多重ゼータ値の有限 q 類似と金子-Zagier 予想

愛知県立大学・情報科学部　田坂浩二
Koji Tasaka
School of Information Science and Technology
Aichi Prefectural University

概要

講演では，有限および対称多重ゼータ値の対応に関する金子-Zagier 予想の多重 L 値版を扱ったプレプリント [22] の内容を紹介した。本稿では，Bachmann 氏と竹山氏との共同研究において導入した多重調和 ζ_m-値を用いた金子-Zagier 予想へのアプローチの概略を述べ，この方法を多重 L 値に適用することで有限および対称多重 L 値を導入，有限多重 L 値の数値実験から期待される予想をいくつか述べる。

1　金子-Zagier 予想

1.1　基本事項

自然数の組み $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ をインデックス (*index*) とよぶ。$r = 0$ のとき，空インデックスを $\emptyset$ で表す。$k_1 \geq 2$ または $r = 0$ のとき，インデックス $\boldsymbol{k}$ は許容的 (*admissible*) であるという。$\mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) = k_1 + \cdots + k_r$ を重さ (*weight*) という。

定義 1.1. インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し，多重ゼータ値 (*multiple zeta value*) を

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}$$

と定義する。$\zeta(\emptyset) := 1$ とおく。

同じ重さの多重ゼータ値の間にはたくさんの $\mathbb{Q}$ 線形関係式がある (cf. [24])。その最初の例は，L. Euler が見つけた $\zeta(3) = \zeta(2, 1)$ である。Zagier は，独立な $\mathbb{Q}$ 線形関係式の個数を数値計算で数えあげることにより重さ k の多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ の次元の母関数が次のようになることを予想した:

$$\sum_{k \geq 0} \big(\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k\big) x^k \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - x^2 - x^3} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

混合 Tate モチーフ (*mixed Tate motive*) の理論から右辺の Taylor 展開の x^k の係数は $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k$ の上限を与えることが示されている (cf. [8])。さらに，$\mathcal{Z}_k$ の基底に関する Hoffman 予想も肯定的に解決され，“どんな $\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフの周期も多重ゼータ値 (と $2\pi i$) で表せる”という大変強力な結果が系として従う (cf. [6])。このあたりについては，整数論サマースクールの報告集を是非ご覧いただきたい [1]。他の ‘良い’ 基底の取り方や関係式族の関係性など，未だ様々な課題があるが，大きな未解決問題の一つは，$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k$ の期待される上限を達成する具体的な関係式族の決定であろうか。これについては，“正規化複シャッフル関係式がすべての関係式を与える”という Zagier による予想がある (cf. [12, §3])。モチビックガロア群の構造決定問題にも関わる重要な話題である (cf. [9])。

あとで使うので，ついでに正規化について，ざっと思い出しておこう (cf. [2])。自然数 m とインデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し，多重調和数を

$$H_m(\boldsymbol{k}) := \sum_{m>m_1>\cdots>m_r>0} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \in \mathbb{Q}$$

と定める。$\boldsymbol{k}$ が許容的ならば，$\lim_{m\to\infty} H_m(\boldsymbol{k}) = \zeta(\boldsymbol{k})$ となることに注意しておく。多重調和数の二つの積は多重調和数の和で表せる (cf. [1] の金子氏の記事)。例えば，単純な 2 重和の分割により

$$\begin{aligned} H_m(k_1)H_m(k_2) &= \sum_{m>m_1,m_2>0} \frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}} \\ &= \left(\sum_{m>m_1>m_2>0} + \sum_{m>m_2>m_1>0} + \sum_{m>m_1=m_2>0}\right)\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}} \\ &= H_m(k_1,k_2)+H_m(k_2,k_1)+H_m(k_1+k_2) \end{aligned}$$

を得る。多重和の場合も同様である。このような和の分割により積構造が得られるが，これを調和積 (*harmonic product*) /調和関係式とよび，展開して得られる多重調和数の和を

$$H_m(k_1,\dots,k_r)H_m(l_1,\dots,l_s) = H_m((k_1,\dots,k_r)*(l_1,\dots,l_s))$$

と表すことにする。許容的インデックスに対する多重調和数は調和積により閉じていることから，多重ゼータ値の空間 $\mathcal{Z} := \bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k$ (形式直和) には $\mathbb{Q}$ 代数の構造が入る (ちなみに直和であること，すなわち異なる重さの多重ゼータ値の間に線形関係式が存在しないという主張は未解決で，Goncharov 予想と呼ばれる)。

整数 $n\geq 0$ と許容的インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，調和積を繰り返し計算することで

$$H_m(\underbrace{1,\dots,1}_{n},\boldsymbol{k}) = \sum_{i=0}^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+n} A_m^{(i)} H_m(1)^i$$

を満たすような重さ $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+n-i$ の許容的インデックスをもつ多重調和数の有限和 $A_m^{(i)}$ がただ一つ決まる。たとえば，$H_m(1,2)=-H_m(2,1)-H_m(3)+H_m(2)H_m(1)$ なので，$A_m^{(0)}=-H_m(2,1)-H_m(3), A_m^{(1)}=H_m(2)$ である。係数について，$\lim_{m\to\infty}A_m^{(i)}\in\mathcal{Z}$ となる。この表示を用いて，調和正規化多重ゼータ値 (*harmonic regularized multiple zeta value*) を

$$\zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{n},\boldsymbol{k};T) := \sum_{i=0}^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+n}\left(\lim_{m\to\infty}A_m^{(i)}\right)T^i \in \mathcal{Z}[T].$$

により定義する。定義より，許容的インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，$\zeta_*(\boldsymbol{k};T)=\zeta(\boldsymbol{k})$ であることに注意しておく。古典的な漸近評価 $H_m(1)=\log m+\gamma+O(1/m)$ (γ : Euler 定数) により

$$H_m(\underbrace{1,\dots,1}_{n},\boldsymbol{k}) = \zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{n},\boldsymbol{k};\log m+\gamma) + O\left(\frac{\log^J m}{m}\right)$$

となる。

もう一つ，すべてのインデックス $\boldsymbol{k}$ について，多重ゼータ値の積分表示に由来する正規化 $\zeta_{ш}(\boldsymbol{k};T) \in \mathcal{Z}[T]$ がある。構成アイデアは基本的に同じで，級数のプロセスを積分およびシャッフル積におきかえればよい。これについて，許容的でないインデックス $\boldsymbol{k}$ について，$\zeta_{ш}(\boldsymbol{k};T)$ と $\zeta_{*}(\boldsymbol{k};T)$ は異なるものである。両者の関係は，正規化基本定理により具体的に記述される (cf. [1, 2, 12, 19])。

1.2 有限多重ゼータ値

金子-Zagier により導入された有限多重ゼータ値 (cf. [15, 16]) を定義しよう。これは，Kontsevich [17, §2.2] の環 $\mathcal{A} = \left(\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)/\left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$ の元として定義される。

定義 1.2. インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，すべての素数 p について多重調和数 $H_p(\boldsymbol{k}) \mod p$ を並べた列を

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) := \left(H_p(\boldsymbol{k}) \mod p\right)_p \in \mathcal{A}$$

とおき，有限多重ゼータ値 (*finite multiple zeta value*) とよぶ。

環 $\mathcal{A}$ においては，高々有限個の p 成分にしか違いがない列は同じものとみなされる。例えば，素数 $p > k+1$ に対し，合同式 $H_p(k) \equiv 0 \mod p$ が容易に確かめられる。この合同式を満たさない素数は有限個なので，$\zeta_{\mathcal{A}}(k) = 0 \in \mathcal{A}$ を得る。このように，十分大きいすべての素数について成り立つ合同式は $\mathcal{A}$ における恒等式に持ち上がる。

対角に成分を並べることで自然な埋め込み $\mathbb{Q} \to \mathcal{A}$ が得られ，環 $\mathcal{A}$ には $\mathbb{Q}$ 代数の構造が入る。それゆえ，有限多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 線形関係式が議論できるわけだが，これについても Zagier は数値計算方法を考案し，

$$\sum_{k \geq 0} \left(\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}\right) x^k \overset{?}{=} \frac{1-x^2}{1-x^2-x^3} \tag{1.1}$$

が成り立つことを予想した。ただし，$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ は重さ k の有限多重ゼータ値で生成される $\mathcal{A}$ の部分空間である。先ほど説明した調和積により，形式直和 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ は $\mathcal{A}$ の部分代数となっている。

式 (1.1) の右辺は重さ k の多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を mod $\zeta(2)$ した商空間の次元予想と等しい。それゆえ，$\mathcal{A}$ に住む有限多重ゼータ値と $\mathbb{R}$ に住む多重ゼータ値の間に何かしら関係があるのではないかという期待がおこり，Kontsevich のアイデアをもとに*1金子-Zagier により対称多重ゼータ値が導入された。これを定義するために，まずは次の補題を紹介する。

補題 1.3. インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\bullet \in \{*, ш\}$ に対し，

$$\zeta_{\mathcal{S},\bullet}(\boldsymbol{k}) := \sum_{a=0}^{r} (-1)^{k_1+\cdots+k_a} \zeta_\bullet(k_a, \ldots, k_2, k_1; T)\zeta_\bullet(k_{a+1}, \ldots, k_{r-1}, k_r; T)$$

*1 そのアイデアの説明は [15] でされている。

とおくと，$\zeta_{\mathcal{S},\bullet}(\boldsymbol{k}) \in \mathcal{Z}$ (つまり，T に依存しない) であり，$\zeta(2)$ で生成されるイデアルによる商代数 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ において，

$$\zeta_{\mathcal{S},ш}(\boldsymbol{k}) \equiv \zeta_{\mathcal{S},*}(\boldsymbol{k}) \mod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

が成り立つ。

定義 1.4. インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，剰余類

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) := \zeta_{\mathcal{S},\bullet}(\boldsymbol{k}) \mod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

を対称多重ゼータ値 (symmetric multiple zeta value) とよぶ。

これが有限多重ゼータ値の対応物であろうことを示唆するのが，金子-Zagier 予想である。

予想 1.5. $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\varphi_{KZ}: \mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ をインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，$\varphi_{KZ}(\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})) = \zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ により定めると，φ_{KZ} は代数同型写像となる。

写像 φ_{KZ} が well-defined な単射であることを確かめるには，有理数たち $\{c_{\boldsymbol{k}}\}$ に対し，

$$\sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = 0 \iff \sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}} \zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{1.2}$$

がわかればよい ($\Rightarrow$ は well-defined 性，$\Leftarrow$ は単射性)。$\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ が対称多重ゼータ値で生成されるという安田 [23] の結果と $\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ が調和積を満たすという結果 [15] により，金子-Zagier 予想の解決は，上記の同値性 (1.2)，すなわち，有限および対称多重ゼータ値が全く同じ関係式を満たすという主張を残すのみである。解決の道筋はあろうか。

1.3　有限 q 類似

私が有限多重ゼータ値を知ったのは，Zagier による 2012 年 5 月 7 日の九州大学での講演が初めてであった。もっとも，当時のノートによればその講演では周期の話や Feynman 積分の話題などが散在しており，Z.W. Sun の合同式に関する話題から $\mathcal{A}$ が導入がされ，有限多重ゼータ値については定義と次元予想に触れる程度であった（が，当時の自分の英語力の限界で，実際にはもっと述べられていたのかもしれない)。とにかく，非常に面白そうな研究だなぁとワクワクしたのを覚えている。講演の後に指導教員の金子先生を通じて Zagier の (講演内容の詳細と) 数値計算テクニックを学び，自分でもいわゆるレベル付きの場合に雑多な数値実験をして得られたデータを眺めていた時期がある。その後，2013 年には前述の対称多重ゼータ値のようなものも見つかって，有限多重ゼータ値の研究は加速していったように思う。その当時の私は，博士論文の課題（多重ゼータ値とモジュラー形式）に必死に取り組んでいたこともあって，有限多重ゼータ値の研究に着手する余裕はなかった。再び，有限多重ゼータ値に取り組むことになったのは，2016 年の夏に竹山美宏氏から私 (と Henrik Bachmann 氏) あてに “有限多重ゼータ値の q 類似について議論したい” というメールをいただいたことがきっかけとなる。実際に議論したのは同年 12 月であったが，多重ゼータ値の有限 q 類似に 1 の冪根を代入した値の列を考えようという竹山氏の発想を出発点に，私と

Bachmann 氏の計算技術を駆使しつつ，最終的に以下に述べるような q 類似と有限および対称多重ゼータ値との関係の発見に繋がった。

さて，前置きが長くなってしまったが，有限 q 類似の定義から始めよう。

定義 1.6. 正の整数 m とインデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ および $q^n\neq 1$ $(0<\forall n<m)$ を満たす $q\in\mathbb{C}$ に対し，多重ゼータ値の有限 q 類似を

$$z_m(\boldsymbol{k};q):=\sum_{m>m_1>\cdots>m_r>0}\prod_{a=1}^{r}\frac{q^{m_a(k_a-1)}}{[m_a]^{k_a}}\in\mathbb{C}$$

で定義する。ただし，$[m]:=\frac{1-q^m}{1-q}$ は q 整数である。

多重ゼータ値の有限 q 類似 $z_m(\boldsymbol{k};q)$ は Bradley [5, Definition 4] により導入された。許容的インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，$\lim\limits_{m\to\infty} z_m(\boldsymbol{k};q)$ は収束し，q-多重ゼータ値などと呼ばれる。その $q\to 1$ による極限値は多重ゼータ値 $\zeta(\boldsymbol{k})$ となる。

上でも述べたように，1 の原始 m 乗根 $q=\zeta_m$ における有限 q 類似 $z_m(\boldsymbol{k};q)$ の値を考える。$z_m(\boldsymbol{k};\zeta_m)$ を多重調和 ζ_m-値 (*multiple harmonic* ζ_m*-value*) とよぶ。それは，単に円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の元である。[3] の主結果の一つは，有限および対称多重ゼータ値が多重調和 ζ_m-値の代数的および解析的な二通りのある種の極限 '$\zeta_m\to 1$' での値として得られるというものである。まずは，有限多重ゼータ値を導こう。

定理 1.7. [3, Theorem 1.1] インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，すべての素数 p について $z_p(\boldsymbol{k};\zeta_p)$ mod $(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]$ を並べた列は有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})$ と等しい:

$$\bigl(z_p(\boldsymbol{k};\zeta_p)\mod (1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]\bigr)_p=\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}).$$

証明. q 整数 $[m]$ の $q=\zeta_p$ における値 $\frac{1-\zeta_p^m}{1-\zeta_p}$ は $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ の単数になっており，$(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]$ を法として (つまり，$\zeta_p=1$ を代入すると) m と合同である。したがって，$z_p(\boldsymbol{k};\zeta_p)\equiv H_p(\boldsymbol{k})$ mod $(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]$ は明らかである。整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ の素イデアル $(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]$ における剰余体 $\mathbb{Z}[\zeta_p]/(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型である。これを同一視することにより，定理 1.7 が証明される*2。 □

対称多重ゼータ値は単に $q\to 1$ という極限ではなく，単位円周上で 1 に近づけたときの極限値 $\lim\limits_{m\to\infty} z_m(\boldsymbol{k};e^{2\pi i/m})$ から得られる。

定理 1.8. [3, Theorem 1.2] インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，極限

$$\xi(\boldsymbol{k})=\lim_{m\to\infty} z_m(\boldsymbol{k};e^{2\pi i/m})$$

*2 この定理は最初，数値計算による観察から得られたものである。やや複雑な計算による証明を与えて，あまり自明でない結果だろうと考えていた。ところが，Bachmann 氏と私が 2017 年 4 月から翌年 3 月までマックスプランク数学研究所を訪ねていた折，5 月に行われた Zagier さんの 65 歳記念集会の講演者として滞在していた金子先生によって，$\frac{1-\zeta_p^m}{1-\zeta_p}$ が整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ の単数であるという全くもって基本的な指摘を受け，喜ばしいことにほぼ自明な主張になった。

は存在し $\mathcal{Z}[2\pi i]$ の元となる。その実部について

$$\operatorname{Re}\xi(\boldsymbol{k}) \equiv \zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) \mod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

が成り立つ。

証明の概略．まず変形

$$\frac{1-e^{2\pi i/m}}{1-e^{2\pi in/m}} = e^{-\frac{\pi i}{m}(n-1)}\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{n\pi}{m}} \qquad (m > n \geq 0)$$

を使って，

$$z_n(\boldsymbol{k}; e^{\frac{2\pi i}{m}}) = \left(e^{\frac{\pi i}{m}}\frac{m}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}\right)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})} \sum_{m>m_1>\cdots>m_r>0}\prod_{j=1}^{r}\frac{e^{\frac{\pi i}{m}(k_j-2)m_j}}{\left(\frac{m}{\pi}\sin\frac{m_j\pi}{m}\right)^{k_j}}$$

と書き直す。右辺の多重和の領域を $m/2$ で分割し，変数変換を行うことで

$$z_m(\boldsymbol{k}; e^{\frac{2\pi i}{m}}) = \left(e^{\frac{\pi i}{m}}\frac{m}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}\right)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})} \times \sum_{a=0}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_a}$$
$$\sum_{m/2>m_1>\cdots>m_a>0}\prod_{j=1}^{a}\frac{e^{-\frac{\pi i}{m}(k_{a+1-j}-2)m_j}}{\left(\frac{m}{\pi}\sin\frac{m_j\pi}{m}\right)^{k_{a+1-j}}} \sum_{m/2\geq l_1>\cdots>l_{r-a}>0}\prod_{j=1}^{r-a}\frac{e^{\frac{\pi i}{m}(k_{a+j}-2)l_j}}{\left(\frac{m}{\pi}\sin\frac{l_j\pi}{m}\right)^{k_{a+j}}}$$

と変形しておく。最後の二つの多重和はおおよそ複素共役の関係にあるので，片方の

$$A_m(\boldsymbol{k}) = \sum_{m/2\geq m_1>\cdots>m_r>0}\prod_{j=1}^{r}\frac{e^{\frac{\pi i}{m}(k_j-2)m_j}}{\left(\frac{m}{\pi}\sin\frac{m_j\pi}{m}\right)^{k_j}}$$

という値の $m\to\infty$ での振る舞いを調べればよい。$\boldsymbol{k}$ が許容的ならば，$\lim_{m\to\infty} A_m(\boldsymbol{k}) = \zeta(\boldsymbol{k})$ が示せる。許容的でない場合は，§1.1 における多重ゼータ値の正規化と同じ要領で，漸近評価 $A_m(1) = \log(m/\pi) + \gamma - \pi i/2 + O(1/m)$ と q-多重ゼータ値の調和積を繰り返し使うことにより

$$A_m(\boldsymbol{k}) = \zeta_*\left(\boldsymbol{k}; \log\left(\frac{m}{\pi}\right) + \gamma - \frac{\pi i}{2}\right) + O\left(\frac{\log^J m}{m}\right) \quad (m\to\infty)$$

が得られる。この公式から最終的に

$$z_m(\boldsymbol{k}; e^{\frac{2\pi i}{m}}) = \sum_{a=0}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_a}$$
$$\times\,\zeta_*\left(k_a,\ldots,k_2,k_1; \log\left(\frac{m}{\pi}\right) + \gamma + \frac{\pi i}{2}\right)\zeta_*\left(k_{a+1},\ldots,k_{r-1},k_r; \log\left(\frac{m}{\pi}\right) + \gamma - \frac{\pi i}{2}\right)$$
$$+\,O\left(\frac{\log^J m}{m}\right) \qquad (m\to\infty)$$

なる評価を得る。極限値 $\lim_{m\to\infty} z_m(\boldsymbol{k}; e^{\frac{2\pi i}{m}})$ が存在するには，log 項が消えていることを確かめなくてはならない。そこで

$$\sum_{a=0}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_a}\zeta_*\left(k_a,\ldots,k_2,k_1;T+\frac{\pi i}{2}\right)\zeta_*\left(k_{a+1},\ldots,k_{r-1},k_r;T-\frac{\pi i}{2}\right)$$

を考えると，素朴に調和積を計算することにより，これが T に依存しない定数であることが確かめられる。このことから明示公式

$$\lim_{m\to\infty} z_m(\boldsymbol{k}; e^{\frac{2\pi i}{m}}) = \sum_{a=0}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_a}\zeta_*\left(k_a,\ldots,k_2,k_1;\frac{\pi i}{2}\right)\zeta_*\left(k_{a+1},\ldots,k_{r-1},k_r;-\frac{\pi i}{2}\right)$$

が得られる。定理の主張はこの公式の帰結である。 $\square$

最後の極限値の明示公式について，広瀬 [10] による対称多重ゼータ値の正規化反復積分への持ち上げとの一致について触れておこう。彼が考察したのは，$a_1,\ldots,a_k\in\{0,1\}$ に対し

$$Z^{RS}(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta}\omega_{a_1}\cdots\omega_{a_k}\in\mathbb{C}$$

で定義される正規化反復積分である。ただし，$\beta:(0,1)\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\backslash\{0,1,\infty\}$ は接基点 $\vec{1}_0$ から接基点 $-\vec{1}_1$ を一周して接基点 $\vec{1}_0$ に戻ってくる尖った道 (の合成) であり，$\beta^*(\omega_a)(t)=\frac{dt}{t-a}$ $(a\in\{0,1\})$ である (尖った道の解説は [1] の山本氏の記事を参照されたい)。正規化基本定理などを使って，インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し，等式

$$\xi(\boldsymbol{k}) = (-1)^d Z^{RS}(e_1e_0^{k_d-1}\cdots e_1e_0^{k_2-1}e_1e_0^{k_1-1}e_1) \tag{1.3}$$

が示せる。Z^{RS} はシャッフル積を満たすため，対称多重ゼータ値のいわゆる線形シャッフル関係式が自然な形で証明される。広瀬 [10] とは独立に Jarossay [14] により，Drinfeld 結合子 (シャッフル正規化多重ゼータ値の非可換母関数) を用いた Z^{RS} の定義が導入されていることにも注意しておく。

1.4 有限および対称多重ゼータ値の関係式への応用

さて，定理 1.7 と定理 1.8 の帰結を述べよう。重さ k の $z_m(\boldsymbol{k}; e^{2\pi i/m})$ で生成される円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の部分空間を $\mathcal{Q}_{m,k}$ とし，$\mathcal{Q}_m=\sum_{k\geq 0}\mathcal{Q}_{m,k}$ とおく。(有限) q-多重ゼータ値の調和積により，$\mathcal{Q}_m$ は $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の部分代数となる。

命題 1.9. 有理数たち $\{c_{\boldsymbol{k}}\in\mathbb{Q}\}$ について，ある数 $M\gg 0$ より大きいすべての整数 m に対し，

$$\sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}} z_m(\boldsymbol{k}; e^{\frac{2\pi i}{m}}) = \sum_{a\geq 1}(1-e^{\frac{2\pi i}{m}})^a f_a(m) v_{m,a} \tag{1.4}$$

を満たす次数 a の多項式 $f_a(x)\in\mathbb{Q}[x]$ と $v_{m,a}\in\mathcal{Q}_m$ が存在するならば

$$\sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})=0 \text{ および } \sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})=0$$

が成り立つ。

ちなみに $(1-\zeta_m)^k \in \mathcal{Q}_{m,k}$ である。これは，$z_m(k;\zeta_m) = (1-\zeta_m)^k f_k(m)$ を満たす次数 k の多項式 $f_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在することよりわかる ([3, Eq. (2.5)])。したがって，q-多重ゼータ値の調和積により，式 (1.4) の右辺は $\mathcal{Q}_m$ のイデアル $(1-e^{2\pi i/m})\mathcal{Q}_m$ の元である。

命題 1.9 の証明について触れておく。まず，M より大きいすべての素数 p について式 (1.4) の両辺を mod $(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]$ したものを並べると $\sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = 0$ が得られる。一方，$m \to \infty$ での極限値について，$a \geq b \geq 1$ に対し，$\lim_{m\to\infty}(1-e^{2\pi i/m})^a m^b = -2\pi i\delta_{a,b}$ である。ゆえに，式 (1.4) の両辺の極限値の実部のイデアル $\pi^2\mathcal{Z}$ による剰余類をとると $\sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) = 0$ となる。

さて，有限および対称多重ゼータ値の関係式 ‘すべて’ が式 (1.4) のような関係式に持ち上がるのならばうれしいのだが，実際にはそうはなっていないようである。多重調和 ζ_m-値について，知られている関係式族を列挙しておく。詳細は適宜文献を参照されたい。

- 調和関係式の類似 [3]
- スター版 $z_m^{\star}(\boldsymbol{k};\zeta_m)$ における duality 類似や reversal 関係式 [3]
- 大野型関係式 [21]
- 線形シャッフル関係式の類似 [21]

大事なポイントなので，応用を述べておく。多重調和 ζ_m-値の調和関係式の類似に命題 1.9 を適用すると，有限および対称多重ゼータ値の調和関係式 (cf. [15])

$$\zeta_\bullet(\boldsymbol{k})\zeta_\bullet(\mathbf{l}) = \zeta_\bullet(\boldsymbol{k} * \mathbf{l}) \quad (\bullet \in \{\mathcal{A},\mathcal{S}\})$$

が得られる。また，duality 類似や reversal 関係式に命題 1.9 を適用すると，Hoffman [11] や Jarossay [13] の結果

$$\zeta_\bullet^\star(\boldsymbol{k}) = -\zeta_\bullet^\star(\boldsymbol{k}^\vee) \text{ および } \zeta_\bullet^\star(\boldsymbol{k}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})}\zeta_\bullet^\star(\overline{\boldsymbol{k}}) \quad (\bullet \in \{\mathcal{A},\mathcal{S}\})$$

の q 類似を用いた新証明が得られる。上述の duality 類似や reversal 関係式は (1.4) の右辺が 0 となるような関係式となっているのだが，多重調和 ζ_m-値の大野型関係式は (1.4) の右辺が 0 とならないような関係式となっている。命題 1.9 を適用すると，小山 [18] により得られた有限および対称多重ゼータ値の大野型関係式の別証が得られる。線形シャッフル関係式については，(1.4) のような形に変形できないと思われる。それゆえ，対称多重ゼータ値の線形シャッフル関係式の別証とまではいえていない。

数値的には，(1.4) を満たす $z_m(\boldsymbol{k};\zeta_m)$ の関係式族のなかで最も大きいクラスは大野型関係式のようである。(1.4) のような関係式に持ち上がらない有限および対称多重ゼータ値の関係式が存在しうるわけだが，その最初の例は以下であろうと思われる:

$$\zeta_\bullet(4,1) - \zeta_\bullet(3,1,1) = 0 \quad (\bullet \in \{\mathcal{A},\mathcal{S}\}).$$

1.5　さらなる課題

さて，定理 1.7 と定理 1.8 を鑑みると，金子-Zagier 予想は多重調和 ζ_m-値の二通りの '極限値' の間の 1 対 1 対応を主張していることになる。この視点にたってみると，どんな多重ゼータ値の有限 q 類似について同じような現象が起こるのだろうかという疑問が生じる。Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値版 [4] や以下で述べる多重 L 値版 [22] については類似の結果がある。他のタイプではどうであろうか。

2　レベル N の金子-Zagier 予想

2.1　多重 L 値

1 の N 乗根の集合を μ_N とおく。レベル N の多重 L 値は，インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\dots,\eta_r)\in\mu_N^r$ に対し，

$$L\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}=L\binom{\eta_1,\dots,\eta_r}{k_1,\dots,k_r}=\sum_{m_1>\cdots>m_r>0}\frac{\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

と定義される。ただし，収束のため $\binom{\eta_1}{k_1}\neq\binom{1}{1}$ である。重さ k のレベル N で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k^{(N)}$ と表すと，やはり混合 Tate モチーフ理論から $\mathcal{Z}_k^{(N)}$ の次元の上限に関する結果が知られている (cf. [8])。さらに詳しく，$N=2,3,4,8$ の場合，$\mathbb{Z}[\mu_N,\frac{1}{N}]$ 上の混合 Tate モチーフのすべての周期はレベル N の多重 L 値で記述できることが Deligne [7] により示されている。また，多重 L 値に対する正規化複シャッフル関係式や正規化基本定理なども研究されている (cf. [2, 19])。ここから，$\mathcal{Z}^{(N)}:=\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k^{(N)}$ は $\mathbb{Q}$ 代数であることもわかる。

2.2　有限 q 類似の極限値

すでに，Jarossay [14] や Singer-Zhao [20] により独立に有限および対称多重 L 値が導入されているが，我々はこれを多重 L 値の有限 q 類似の 1 のベキ根での値の極限値として定義したい。素朴な有限 q 類似は

$$z_m\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}};q):=\sum_{m>m_1>\cdots>m_r>0}\frac{\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}}{[m_1]^{k_1}\cdots[m_r]^{k_r}} \tag{2.1}$$

であろう。簡単のため，定義 1.6 の有限 q 類似の分子における $q^{m_a(k_a-1)}$ という項は考えない (すると，多重 L 値と全く同じ形の調和関係式を満たす)。これについても，p が素数なら $z_p\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}};\zeta_p)\in\mathbb{Z}[\zeta_{pN}]$ であり，$(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p]$ の上にある $\mathbb{Z}[\zeta_{pN}]$ の素イデアル $\mathfrak{P}$ で商をとったものの列を考えれば，有限多重 L 値が定義できよう[*3]。このとき，$\mathbb{Z}[\zeta_{pN}]/\mathfrak{P}$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\mathbb{F}_p$ の有限次拡大体であることに注意しておく。しかし，その対応物 (対称サイド) を構成する

[*3] この設定については，野村次郎氏 (東京理科大学) より助言をいただいた。

アイデアがない (Kontsevich のアイデアが使えるか?)。そこで，金子-Zagier の発見とは逆順になるが，定理 1.8 を拡張することで対称多重 L 値の定義を模索しよう。次の漸近公式が出発点となる。

定理 2.1. $N \geq 1$ とする。インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r) \in \mu_N^r$ に対し，

$$z_m\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{k}\end{matrix}; e^{\frac{2\pi i}{m}}\right) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{k_1+\cdots+k_j} (\eta_1\cdots\eta_j)^m \\ \times L_*\left(\begin{matrix}\overline{\eta}_j, \ldots, \overline{\eta}_1\\ k_j, \ldots, k_1\end{matrix}; \log\left(\frac{m}{\pi}\right) + \gamma + \frac{\pi i}{2}\right) L_*\left(\begin{matrix}\eta_{j+1}, \ldots, \eta_r\\ k_{j+1}, \ldots, k_r\end{matrix}; \log\left(\frac{m}{\pi}\right) + \gamma - \frac{\pi i}{2}\right) \\ + O\left(\frac{\log^J m}{m}\right) \quad (m \to \infty)$$

が成り立つ。ただし，$L_*\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{k}\end{smallmatrix}; T\right) \in \mathcal{Z}^{(N)}[T]$ は調和正規化多重 L 値であり，$\overline{\eta}$ は複素共役を意味する。

証明方針は $N = 1$ の場合と同じだが，多重 L 値の収束判定同様，Abel 総和法を使って収束をよくしなければならない場面がある。

定理 2.1 の右辺は，少なくとも $(\eta_1\cdots\eta_j)^m$ という項が収束しない。これを収束させるには，$\alpha \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ をとって，$m = m'N + \alpha$ とし，極限 $m' \to \infty$ を考えれば良い。それでもまだ右辺の log 項の寄与を考えねばならないが，実は log 項はキャンセルすることがわかる。すなわち，インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r) \in \mu_N^r$，$\alpha \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し，

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^{k_1+\cdots+k_j} (\eta_1\cdots\eta_j)^\alpha L_*\left(\begin{matrix}\overline{\eta}_j, \ldots, \overline{\eta}_1\\ k_j, \ldots, k_1\end{matrix}; T + \frac{\pi i}{2}\right) L_*\left(\begin{matrix}\eta_{j+1}, \ldots, \eta_r\\ k_{j+1}, \ldots, k_r\end{matrix}; T - \frac{\pi i}{2}\right)$$

は T に依存しない定数となり，$\mathcal{Z}^{(N)}[2\pi i]$ の元となる (証明は正規化基本定理などを使ってやや複雑な計算を行っているのだが，それゆえに (1.3) のような反復積分の和で表す公式も出てくる)。このことからクラス α に対する $z_m\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{k}\end{smallmatrix}; e^{2\pi i/m}\right)$ の極限値が次のように求まる。

定理 2.2. 自然数 $N \geq 1$ とする。インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r) \in \mu_N^r$，$\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ に対し，

$$\xi_\alpha\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{k}\end{matrix}\right) := \lim_{m' \to \infty} z_{m'N+\alpha}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{k}\end{matrix}; e^{\frac{2\pi i}{m'N+\alpha}}\right) \\ = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{k_1+\cdots+k_j} (\eta_1\cdots\eta_j)^\alpha L_*\left(\begin{matrix}\overline{\eta}_j, \ldots, \overline{\eta}_1\\ k_j, \ldots, k_1\end{matrix}; \frac{\pi i}{2}\right) L_*\left(\begin{matrix}\eta_{j+1}, \ldots, \eta_r\\ k_{j+1}, \ldots, k_r\end{matrix}; -\frac{\pi i}{2}\right).$$

ただし，$N = 1$ の場合，$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times := \{1\}$ とおく。

例えば，$\xi_\alpha\binom{1}{1} = -\pi i$ となる。定義から，値 $\xi_\alpha\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{k}\end{smallmatrix}\right)$ が調和積を満たすことは明らかである。

値 $\xi_\alpha\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{k}\end{smallmatrix}\right)$ の適切な商が対称多重 L 値の候補といえよう。クラス α については，$\alpha \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ でもよいがあとの都合，既約剰余類しか考えない。定義より，各 $\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ について，

すべての $\xi_\alpha\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}$ で生成される $\mathbb{Q}(\mu_N)$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^{(N;\alpha)}$ は $\mathcal{Z}^{(N)}[2\pi i]\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\mu_N)$ の部分空間である。調和積があるので，実際には $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^{(N;\alpha)}\subset\mathcal{Z}^{(N)}[2\pi i]\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\mu_N)$ は部分代数であることまでわかる。等号成立について注意しておこう。$N=1$ の場合，安田 [23] の結果を用いることで $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^{(1;1)}=\mathcal{Z}^{(1)}[2\pi i]$ が示せる (cf. [10]) が，$N\geq 2$ については未解決である。ちなみに，$N\geq 3$ ならば，$2\pi i\in\mathcal{Z}^{(N)}$ ゆえ，$\mathcal{Z}^{(N)}=\mathcal{Z}^{(N)}[2\pi i]$ となる。

対称多重 L 値を定義しよう。

定義 2.3. N を自然数，$\alpha\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ とする。インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_r)\in\mu_N^r$ に対し，剰余類

$$L_{\mathcal{S},\alpha}\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}:=\xi_\alpha\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}\mod 2\pi i\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^{(N;\alpha)}$$

を対称多重 L 値 (*symmetric colored multiple zeta value*) とよぶ。

さて，有限多重 L 値を導入する。金子-Zagier 予想が多重調和 ζ_m-値の二通りの極限値の間の対応であるという視点から定理 2.2 を鑑みると，有限多重 L 値も “クラス α”に依存するような対象として定義すべきであろう。まずは，適切な Kontsevich の環 $\mathcal{A}$ の類似を導入しよう。剰余体 $\mathbb{Z}[\zeta_{pN}]/\mathfrak{P}$ は $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大体であったので，自然数 $N\geq 1$ と $\alpha\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ に対し，α と法 N で合同となる素数からなる集合を $P(N;\alpha)=\{p:$素数$\mid p\equiv\alpha\mod N\}$ とおき，

$$\mathcal{A}(\alpha)=\mathcal{A}(N;\alpha):=\left(\prod_{p\in P(N;\alpha)}\overline{\mathbb{F}}_p\right)\Big/\left(\bigoplus_{p\in P(N;\alpha)}\overline{\mathbb{F}}_p\right)$$

とする。ただし，$\overline{\mathbb{F}}_p$ は $\mathbb{F}_p$ の代数閉体であり，$N=1$ の場合 $P(1;1)$ はすべての素数からなる集合とする。$P(N;\alpha)$ は無限個の要素を持ち，素数全体における密度は $1/\varphi(N)$ である (Chebotarev の密度定理)。$\overline{\mathbb{Q}}$ を対角に埋め込むことができるので，$\mathcal{A}(\alpha)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 代数である。

定義 2.4. N を自然数，$\alpha\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ とする。インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_r)\in\mu_N^r$ に対し，

$$L_{\mathcal{A},\alpha}\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}:=\left(\sum_{p>m_1>\cdots>m_r>0}\frac{\eta_1^{m_1}\cdots\eta_r^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\mod\mathfrak{P}\right)_{p\in P(N;\alpha)}\in\mathcal{A}(\alpha)$$

を有限多重 L 値 (*finite colored multiple zeta value*) とよぶ。

定義から直ちに次がわかる。

定理 2.5. N を自然数，$\alpha\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ とする。インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_r)\in\mu_N^r$ に対し，

$$\left(z_p\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}};\zeta_p\right)\mod\mathfrak{P}\right)_{p\in P(N;\alpha)}=L_{\mathcal{A},\alpha}\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}.$$

調和積より，すべての $L_{\mathcal{A},\alpha}\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}$ で生成される $\mathbb{Q}(\mu_N)$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^{(N;\alpha)}$ は $\mathcal{A}(N;\alpha)$ の部分代数となる。

2.3 観察

さて，$\mathbb{Q}(\mu_N)$ 線形写像

$$\varphi_{KZ}^{(N;\alpha)} : \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^{(N;\alpha)} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^{(N;\alpha)}/2\pi i\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^{(N;\alpha)}$$

をインデックス $\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}$ に対し，$\varphi_{KZ}^{(N;\alpha)}(L_{\mathcal{A},\alpha}\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}) = L_{\mathcal{S},\alpha}\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}$ により定めると，$\varphi_{KZ}^{(N;\alpha)}$ は代数同型写像であろうか。$\alpha = 1$ の場合は Jarossay [14]，$\alpha = -1$ の場合は Singer-Zhao [20] により，$\varphi_{KZ}^{(N;\alpha)}$ は同型写像であると予想されている。同じ関係式を満たすこと (well-defined 性) を検証するのが当面の課題といえよう。[22] では，有限および対称多重 L 値が，調和関係式，線形シャッフル関係式，reversal 関係式を満たすことを示している。しかしながら，もう少し確証が欲しいところである。

写像 $\varphi_{KZ}^{(N;\alpha)}$ が同型であるかについて，数値実験による検証結果を述べておこう。クラス α，重さ k の有限多重 L 値 $L_{\mathcal{A},\alpha}\binom{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{k}}$ で生成される $\mathbb{Q}(\mu_N)$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(N;\alpha)}$ で表す。確かめれる範囲では，この次元は $\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の取り方によらないようである:

$$\dim_{\mathbb{Q}(\mu_N)} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(N;\alpha)} \stackrel{?}{=} \dim_{\mathbb{Q}(\mu_N)} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(N;\beta)} \quad (\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, \alpha \neq \beta)$$

レベル 10 までの $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(N;\alpha)}$ の次元表は以下である。

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(1;1)}$	0	0	1	0	1	1	1	2
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(2;1)}$	1	1	2	3	5	8	13	21
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(3;1)}$	1	2	4	8	16	32		
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(4;1)}$	1	2	4	8	16	32		
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(5;1)}$	2	5	14	39				
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(6;1)}$	2	5	13	34				
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(7;1)}$	3	10	35					
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(8;1)}$	2	6	18	54				
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(9;1)}$	3	12	48					
$\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(10;1)}$	3	11	41					

一方, $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^{(N;\alpha)}$ は多重 L 値の空間 $\mathcal{Z}^{(N)}[2\pi i]\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\mu_N)$ の部分空間なので, Deligne-Goncharov [8] の結果から次元の上限が得られる。彼らの結果は，むしろ $\mathbb{Z}[\mu_N, 1/N]$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏 $\mathcal{MT}_N$ の淡中基本群の副べき単部分の座標環 $\mathcal{A}^{\mathcal{MT}_N} = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{A}_k^{\mathcal{MT}_N}$ の次数 k 部分の次元公式 [8, Theorem 5.24] である。この次元公式を使って計算すると，上の表に現れる数字が $\mathcal{A}_k^{\mathcal{MT}_N}$ の次元以下であることが確かめられる。特に，$N =$

$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$ の場合に等号

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}_k^{\mathcal{MT}_N} \stackrel{?}{=} \dim_{\mathbb{Q}(\mu_N)} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}^{(N;\alpha)} \tag{2.2}$$

が成り立つようである*4。$N = 1, 2, 3, 4, 8$ の場合，$\mathcal{MT}_N$ のすべての周期が多重 L 値でかけるという Brown [6] や Deligne [7] の結果を鑑みるに，等号 (2.2) が成り立つならば $\varphi_{KZ}^{(N;\alpha)}$ が同型であることは十分に信じれる予想といえよう。さらに言えば，$\varphi_{KZ}^{(N;\alpha)}$ の同型予想は $N = 6, 9, 10$ の場合にも $\mathcal{MT}_N$ のすべての周期が (対称) 多重 L 値でかけることを示唆しうる。どの N について，このようなことが言えるのかもう少し詳しく調べてみる価値はありそうである。ちなみに，素数 $p \geq 5$ に対し，$N = p^n$ の場合はレベル N の多重 L 値で表せないような $\mathcal{MT}_N$ の周期の存在が指摘されている [25]。いったいどのような周期なのか，そちらにも興味がわく。

ところで，α によるクラス分けの必要性を検証するひとつの実験として，有限多重 L 値を $\overline{\mathbb{Q}}$ 代数 $\prod_p \overline{\mathbb{F}}_p / \bigoplus_p \overline{\mathbb{F}}_p$ (p は全ての素数) の元として定義した場合の次元を計算してみたところ，$N \geq 5$ では関係式の個数が減ることが観察された。すなわち，$\mathcal{A}^{\mathcal{MT}_N}$ の次元よりも大きくなるということなので，対称多重 L 値との対応を信じるならば，これはあまり嬉しいことではなさそうである。

参考文献

[1] 第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」報告集

[2] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値入門, COE Lecture Note Vol. 23, 九州大学 (2010)

[3] H. Bachmann, Y. Takeyama, K. Tasaka, *Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values*, Compositio Math. **154**(12) (2018), 2701–2721.

[4] H. Bachmann, Y. Takeyama, K. Tasaka, *Finite and symmetric Mordell-Tornheim multiple zeta values*, arXiv:2001.10694.

[5] D.M. Bradley, *Duality for finite multiple harmonic q-series*, Discrete Math. **300** (2005), no. 1-3, 44–56.

[6] F. Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Ann. of Math. **175** (2012), no. 2, 949–976.

[7] P. Deligne, *Le groupe fondamental unipotent motivique de* $\mathbb{G}_m \backslash \mu_N$ *pour* $N = 2, 3, 4, 6$ *or* 8, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **112** (1) (2010) 101–141.

[8] P. Deligne, A. B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 38 (2005), 1–56.

[9] H. Furusho, *Around associators*, Automorphic forms and Galois representations. Vol. 2, 105–117, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 415, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.

[10] M. Hirose, *Double shuffle relations for refined symmetric multiple zeta values*, arXiv:1807.04747v2.

*4 予想式 (2.2) の注意：我々の有限および対称多重 L 値は $\mathbb{Q}(\mu_N)$ 線形関係式をみたす例 (reversal 関係式) があるため，$\mathbb{Q}$ 線形関係式の個数が Deligne-Goncharov の結果で期待されるような個数に落ちるかはただちにわかることではないと思われる。

[11] M.E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.

[12] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[13] D. Jarossay, *Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés*, C. R. Math. **352** (2014), 767–771.

[14] D. Jarossay, *Adjoint cyclotomic multiple zeta values and cyclotomic multiple harmonic values*, preprint.

[15] M. Kaneko, *An introduction to classical and finite multiple zeta values*, to appear in Publications Mathématiques de Besancon.

[16] M. Kaneko and D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.

[17] M. Kontsevich, *Holonomic D-modules and positive characteristic*, Jpn. J. Math., **4**(1) (2009), 1–25.

[18] K. Oyama, *Ohno-type relation for finite multiple zeta values*, arXiv:1506.00833.

[19] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de lúnité*, Publ. Math. IHES 95 (2002), 185–231

[20] J. Singer, J. Zhao, *Finite and symmetrized colored multiple zeta values*, preprint 1512.03691[NT].

[21] Y. Takeyama, *Derivations on the algebra of multiple harmonic q-series and their applications*, to appear in Ramanujan J..

[22] K. Tasaka, *Finite and symmetric colored multiple zeta values and multiple harmonic q-series at roots of unity*, arXiv:1907.01935.

[23] S. Yasuda, *Finite real multiple zeta values generate the whole space Z*, Int. J. Number Theory **12** (2016), no. 3, 787–812.

[24] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.

[25] J. Zhao, *Standard relations of multiple polylogarithm values at roots of unity*, Doc. Math. **15** (2010), 1–34.