On Hoffman's t-values of maximal height

村上　拓也（九州大学）

概要

高さ最大 (インデックスの成分がすべて 2 以上) の多重 t 値が, 多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線形和で表されることを証明した. また, 多重ゼータ値がインデックスの成分が 2 または 3 からなる多重 t 値の線形和で表されることを証明した.

1　導入

インデックス $\Bbbk=(k_1,\ldots,k_p)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^p$ に対し, $|\Bbbk|=k_1+\cdots+k_p$ を重さ, p を深さと呼ぶ. はじめに, 多重ゼータ値, 多重 t 値の定義について述べる.

定義 1. インデックス $\Bbbk=(k_1,\ldots,k_p)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^p$, $k_p\geq 2$ に対して, 多重ゼータ値, 多重 t 値をそれぞれ

$$\zeta(k_1,\ldots,k_p):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_p}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_p^{k_p}}\in\mathbb{R},$$

$$t(k_1,\ldots,k_p):=\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_p\\ m_1,\ldots,m_p:\mathrm{odd}}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_p^{k_p}}\in\mathbb{R}$$

と定義する. $k_p\geq 2$ は, 多重ゼータ値や多重 t 値が収束する条件である.

次に, Euler Sum の定義について述べる.

定義 2. $(k_1,\ldots,k_p)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^p$, $\epsilon_j\in\{\pm 1\}$, $(k_p,\epsilon_p)\neq(1,1)$ に対して,

$$\zeta(\epsilon_1k_1,\ldots,\epsilon_pk_p):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_p}\frac{\epsilon_1^{m_1}\cdots\epsilon_p^{m_p}}{m_1^{k_1}\cdots m_p^{k_p}}\in\mathbb{R}$$

と定義する. $(k_p,\epsilon_p)\neq(1,1)$ が Euler Sum が収束する条件である.

注意 3.

$$\sum_{0<m_1<\cdots<m_p}\frac{(1-(-1)^{m_1})\cdots(1-(-1)^{m_p})}{m_1^{k_1}\cdots m_p^{k_p}}$$

を展開することで,

$$t(k_1,\ldots,k_p)=\frac{1}{2^p}\sum_{\epsilon_m\in\{\pm 1\}}\epsilon_1\cdots\epsilon_p\zeta(\epsilon_1k_1,\ldots,\epsilon_pk_p)$$

が得られる.

$\mathcal{Z}_k, \mathcal{T}_k, ES_k$ を, それぞれ重さが k の多重ゼータ値, 多重 t 値, Euler Sum で張られる $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間とする. $\mathcal{Z}_k$ の予想次元については, 数列 d_k を, 漸化的に

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\ (k \geq 3)$$

で定めるとき, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$ であろう, ということが Zagier により予想されている. また, ES_k の予想次元はフィボナッチ数列, $\mathcal{T}_k$ の予想次元はそれを 1 つずらした数列になっている.

各予想次元を表にすると以下のようになる.

重さ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_k$	1	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$\dim_{\mathbb{Q}} ES_k$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

多重ゼータ値の張る空間の次元に比べれば, 多重 t 値の張る空間の次元は随分大きいことがわかる.

次に, 多重積分を考える.

定義 4. $a_1, \ldots, a_n \in \{0, \pm 1\}$ で, $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 1$ とする.

$$I(0; a_1, \ldots, a_n; 1) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n - a_n}$$

と定義する.

Euler sum はこの反復積分を用いて次のように表すことができる.

$$\zeta(\epsilon_1 n_1, \ldots, \epsilon_p n_p) = (-1)^p I(0; \eta_1, 0^{n_1 - 1}, \eta_2, 0^{n_2 - 1}, \ldots, \eta_p, 0^{n_p - 1}; 1).$$

ここで, $\eta_i = \epsilon_i \cdots \epsilon_p$ である.

例えば, $\zeta(-2, 3, -4) = -I(0; \underbrace{1, 0}_{2}, \underbrace{-1, 0, 0}_{3}, \underbrace{-1, 0, 0, 0}_{4}; 1)$ となる.

金子-田坂は [3] の中で, 次の (i) を示し, (ii) を予想した. そして Jin-Li は, [5] の中で, (ii) を示した.

定理 5. (i) 5 以上の奇数 N に対し,

$$\langle t(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 = N, k_i \geq 2 (i = 1, 2) \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \langle \zeta(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 = N, k_2 \geq 2 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

(ii) 4 以上の偶数 N に対し,

$$\langle t(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 = N, k_i : even\ (i = 1, 2) \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \langle \zeta(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 = N, k_2 \geq 2 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

特に, この定理は k_1, k_2 が 2 以上で, ともに奇数ではないとき, $t(k_1, k_2) \in \mathcal{Z}$ であることを示している.

今回, Glanois[4] の手法を用いることで, 次の結果を得た. 多重ゼータ値で張られる $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間を $\mathcal{Z}$ で表す.

定理 6 (M.)**.** $k_1, \ldots, k_p \geq 2$ に対し,

$$t(k_1, \ldots, k_p) \in \mathcal{Z}.$$

Hoffman は, インデックスが 2 または 3 のみからなる多重ゼータ値たちで $\mathcal{Z}$ が張られることを予想し, Brown がそれを証明した. 今回の第 2 の結果として, 多重 t 値による類似の結果を得た.

定理 7 (M.)**.** *$\mathcal{Z}$ は,*

$$\{t(k_1,\ldots,k_p) \mid k_1,\ldots,k_p \in \{2,3\}\}$$

の元で $\mathbb{Q}$ 上張られる.

この定理から, 多重ゼータ値で $\mathbb{Q}$ 上張られる線型空間は, 多重 t 値で張られる空間に含まれることもわかる.

2 モチビックの準備

Glanois は, [4] の中で, $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 上の混合テイトモチーフの理論から次のものを構成した.

$a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \epsilon_i \in \{\pm 1\}$ $(1 \leq i \leq p)$ に対し, モチビック Euler Sum は, モチビックな反復積分を用いて,

$$\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\epsilon_1 k_1,\ldots,\epsilon_p k_p) := (-1)^p I^{\mathfrak{m}}(0; 0^a, \eta_1, 0^{k_1-1}, \eta_2, 0^{k_2-1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p-1}; 1)$$

と定義される. $a=0$ のときは, $\zeta_0^{\mathfrak{m}}$ を $\zeta^{\mathfrak{m}}$ と表す. また, $\epsilon_1=\cdots=\epsilon_p=1$ のとき, $\zeta_a^{\mathfrak{m}}(k_1,\ldots,k_p)$ をモチビック多重ゼータ値と呼ぶ. モチビックな反復積分の定義や性質については, [4] を参照. $\mathcal{H}^2$ (resp. $\mathcal{H}^1$) をモチビック Euler Sum (resp. モチビック多重ゼータ値) が $\mathbb{Q}$ 上張る線形空間とし, $\mathcal{H}_N^2$ (resp. $\mathcal{H}_N^1$) を重さが N の部分空間とする. $\mathcal{H}^2$ はシャッフル積により自然に次数付き $\mathbb{Q}$-代数 $\mathcal{H}^2 = \bigoplus_{N\geq 0}\mathcal{H}_N^2$ の構造を持つ. 周期写像と呼ばれる, $\mathcal{H}^2$ から $\mathbb{R}$ への全射準同型写像で, $\zeta^{\mathfrak{m}}(\epsilon_1 k_1,\ldots,\epsilon_p k_p)$ を $\zeta(\epsilon_1 k_1,\ldots,\epsilon_p k_p)$ に写すものがある. $\mathcal{A} := \mathcal{H}^2/\zeta^{\mathfrak{m}}(2)\mathcal{H}^2$ とおき, $\mathcal{A}_N$ を次数 N の部分とする. 自然な全射 $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{A}$ による $I^{\mathfrak{m}}$ (resp. $\zeta^{\mathfrak{m}}$) の像を $I^{\mathfrak{a}}$ (resp. $\zeta^{\mathfrak{a}}$) とかく. $\mathcal{L} := \mathcal{A}_{>0}/\mathcal{A}_{>0}\cdot\mathcal{A}_{>0}$ とおき, $\mathcal{L}_N$ を次数 N の部分とする. 自然な全射 $\mathcal{A}_{>0} \to \mathcal{L}$ による $I^{\mathfrak{a}}$ (resp. $\zeta^{\mathfrak{a}}$) の像を $I^{\mathfrak{l}}$ (resp. $\zeta^{\mathfrak{l}}$) とかく.

モチビック Euler Sum や モチビックな反復積分について, 以下のような性質がある.

(I1) $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1) = 1.$

(I2) $a_0 = a_{n+1}, n \geq 1$ のとき, $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1,\ldots,a_n; a_{n+1}) = 0.$

(I3)

$$\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\epsilon_1 k_1,\ldots,\epsilon_p k_p) = (-1)^a \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_p=a \\ i_j\geq 0\ (1\leq j\leq p)}} \binom{k_1+i_1-1}{i_1}\cdots\binom{k_p+i_p-1}{i_p}\zeta^{\mathfrak{m}}\left(\epsilon_1(k_1+i_1),\ldots,\epsilon_p(k_p+i_p)\right).$$

(I4) Path composition:

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1,\ldots,a_n; a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1,\ldots,a_i; x)\, I^{\mathfrak{m}}(x; a_{i+1},\ldots,a_n; a_{n+1}). \quad (x \in \{0,\pm 1\})$$

(I5) Path reversal: $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) = (-1)^n I^{\mathfrak{m}}(a_{n+1}; a_n, \dots, a_1; a_0)$.

(I6) Homothety: $I^{\mathfrak{m}}(0; -a_1, \dots, -a_n; -a_{n+1}) = I^{\mathfrak{m}}(0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1})$.

$t^{\mathfrak{m}}(k_1, \dots, k_p) := \dfrac{1}{2^p} \displaystyle\sum_{\epsilon_m \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_p \zeta^{\mathfrak{m}}(\epsilon_1 k_1, \dots, \epsilon_p k_p)$ とおき, モチビック多重 t 値とよぶ.

定理 8 (Brown[1], Glanois[4])**.** 以下の式で与えられる *well-defined* な $\mathbb{Q}$-線形写像 $D_r : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathcal{L}_r \otimes \mathcal{H}^2$ が存在する.

$$
\begin{aligned}
&D_r(I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1})) \\
&= \sum_{p=0}^{n-r} I^{\mathfrak{l}}(a_p; a_{p+1}, \dots, a_{p+r}; a_{p+r+1}) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_p, a_{p+r+1}, \dots, a_n; a_{n+1})
\end{aligned}
$$

右辺の 1 つの項 $I^{\mathfrak{l}}(a_p; a_{p+1}, \dots, a_{p+r}; a_{p+r+1}) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_p, a_{p+r+1}, \dots, a_n; a_{n+1})$ を, 次の図のように a_p と a_{p+r+1} を結んだ図で表すことにする.

$$
a_0; a_1, \dots \overbrace{a_p, a_{p+1}, \dots a_{p+r}, a_{p+r+1}} \dots, a_n; a_{n+1}
$$

例えば, 具体的に次のように計算される.

1st term 3rd term

$$
\begin{aligned}
D_1(I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, a_2, a_3; a_4)) =& I^{\mathfrak{l}}(a_0; a_1; a_2) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_2, a_3; a_4) \\
&+ I^{\mathfrak{l}}(a_1; a_2; a_3) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, a_3; a_4) \\
&+ I^{\mathfrak{l}}(a_2; a_3; a_4) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, a_2; a_4).
\end{aligned}
$$

2nd term

Brown は, 次の定理を用いて, Zagier が示した定理 14 をモチビック多重ゼータ値の関係式に持ち上げた.

定理 9 (Brown [1, Theorem3.3])**.** $N \geq 2$ とし, $D_{<N} = \oplus_{1<2r+1<N} D_{2r+1}$ とおくと

$$
\ker D_{<N} \cap \mathcal{H}_N = \mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(N)
$$

が成り立つ.

この定理に加え, 次の定理が主結果の証明に重要となる.

定理 10 (Glanois[4])**.** $\xi \in \mathcal{H}^2$ に対し,

$$
\xi \in \mathcal{H}^1 \quad \Longleftrightarrow \quad D_1(\xi) = 0 \quad \text{かつ} \quad \text{任意の奇数 } r \text{ に対し } D_r(\xi) \in \mathcal{L}_r \otimes \mathcal{H}^1.
$$

3 定理 6 の証明の概略

$\Bbbk = (k_1, \dots, k_p)$ に対し, $\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(k_1, \dots, k_p) := 2^{|\Bbbk|} t^{\mathfrak{m}}(k_1, \dots, k_p)$ とする. $\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(k_1, \dots, k_p)$ をモチビックな反復積分の和で表し, $D_r(\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(k_1, \dots, k_p))$ を直接計算することで次の命題が得られる.

命題 11. $\Bbbk=(k_1,\dots,k_p)\in(\mathbb{Z}_{\ge 2})^p$ に対し,

$$\begin{aligned}
&D_r\left(\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_p)\right)\\
&\quad=\sum_{1\le j\le p}\delta_{|\Bbbk_{1,j}|=r}\tilde{t}^{\mathfrak{l}}(k_1,\dots,k_j)\otimes\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(k_{j+1},\dots,k_p)\\
&\quad+\sum_{1\le i<j\le p}\delta_{|\Bbbk_{i+1,j}|\le r<|\Bbbk_{i,j}|-1}\zeta^{\mathfrak{l}}_{r-|\Bbbk_{i+1,j}|}(k_{i+1},\dots,k_j)\otimes\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_{i-1},|\Bbbk_{i,j}|-r,k_{j+1},\dots,k_p)\\
&\quad-\sum_{1\le i<j\le p}\delta_{|\Bbbk_{i,j-1}|\le r<|\Bbbk_{i,j}|-1}\zeta^{\mathfrak{l}}_{r-|\Bbbk_{i,j-1}|}(k_{j-1},\dots,k_i)\otimes\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_{i-1},|\Bbbk_{i,j}|-r,k_{j+1},\dots,k_p).
\end{aligned}$$

ここで, インデックス $\Bbbk=(k_1,\dots,k_p)$ の部分インデックスを $\Bbbk_{i,j}=(k_i,\dots,k_j)$ と表す. また, 記号 $\delta_\bullet$ を, $\bullet$ が真であれば $\delta_\bullet=1$, そうでなければ $\delta_\bullet=0$ と定義する.

定理 12 (M.)**.** $k_1,\dots,k_p\ge 2$ に対し,

$$t^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_p)\in\mathcal{H}^1.$$

証明. $\Bbbk=(k_1,\dots,k_p)\in(\mathbb{Z}_{\ge 2})^p$ とおく. $r=1$ のとき, 命題 11 の右辺の項はすべて消えるから, $D_1\left(\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(\Bbbk)\right)=0$ である. 3 以上の奇数 r に対しては, 重さによる帰納法により命題 11 の右辺の各項は $\mathcal{L}_r\otimes\mathcal{H}^1$ の元であることがわかるから, $D_r\left(\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(\Bbbk)\right)\in\mathcal{L}_r\otimes\mathcal{H}^1$ がいえる. 定理 10 から $t^{\mathfrak{m}}(\Bbbk)\in\mathcal{H}^1$ がいえる. □

周期写像により, この定理の系として定理 6 が得られる.

4 定理 7 の証明の概略

次の定理は, Hoffman が予想し, Brown が証明した.

定理 13 (Brown [1])**.** $\mathcal{Z}$ は,

$$\{\zeta(k_1,\dots,k_p)\mid k_1,\dots,k_p\in\{2,3\}\}$$

の元で $\mathbb{Q}$ 上張られる.

Brown の証明には, 次の Zagier の定理が必要であった.

定理 14 (Zagier [8])**.** $a,b,n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し, $H(a,b):=\zeta(\underbrace{2,\dots,2}_{a},3,\underbrace{2,\dots,2}_{b})$, $H(n):=\zeta(\underbrace{2,\dots,2}_{n})$ とおく. 任意の $a,b\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し,

$$H(a,b)=2\sum_{r=1}^{a+b+1}(-1)^{r-1}\left[-\binom{2r}{2a+2}+(1-2^{-2r})\binom{2r}{2b+1}\right]H(a+b-r+1)\zeta(2r+1)$$

が成り立つ.

Zagier の証明と同様にして, 次の定理を証明することができる.

定理 15 (M.)**.** $\tilde{t}(k_1,\dots,k_p) := 2^{k_1+\cdots+k_p}t(k_1,\dots,k_p)$ とする．$a,b,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$K(a,b) := \tilde{t}(\underbrace{2,\dots,2}_{a},3,\underbrace{2,\dots,2}_{b}), K(n) := \tilde{t}(\underbrace{2,\dots,2}_{n})$ とおく．任意の $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$K(a,b) = 2\sum_{r=1}^{a+b+1}(-1)^{r-1}\left[\binom{2r}{2a+1}+(1-2^{-2r})\binom{2r}{2b+1}\right]K(a+b-r+1)\zeta(2r+1)$$

が成り立つ．

定理 14, 定理 15 は, 重さによる帰納法と定理 9 を用いて, モチビックな関係式に持ち上げられる．

定理 16 (Brown[1])**.** $a,b,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$H^{\mathfrak{m}}(a,b) := \zeta^{\mathfrak{m}}(\underbrace{2,\dots,2}_{a},3,\underbrace{2,\dots,2}_{b})$，$H^{\mathfrak{m}}(n) := \zeta^{\mathfrak{m}}(\underbrace{2,\dots,2}_{n})$ とおく．任意の $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$H^{\mathfrak{m}}(a,b) = 2\sum_{r=1}^{a+b+1}(-1)^{r-1}\left[-\binom{2r}{2a+2}+(1-2^{-2r})\binom{2r}{2b+1}\right]H^{\mathfrak{m}}(a+b-r+1)\zeta^{\mathfrak{m}}(2r+1)$$

が成り立つ．

定理 17 (M.)**.** $a,b,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$K^{\mathfrak{m}}(a,b) := \tilde{t}^{\mathfrak{m}}(\underbrace{2,\dots,2}_{a},3,\underbrace{2,\dots,2}_{b}), K^{\mathfrak{m}}(n) := \tilde{t}^{\mathfrak{m}}(\underbrace{2,\dots,2}_{n})$ とおく．任意の $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$K^{\mathfrak{m}}(a,b) = 2\sum_{r=1}^{a+b+1}(-1)^{r-1}\left[\binom{2r}{2a+1}+(1-2^{-2r})\binom{2r}{2b+1}\right]K^{\mathfrak{m}}(a+b-r+1)\zeta^{\mathfrak{m}}(2r+1) \tag{1}$$

が成り立つ．

$H^{\mathfrak{m}}(a,b)$ の中の $\zeta^{\mathfrak{m}}(2a+2b+3)$ の係数を $c_{2^a32^b}$, $\zeta_1^{\mathfrak{m}}(2^n) = -2\sum_{i=0}^{n-1}H^{\mathfrak{m}}(i,n-1-i)$ の中の $\zeta^{\mathfrak{m}}(2a+2b+3)$ の係数を c_{12^n}, $K^{\mathfrak{m}}(a,b)$ の中の $\zeta^{\mathfrak{m}}(2a+2b+3)$ の係数を $\tilde{c}_{2^a32^b}$ とする．すなわち, $r=a+b+1$ として

$$\begin{aligned}
c_{2^a32^b} &:= 2(-1)^{r-1}\left[-\binom{2r}{2a+2}+(1-2^{-2r})\binom{2r}{2b+1}\right],\\
c_{12^n} &:= -2\sum_{i=0}^{n-1}c_{2^i32^{n-i-1}},\\
\tilde{c}_{2^a32^b} &:= 2(-1)^{r-1}\left[\binom{2r}{2a+1}+(1-2^{-2r})\binom{2r}{2b+1}\right]
\end{aligned}$$

とする．

補題 18 ([1, Lemma 3.8 and Corollary 4.4])**.** 定義から, $c_{2^a32^b}, \tilde{c}_{2^a32^b}\in\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ であり, 次のことがいえる．

(1) $c_{2^a32^b} - c_{2^b32^a}\in 2\mathbb{Z}$,

(2) $\tilde{c}_{2^a32^b} - c_{2^b32^a}\in 2\mathbb{Z}$,

(3) $c_{12^n} = 2(-1)^n$,

(4) $v_2(c_{32^{a+b}}) \le v_2(c_{2^a 32^b}) \le 0$. ($v_2$: 2 進付値)

$\{2,3\}^\times$ を 2,3 を letter とする word の集合とし, $w \in \{2,3\}^\times$ に対し, w の level を $\deg_3 w$ で定義する. $\mathcal{H}^{\{2,3\}} := \langle t^{\mathfrak{m}}(w) \mid w \in \{2,3\}^\times \rangle_{\mathbb{Q}}$, $F_l\mathcal{H}^{\{2,3\}} := \langle t^{\mathfrak{m}}(w) \mid w \in \{2,3\}^\times \ s.t.\ \deg_3 w \le l \rangle_{\mathbb{Q}}$ とすると, 定理 12 よりこれらは $\mathcal{H}^1$ の部分空間である. さらに商空間 $\mathrm{gr}_l\mathcal{H}^{\{2,3\}} := F_l\mathcal{H}^{\{2,3\}}/F_{l-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ を定義すると, D_r は $\mathrm{gr}_l D_r : \mathrm{gr}_l\mathcal{H}^{\{2,3\}} \longrightarrow \mathcal{L}_r \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_{l-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ を誘導する.

定義 19. $N, l \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対し, 写像

$$\partial_{N,l} : \mathrm{gr}_l\mathcal{H}^{\{2,3\}}_N \longrightarrow \bigoplus_{1<2r+1\le N} \mathrm{gr}_{l-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}}_{N-2r-1}$$

を, まず $\bigoplus_{1<2r+1\le N} \mathrm{gr}_l D_{2r+1}\mid_{\mathrm{gr}_l\mathcal{H}^{\{2,3\}}_N}$ で写し, そのあとすべての $\zeta^{\mathfrak{l}}(2r+1)$ を 1 へ写す合成写像として定義する.

定義 20. $l \ge 1$ とする. 2 つの集合 $B_{N,l} = \{w \in \{2,3\}^\times \mid |w| = N, \deg_3 w = l\}$, $B'_{N,l} = \{w \in \{2,3\}^\times \mid |w| \le N-3, \deg_3 w = l-1\}$ に, letter の大小を $3 < 2$ とし, 辞書式順序の逆順で順序を入れた集合を考える. なお, $l = 1$ のときには $B'_{N,l}$ に empty word を含める.

集合 $B_{N,l}$, $B'_{N,l}$ の元の数は一致する. 例として, $N = 10, l = 2$ のとき, $B_{10,2}, B'_{10,2}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} B_{10,2} &= \{2233\,, 2323\,, 2332\,, 3223\,, 3232\,, 3322\,\} \\ B'_{10,2} &= \{223\;\;, 232\;\;, 23\;\;\;\;, 322\;\;, 32\;\;\;, 3\;\;\;\;\;\} \end{aligned}$$

定義 21. $l \ge 1$ とする. $\partial_{N,l}\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(w)$ $(w \in B_{N,l})$ を計算して現れる項のうち, $\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(w')$ $(w' \in B'_{N,l})$ の係数を $f^w_{w'}$ とし, $f^w_{w'}$ を成分とする行列を $M_{N,l}$ とする.

例として $N = 10$, $l = 2$ のとき, 行列 $M_{10,2}$ は次のようになる. 行列の左側に各行に対応する $B_{10,2}$ の元, 上側に各列に対応する $B'_{10,2}$ の元をかいている.

	223	232	23	322	32	3
2233	$c_3 - c_{12}$	0	$c_{23}-c_{32}-c_{122}$	0	0	$\tilde{c}_{223}-c_{322}$
2323	0	$c_3 - c_{12}$	$\tilde{c}_{23}$	0	0	$\tilde{c}_{232}-c_{232}$
2332	0	0	c_{32}	0	$\tilde{c}_{23} - c_{32}$	0
3223	$\tilde{c}_3+c_{12}-c_3$	0	$\tilde{c}_{32}+c_{122}-c_{23}$	$c_3 - c_{12}$	$c_{23} - c_{122}$	$\tilde{c}_{322}$
3232	0	$\tilde{c}_3+c_{12}-c_3$	0	0	$\tilde{c}_{32}$	c_{232}
3322	0	0	0	$\tilde{c}_3+c_{12}-c_3$	$c_{32}+c_{122}-c_{23}$	c_{322}

命題 22. $w \in B_{N,l}, w' \in B'_{N,l}$ に対し,

$$f^w_{w'} \equiv \begin{cases} c_u & (\exists u \in \{2,3\}^\times \ s.t.\ w = w'u) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \mod 2\mathbb{Z}$$

である. ここで, mod $2\mathbb{Z}$ は差が $2\mathbb{Z}$ の元であることを表している.

この命題から, $M_{N,l} \bmod 2\mathbb{Z}$ は上三角行列であること, また, 対角成分は $c_{32^{r-1}} \bmod 2\mathbb{Z}$ であり, 同じ列のその対角成分より上側は $c_{2^a32^b}(a+b+1=r)$ または 0 であることがわかる. このことから, $M_{N,l}$ は可逆であり, $\{\tilde{t}^{\mathfrak{m}}(w) \mid w \in \{2,3\}^{\times}\}$ の元たちが線型独立であることが level による帰納法により示せる. したがって, $\dim \mathcal{H}_N^{\{2,3\}} = d_N$ となり, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_N^1 \leq d_N$(Terasoma[7], Deligne–Goncharov[2]) と包含関係 $\mathcal{H}_N^{\{2,3\}} \subseteq \mathcal{H}_N^1$ から, $\mathcal{H}_N^{\{2,3\}} = \mathcal{H}_N^1$ がいえる. したがって, $\mathcal{H}^{\{2,3\}} = \mathcal{H}^1$ であることがわかる.

5 謝辞

本稿は 2019 年 11 月に京都大学で行われた多重ゼータ値の諸相における著者の講演に基づくものです. 講演の機会を与えてくださった名古屋大学の古庄英和先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] F. Brown, 'Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$', Annals of Math. **175**, no. 2 (2012), 949–976.

[2] P. Deligne, A.B. 'Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte', dans Ann. Scient. Ecole. Norm. Sup., 4e serie, t. 38, pp. 1-56, (2005)

[3] M. Kaneko, K. Tasaka, 'Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2', Math. Ann., 357(3) (2013), 1091–1118.

[4] C. Glanois 'Unramified Euler sums and Hoffman $\star$ basis', arXiv:1603.05178v1.

[5] Z. Jin, J. Li, 'Motivic multiple zeta values relative to μ_2' arXiv:1805.02126v4.

[6] M. E. Hoffman, 'An Odd Variant of Multiple Zeta Values' arXiv:1612.05232v4.

[7] T. Terasoma, 'Mixed Tate motives and multiple zeta values', Invent. Math. 149, 339-369, (2002)

[8] D. B. Zagier, 'Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots 2)$', Ann. of Math. 175, 977-1000, (2012)