき、境界の辺の labelling に注目しよう。(12) より左上の境界の辺のラベルは  $l(\lambda) < n$  の partition ので特徴付けられる。水平な境界のラベルは、 $l(\mu) < n$  の composition の各パートになる。

本稿では gradient representation の upright に対応した形式をよく用いる。この形式を用いたとき、K-hive  $H$  は境界の辺と gradient  $U_{ij}$  で特徴づけることができることに注意する。この注意のもとで  $H$  を 4 つ組  $(\lambda, \mu, 0, (U_{ij}))$  と同一視する。

このとき、

$$\mathcal{H}^{(n)}(\lambda, \mu, 0) = \{H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij}))\},$$

$$\mathbb{H}(\lambda) = \bigcup_{\mu} \mathcal{H}^{(n)}(\lambda, \mu, 0)$$

と定義する。ここで  $\mathbb{H}(\lambda)$  の  $\mu$  は  $n \in \mathbb{N}$  の composition 全体を動く。

K-hive は半標準盤と一対一に対応する。 $n \in \mathbb{N}$  の partition に対応する半標準盤  $T$  に対し、 $\mu_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を  $T$  の中に現れる  $i$  の数とする。 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  を  $T$  の **weight** とよぶ。

### 命題 6 ([11])

$\lambda$  を  $n \in \mathbb{N}$  の partition とし、 $\text{SStab}^n(\lambda, \mu)$  を shape  $\lambda$ , weight  $\mu$  の半標準盤全体の集合とする。 $f^{(n)}: \text{SStab}^n(\lambda, \mu) \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}(\lambda, \mu, 0)$  を  $T \in \text{SStab}^n(\lambda, \mu)$  に対し  $f^{(n)}(T) = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij}))$  とすると、 $f^{(n)}$  は全単射になる。ここで  $U_{ij} = T$  の  $i$  行目の  $j$  の個数である。

## 3 $\mathbb{H}(\lambda)$ 上の結晶構造

### 3.1 $\mathbb{H}(\Lambda_k)$

まず  $\lambda = \Lambda_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$  のときを考える。 $\Lambda_k \in P_{\geq 0}^+$  は分割  $(1^k)$  に対応する。 $H \in \mathcal{H}^{(n)}(\lambda, \mu, 0) \subset \mathbb{H}(\Lambda_k)$  とする。

$i \in I$  に対し、 $h_i = \max(\mu_{i+1} - \mu_i, 0)$ ,  $k_i = \max(\mu_i - \mu_{i+1}, 0)$  とする。このとき、 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i: \mathbb{H}(\Lambda_k) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{H}(\Lambda_k) \cup \{0\}$  を次のように定める。 $k_i = 1$  の時、 $\tilde{e}_i(\lambda, \mu, 0, (U_{kl})) = (\lambda', \mu', 0, (U'_{kl}))$  を  $\lambda' = \lambda$  また  $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_i + 1, \mu_{i+1} - 1, \dots, \mu_n)$ ,

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} + 1 & \text{for } l = i \text{ s.t. } U_{kl} \geq 0 \\ U_{kl} - 1 & \text{for } l = i + 1 \text{ s.t. } U_{kl} \geq 0 \\ U_{kl} & \text{else} \end{cases}$$

で定める。 $k_j \neq 1$  のとき、 $\tilde{e}_i H = 0$  とする。

$h_i = 1$  のとき,  $\tilde{f}_i(\lambda, \mu, 0, (U_{kl})) = (\lambda', \mu', 0, (U'_{kl}))$  を  $\lambda' = \lambda$  また  $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_i - 1, \mu_{i+1} + 1, \dots, \mu_n)$ ,

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{for } l = i \text{ s.t., } U_{kl} \geq 0 \\ U_{kl} + 1 & \text{for } l = i + 1 \text{ s.t., } U_{kl} \geq 0 \\ U_{kl} & \text{else} \end{cases}$$

で定義する.  $h_i \neq 1$  のとき,  $\tilde{f}_i H = 0$  とする.

また  $\epsilon_i, \phi_i (i \in I), \text{wt}$  を  $\epsilon_i(H) = k_i, \phi_i(H) = h_i, \text{wt}(H) = \mu_1 \epsilon_1 + \dots + \mu_n \epsilon_n$  とする. この時,  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \epsilon_i, \phi_i (i \in I), \text{wt}$  は定義 2 を満たす. すなわち次が成り立つ.

### 命題 7

$\mathbb{H}(\Lambda_k)$  は  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶である.

## 3.2 $\mathbb{H}(\lambda)$

次に  $\lambda \in P_{\geq 0}^+$  の場合を考えよう.  $\mathbb{H}(\lambda), \mathbb{H}(\mu) (\lambda, \mu \in P_{\geq 0}^+)$  に対して,  $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$  を

$$\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu) = \{(H_1, H_2) \mid H_1 \in \mathbb{H}(\lambda), H_2 \in \mathbb{H}(\mu)\}$$

で定める.  $(H_1, H_2) \in \mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$  を  $H_1 \otimes H_2$  とかく.

$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})) \in \mathcal{H}^{(n)}(\lambda, \mu) \subset \mathbb{H}(\lambda)$  とし,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  を fix する. また  $j_i = \min\{j \mid U_{ij} > 0\}$  とする. このとき,

$$\lambda^1 = (1, 1, \dots, 1), \quad \lambda^2 = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1),$$

$$U_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{if } j = j_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$U_{ij}^2 = U_{ij} - U_{ij}^1$$

とする. また  $\mu^1 = (\mu_1^1, \dots, \mu_n^1), \mu^2 = (\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$  を

$$\mu_i^k = \sum_{s=1}^n U_{si}^k \quad 0 \leq i \leq n, k = 1, 2$$

で定める. このとき,  $H_i = (\lambda^i, \mu^i, 0, (U_{ij}^i)) \in \mathcal{H}(\lambda^i, \mu^i, 0)$ . またこの分解は一意的であることがわかる. すなわち次が成り立つ.

### 命題 8

$\lambda \in P_{\geq 0}^+$  に対し,  $\Phi: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \mathbb{H}(\Lambda_m) \otimes \mathbb{H}(\lambda')$  が埋め込みとなるような  $\Lambda_m, \lambda' \in P_{\geq 0}^+$  が存在する.

命題 8 を繰り返し用いることで次を得る.

### 命題 9

$\lambda \in P_{\geq 0}^+$  に対し,  $\Phi: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \mathbb{H}(\Lambda_{m_1}) \otimes \mathbb{H}(\Lambda_{m_2}) \otimes \dots \otimes \mathbb{H}(\Lambda_{m_l})$  が埋め込みとなるような  $\Lambda_{m_1}, \dots, \Lambda_{m_l} \in P_{\geq 0}^+$  が存在する.

命題 9 より  $\mathbb{H}(\lambda)$  を  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶  $\mathbb{H}(\Lambda_k)$  のテンソル積のなかに埋め込むことができる. よって定義 4 より  $\mathbb{H}(\lambda)$  は  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶になる.



### 定理 1

$\mathbb{H}(\lambda)$  は  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶である.

またこのとき, 既約最高ウェイト加群  $V(\lambda)$  の結晶基底  $\mathcal{B}(\lambda)$  に対して次が成り立つ.

### 定理 2

$$\mathcal{B}(\lambda) \cong \mathbb{H}(\lambda)$$

## 4 おわりに

本稿では, 右上の辺が  $\lambda$  の K-hive 全体  $\mathbb{H}(\lambda)$  を右上の辺が  $(1, \dots, 1)$  の K-hive 全体  $\mathbb{H}(\Lambda_k)$  のテンソル積の埋め込み  $\mathbb{H}(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{H}(\Lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{H}(\Lambda_k)$  の引き戻しによって  $\mathbb{H}(\lambda)$  への結晶構造を与えた. ここで  $\mathbb{H}(\Lambda_k)$  の結晶構造はすでに与えられていることに注意する. この埋め込みは半標準盤の結晶基底の実現に関連して現れる Far-Eastern reading という埋め込みの類似になっている. Far-Eastern reading については [8] を参照せよ.

一般に量子群は対称化可能 Kac-Moody リー環に対して定義される. 特にアフィン型リー環  $A_{n-1}^{(1)}$  に付随する量子群は, 可解格子模型の理論など様々な場面で現れる重要な対象である. 今後の課題としては, 他の古典型リー環や  $A_{n-1}^{(1)}$  に付随する量子群の結晶基底の Hive による実現が挙げられる. また Hive による実現を通して, Littelmann のパス模型 [10] などの結晶基底の実現に用いられている他の道具との関係を明らかにすることも今後の課題である.

## 参 考 文 献

- [1] S. Ariki. *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, volume 26 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Translated from the 2000 Japanese edition and revised by the author.
- [2] O. Azenhas, R.C. King, and I. Terada. The involutive nature of the Littlewood-Richardson commutativity bijection. *arXiv preprint arXiv:1603.05037*, 2016.
- [3] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 283(5):1060–1064, 1985.
- [4] J. Hong and S. Kang. *Introduction to quantum groups and crystal bases*, volume 42 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [5] M. Jimbo. A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10(1):63–69, 1985.
- [6] M. Kashiwara. Crystalizing the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras. *Comm. Math. Phys.*, 133(2):249–260, 1990.
- [7] M. Kashiwara. On crystal bases of the  $Q$ -analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.*, 63(2):465–516, 1991.
- [8] M. Kashiwara and T. Nakashima. Crystal graphs for representations of the  $q$ -analogue of classical Lie algebras. *J. Algebra*, 165(2):295–345, 1994.

- [9] A. Knutson and T. Tao. The honeycomb model of  $GL_n(\mathbf{C})$  tensor products. I. Proof of the saturation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4):1055–1090, 1999.
- [10] P. Littelmann. Paths and root operators in representation theory. *Ann. of Math. (2)*, 142(3):499–525, 1995.
- [11] S. Narisawa and K. Shirayanagi. Bender-Knuth transformation from a perspective of hives. 数理解析研究所講究録, 2138, *Computer Algebra – Theory and its Applications*, pages 138–146, 2018.