局所体上 wreath 積の表現と 多変数 Krawtchouk および Hahn 多項式

(Representations of wreath products on a local field and multivariate Krawtchouk and Hahn polynomials).

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
川村晃英　Kawamura Koei
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University

要約　abstract

Dunkl[1] による 1 変数 Krawtchouk 多項式の加法定理の導出に倣い，その多変数化を目指す．そのため，多変数 Krawtchouk 多項式を帯球函数に持つ群論的状況として，非アルキメデス的局所体上の調和解析を取り上げる．対応する球表現を，部分群である wreath 積の既約表現に分解するとき，一般に無重複とは限らないため，適当な仮定・制限を設ける．そのもとで，多変数 Hahn 多項式による展開を含む形で，多変数 Krawtchouk 多項式の加法定理が得られる．

We aim addition theorems for multivariate Krawtchouk polynomials, following Dunkl[1] for 1-variate case. We work on the harmonic analysis on a non-Archimedean local field, that is a group theoretic situation related to these polynomials as zonal spherical functions. In our cases, the spherical representations are decomposed into irreducible representations of the wreath product, without multiplicity free. So we need to hypothesize some conditions. Then we have an addition theorem for the polynomials which includes expansions by multivariate Hahn polynomials.

0　本稿の目的

群上の調和解析を利用して，帯球函数として現れる直交多項式の加法定理を導出する研究は，1970 年代以降，多く行われている．選点系（直交関係式が和で与えられるもの）に限れば，例えば Dunkl による Krawtchouk 多項式 [1]，Hahn 多項式 [2]，Stanton による q-Krawtchouk 多項式 [10] に関する研究が挙げられる．これらは，調和解析において，帯球函数の「群移動」を部分群上の Fourier 級数に展開することに対応し，調和解析の構造と特殊関数の群論的意味を知る上で重要な意味を持っている．以上の加法定理はいずれも，1 変数のものである．その一方で，多変数の超幾何型多項式の調和解析的扱いに関して，近年多くの研究がなされている．例えば，Mizukawa[8] により，多変数 Krawtchouk 多項式が複素鏡映群上の帯球函数として得られている．また，多変数 Hahn 多項式を対称群上の intertwining functions（絡函数；帯球函数の一般化）として捉える Scarabotti[9] の研究も関連がある．そのため，1 変数の場合に用いられた手法を多変数の場合に運用して，

その加法定理を考察する研究の路が開かれていると考えられるが，現状では，そのような研究は見られないようである．

実際，そのような手法の運用は必ずしも容易ではない．取り扱われる Gelfand pair$(\mathbb{G}, G)$ の球表現を G の表現と見たとき，それが無重複（multiplicity free）と限らないことが，研究上の困難の原因の一つと考えられる．しかし，帯球函数の「群移動」に適当な制限を加えるなどして，分解が無重複になるようにすれば，ある種の加法定理が獲得できる場合はある．本稿では，そのような特殊な状況の一例を，筆者自身が [5] において扱った非アルキメデス的局所体上の調和解析において提示する．そして，帯球函数である多変数 Krawtchouk 多項式の加法定理を考察する．

1　帯球函数としての多変数 Krawtchouk 多項式

本節の内容は，一般に知られたことや，筆者の過去の研究結果のまとめである．

1.1　有限アーベル群上の帯球函数

コンパクト群 G が有限アーベル群 A に群自己同型として作用している状況を考え，この作用に関する半直積群を $\mathbb{G} = A \rtimes G$ とおく．すると，$\mathbb{G}$ の A への作用が，

$$\mathbb{G} \curvearrowright A, \quad (b, g) \cdot a = b + g(a) \quad (a, b \in A, g \in G) \tag{1}$$

で定まる．そして作用 (1) に関する置換表現が誘導される．すなわち，A 上複素数値関数全体のなす空間 $\mathbb{C}[A]$ における，$\mathbb{G}$ の表現

$$\mathbb{G} \curvearrowright \mathbb{C}[A], \quad (b, g)\varphi = \varphi \circ (b, g)^{-1} \quad (b \in A, g \in G, \varphi \in \mathbb{C}[A]) \tag{2}$$

である．表現 (2) を既約分解すると，各既約成分には 1 次元の G-不変部分空間が含まれる（このことを，$(\mathbb{G}, G)$ が Gelfand 対であるという [11]）．実際，表現 (2) は次のように既約分解される：A の指標群を $\widehat{A}$ とし，G の $\widehat{A}$ への反傾作用による軌道の全体を $G\backslash\widehat{A}$ とおく．各軌道 $\mathcal{P} \in G\backslash\widehat{A}$ に対し，$V_{\mathcal{P}} = \mathrm{Span}\mathcal{P} \subset \mathbb{C}[\mathrm{A}]$ とおく．このとき

$$\mathbb{C}[A] = \bigoplus_{\mathcal{P} \in G\backslash\widehat{A}} V_{\mathcal{P}} \tag{3}$$

が互いに直交する既約 $\mathbb{G}$-表現への無重複な分解となる．なお直交性は，$\mathbb{C}[A]$ 上の L^2-内積

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \varphi(a)\overline{\psi(a)} \qquad (\varphi, \psi \in \mathbb{C}[A]) \tag{4}$$

による．$V_{\mathcal{P}}$ はペア $(\mathbb{G}, G)$ の球表現と呼ばれる．Frobenius の相互律により，$V_{\mathcal{P}}$ はちょうど 1 次元の G-不変部分空間 ${V_{\mathcal{P}}}^G$ を持つ．その生成元であって，零元 $0 \in A$ における値が

1 となるように正規化したものを，球表現 $V_{\mathcal{P}}$ に付随する帯球函数と呼び，$\omega_{\mathcal{P}}$ で表す：

$$\mathbb{G} \curvearrowright \mathbb{C}[A] = \bigoplus_{\mathcal{P}\in G\backslash\widehat{A}} V_{\mathcal{P}} \ \supset \ \mathbb{C}[A]^G = \bigoplus_{\mathcal{P}\in G\backslash\widehat{A}} {V_{\mathcal{P}}}^G = \bigoplus_{\mathcal{P}\in G\backslash\widehat{A}} \mathbb{C}\omega_{\mathcal{P}}.$$

1.2　非アルキメデス的局所体上の wreath 積の作用に関する球表現

F を非アルキメデス的局所体，$v: F \to \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ をその上の離散付値，$\mathfrak{o} = \{a \in F \mid v(a) \geq 0\}$ を F の整数環，$\mathfrak{p} = \{a \in F \mid v(a) \geq 1\}$ を $\mathfrak{o}$ の極大イデアルとする．$\mathfrak{p}$ の生成元を π とおく．剰余体 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は有限体なので，位数を q とする（素数のべき）．また，自然数 $\ell \geq 1$ を以下固定し，剰余環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ を R と表す．これは位数 q^ℓ の有限環である．$\mathfrak{o}$ の乗法群を $\mathfrak{o}^\times$ とする．N 次対称群 $\mathfrak{S}_N$ の作用による半直積群 $G = (\mathfrak{o}^\times)^N \rtimes \mathfrak{S}_N$ を $\mathfrak{o}^\times$ の N 次 wreath 積と呼ぶ．G は加法群 $A = R^N$ 上の群自己同型として，次のように作用する：

$$(c,\sigma)a = (c_k a_{\sigma^{-1}(k)})_{k=1}^N, \qquad \left(c = (c_k)_{k=1}^N \in (\mathfrak{o}^\times)^N, \sigma \in \mathfrak{S}_N, a = (a_k)_{k=1}^N \in R^N\right). \tag{5}$$

この作用の軌道をパラメトライズする集合として，次を導入する：

$$X(\ell, N) = \left\{ x = (x_r)_{r=0}^{\ell-1} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^\ell \ \middle| \ |x| := \sum_{r=0}^{\ell-1} x_r \leq N \right\}. \tag{6}$$

F 上の付値 v より誘導される R 上の付値 $v: R \to \{0,\dots,\ell-1\}\cup\{\infty\}$ を用いて，R^N の G-軌道は次のように与えられる：$x = (x_r)_{r=0}^{\ell-1} \in X(\ell,N)$ に対して，

$$\mathcal{O}(x) = \left\{ (a_k)_{k=1}^N \in R^N \ \middle| \ \sharp\{k \mid v(a_k) = r\} = x_r,\ 0 \leq r \leq \ell-1 \right\} \tag{7}$$

（なお，$\sharp$ は有限集合の要素数を表すとする）．一方，指標群 $\widehat{R}$ 上の双対付値 $\widehat{v}: \widehat{R} \to \{-\infty\}\cup\{0,\dots,\ell-1\}$ を次式で定める：

$$\widehat{v}(\chi) = \max\{v(a) \mid a \in R,\ \chi(a) \neq 1\}, \qquad \text{但し } \widehat{v}(1) = -\infty. \tag{8}$$

指標群 $\widehat{A} = \widehat{R^N}$ は直積 $(\widehat{R})^N$ と自然に同一視した上で，$n = (n_r)_{r=0}^{\ell-1} \in X(\ell,N)$ に対し，

$$\mathcal{P}(n) = \left\{ (\chi_k)_{k=1}^N \in (\widehat{R})^N \ \middle| \ \sharp\{k \mid \widehat{v}(\chi_k) = r\} = n_r,\ 0 \leq r \leq \ell-1 \right\} \tag{9}$$

が G-軌道となる．以上のパラメータのもと，本例における帯球関数は次のようになる [13]：

命題 1. 軌道 $\mathcal{P}(n)$ に付随する帯球関数の，軌道 $\mathcal{O}(x)$ における値 $\omega_n(x) := \omega_{\mathcal{P}(n)}(\mathcal{O}(x))$ は，

$$\omega_n(x) = K_n^{\langle\ell\rangle}(x;\ \tfrac{q-1}{q}\ ; N). \tag{10}$$

ただし右辺は次節に定める ℓ 変数 Krawtchouk 多項式である．

1.3　多変数 Krawtchouk 多項式，多変数 Hahn 多項式

多変数 Krawtchouk 多項式は，多項係数に関する直交多項式として，最初に Griffiths[3] により導入された．式 (10) に現れる $K_n^{\langle\ell\rangle}(x;p;N)$（$0<p<1$ はパラメータ）は，その特殊な場合であり，1 変数 Krawtchouk 多項式の積として定義される（Xu[12] による定義）．

まず 1 変数の場合は，超幾何関数

$$ {}_{h+1}F_h\left(\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_{h+1}\\ \beta_1,\cdots,\beta_h\end{matrix};\gamma\right)=\sum_{k\ge 0}\frac{(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_{h+1})_k}{(\beta_1)_k\cdots(\beta_h)_k k!}\gamma^k \tag{11}$$

（ここで $(a)_k$ は Pochhammer の記号；$(a)_0=1,\ (a)_k=\prod_{s=0}^{k-1}(a+s)\ (k\ge 1)$）の $h=1$ のとき（ガウスの超幾何関数 ${}_2F_1$）を用いて，

$$K_n(x;p;N)={}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ -x\\ -N\end{matrix};\frac{1}{p}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (-x)_k}{(-N)_k\ k!\,p^k}\qquad (0\le x,n\le N) \tag{12}$$

と定義される．Xu[12] による ℓ 変数化は，$x=(x_r)_{r=0}^{\ell-1},\ n=(n_r)_{r=0}^{\ell-1}\in X(\ell,N)$ およびパラメータ $\boldsymbol{p}=(p_r)_{r=0}^{\ell-1}$ に対し，

$$K_n^{\langle\ell\rangle}(x;\boldsymbol{p};N)=\frac{1}{(-N)_{|n|}}\prod_{r=0}^{\ell-1}(-N_r)_{n_r}\,K_{n_r}(x_r;p_r;N_r),\quad \text{ここで } N_r=N-\sum_{s=0}^{r-1}x_s-\sum_{s=r+1}^{\ell-1}n_s \tag{13}$$

で定められる．特に $\boldsymbol{p}=(p,\cdots,p)$ なる場合，$K_n^{\langle\ell\rangle}(x;p;N):=K_n^{\langle\ell\rangle}(x;\boldsymbol{p};N)$ と表す．
母関数による定義や直交関係式等の基本的性質は，[12]，[5] を参照されたい．

次に，別種の超幾何型直交多項式である Hahn 多項式，およびその多変数化を紹介する．多変数化は，上と同じく，Xu[12] の定義を採用する．なお，Scarabotti[9] では二分木（binary tree）に関連付けて多変数 Hahn 多項式が整理されており，ここで用いる Xu の定義はその特別な場合である．1 変数の場合は，超幾何関数 ${}_3F_2$ を用いて，

$$Q_m(x;\alpha,\beta;N)={}_3F_2\left(\begin{matrix}-m,-x,m+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1,-N\end{matrix};1\right)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-m)_k\,(-x)_k\,(-m-\alpha-\beta-1)_k}{(-\alpha-1)_k\,(-N)_k\ k!} \tag{14}$$

$(0\le x,m\le N)$ と定義される．ℓ 変数化は，$x=(x_r)_{r=0}^{\ell-1},\ m=(m_r)_{r=0}^{\ell-1}$ とパラメータ $\gamma=(\gamma_r)_{r=0}^{\ell}$ に対し，

$$Q_m^{\langle\ell\rangle}(x;\gamma;N)=\frac{1}{(-N)_{|m|}}\prod_{r=0}^{\ell-1}(-N_r)_{m_r}Q_{m_r}(x_r;\gamma_r,\varepsilon_r;N_r),$$

但し N_r は式 (13) 中のものとし，$\varepsilon_r=\displaystyle\sum_{s\ge r+1}(\gamma_s+2m_s)+\ell-r-1$ とする．直交関係式等の性質は，[12] 参照のこと．

多変数 Hahn 多項式は，以下考察する多変数 Krawtchouk 多項式の加法定理において，重要な意味を持って現れる．それは次のような意味で，Hahn 多項式たちが対称群上の絡函数（intertwining functions）という解釈を持つ [9] ことによる：

命題 2. $1 \le t \le N$，$u = (u_r)_{r=0}^{\ell-1} \in X(\ell, N)$ とする．対称群 $\mathfrak{S}_N$ 上の右 $\mathfrak{S}_t \times \mathfrak{S}_{N-t}$ -左 $\prod_{r=0}^{\ell-1} \mathfrak{S}_{u_r} \times \mathfrak{S}_{N-|u|}$-不変関数のなす空間 $U = \mathbb{C}\left[\prod_{r=0}^{\ell-1} \mathfrak{S}_{u_r} \times \mathfrak{S}_{N-|u|} \setminus \mathfrak{S}_N \,/\, \mathfrak{S}_t \times \mathfrak{S}_{N-t}\right]$ を考える．このとき U の基底として，

$$\left\{ Q_m^{\langle \ell \rangle} \left(x(\sigma); -u_0 - 1, \cdots, -u_{\ell-1} - 1, -N + |u| - 1; t \right) \right\}_{m \in X(\ell, t)} \tag{15}$$

が取れる．ここで，$\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$x(\sigma) = (x_r(\sigma))_{r=0}^{\ell-1} \in X(\ell, t)$ は次式で定まるとする：

$$x_r(\sigma) = \sharp \left\{ k \in \{1, \cdots, t\} \;\middle|\; \sum_{s=0}^{r-1} u_s + 1 \le \sigma(k) \le \sum_{s=0}^{r} u_s \right\} \qquad (0 \le r \le \ell - 1). \tag{16}$$

2 球表現の分解

2.1 加法定理を導く基本的アイデア

まず一般に，1.1 節の記号（A:有限アーベル群，G:コンパクト群，他）のもとで述べる．帯球函数を分解して加法定理を導く際，Dunkl[1]（1 変数 Krawtchouk 多項式の加法定理の導出）に従い，次のような手順を用いるのが基本的である：

(i)　球表現 $V_{\mathcal{P}}$（これは $\mathbb{G} = A \rtimes G$ の表現として既約である）を，部分群 $G \subset \mathbb{G}$ の表現として既約分解する．

(ii)　帯球函数 $\omega_{\mathcal{P}}$ に特定の元 $a \in A \subset \mathbb{G}$ の作用を施した函数 $\omega_{\mathcal{P}}(a + \ \cdot\ ) \in V_{\mathcal{P}}$ を考え，(i) の既約分解により成分に分解する．

(iii)　帯球函数の恒等式

$$\omega_{\mathcal{P}}(g(a) - b) = \mathrm{dim} V_{\mathcal{P}} \left\langle g \cdot \omega_{\mathcal{P}}(a + \ \cdot\ ), \omega_{\mathcal{P}}(b + \ \cdot\ ) \right\rangle \qquad (a, b \in A, g \in G) \tag{17}$$

を用い，さらに右辺を (ii) の成分分解で和の形に分ける．

ここで等式 (17) は，帯球函数の有名な恒等式である $\omega_{\mathcal{P}} * \omega_{\mathcal{P}'} = \delta_{\mathcal{P},\mathcal{P}'} \dfrac{|\mathbb{G}|}{|\mathcal{P}|} \omega_{\mathcal{P}}$ （$*$ は $\mathbb{G}$ 上の畳み込み積（convolution），[7]）を用いてすぐに導かれる．

Dunkl[1] の例では，(i) における $V_{\mathcal{P}}$ の G-既約分解が無重複に分かれ，またその分解が自然数の有限列で単一的にパラメトライズされるため，(iii) においてまとまった形の加法定理が得られている．一方，我々の例（局所体に関する 1.2 節の $A = R^N$，G：wreath 積の例）においては，この分解は無重複とはならず，制御が難しい．そこで我々は，帯球函数 ω_n のパラメータである $n \in X(\ell, N)$ に $|n| = N$ という仮定を設け，かつ，手順 (ii) で

ω_n に作用させる元 $a \in A$ についても $a = (1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ という元に限定することで，分解が多少制御しやすい状況を考える．本稿の結果は，このような限定の下での多変数 Krawtchouk 多項式の加法定理である．

2.2 $\mathfrak{o}^\times$ の指標と $R = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ 上の調和解析

$G = (\mathfrak{o}^\times)^N \rtimes \mathfrak{S}_N$ の既約表現を考えるには，$\mathfrak{o}^\times$ の既約表現（指標）が基礎となる（次節）．また，$A = R^N$ 上の G-表現を考えるには，R 上の $\mathfrak{o}^\times$-表現を基礎とする．そのため本節では，$N = 1$ の場合に当たる，作用 $\mathfrak{o}^\times \curvearrowright R$ に関する調和解析を考察する．

R の指標群 $\widehat{R}$ は $\mathfrak{o}^\times$ 作用により，式 (8) の双対付値 $\widehat{v}$ によって次の $\ell + 1$ 個の軌道に分解される：

$$\widehat{R}_r = \{\chi \in \widehat{R} \mid \widehat{v}(\chi) = r\} \quad (r = -\infty, 0, 1, \cdots, \ell - 1). \tag{18}$$

各軌道の要素数を $I_r = |\widehat{R}_r|$ と略記する．具体的には次式で与えられる：

$$I_{-\infty} = 1, \qquad I_r = q^r(q-1) \quad (r \geq 0). \tag{19}$$

そして関数空間 $\mathbb{C}[R]$ の中で部分空間 $\mathrm{Span}\widehat{R}_r$ を張ると，(3) で述べたように，これらが半直積群 $R \rtimes \mathfrak{o}^\times$ の表現である $\mathbb{C}[R]$ の既約分解を与える：

$$\mathbb{C}[R] = \mathbb{C} \cdot 1 \ \oplus \ \bigoplus_{r=0}^{\ell-1} \mathrm{Span}\widehat{R}_r \tag{20}$$

（便宜上，$\widehat{R}_{-\infty} = \{1\}$（自明指標）の張る空間 $\mathrm{Span}\,\widehat{R}_{-\infty} = \mathbb{C} \cdot 1$（定値関数全体）のみ分離して書いた）．指標の直交性より，$\dim \mathrm{Span}\widehat{R}_r = |\widehat{R}_r| = I_r$ に注意する．

(20) の各 $\mathrm{Span}\,\widehat{R}_r$ を $\mathfrak{o}^\times$ の表現と見た時，$\mathfrak{o}^\times$ は可換群だから 1 次元表現の直和に分かれるが，その分解を詳しく見よう．$\mathfrak{o}^\times$ の部分群の減少列 $\{\mathfrak{o}_r^\times\}_{r=-\infty,0,1,2,\cdots}$ を次で定める：

$$\mathfrak{o}_{-\infty}^\times = \mathfrak{o}^\times, \qquad \mathfrak{o}_r^\times = \{1 + a\pi^{r+1} \mid a \in \mathfrak{o}\} \quad (r \geq 0). \tag{21}$$

次の命題は，$\mathfrak{o}_r^\times$ が任意の $\chi \in \widehat{R}_r \subset \mathbb{C}[R]$ の固定部分群であることと，Frobenius の相互律を用いて示される．

命題 3. $r = -\infty, 0, 1, 2, \cdots$ について，$\mathfrak{o}^\times$ の *1* 次元表現で，$\mathfrak{o}_r^\times$ に制限したとき自明表現となるものが，ちょうど I_r 個ある．そして $\mathrm{Span}\,\widehat{R}_r$ の既約分解には，それらが無重複に現れる．

そこで，$\mathfrak{o}^\times$ の指標で，$\mathfrak{o}_r^\times$ 上自明となるものの全体を $\{\xi^{(i)}\}_{i=1}^{I_r}$ とおく（特に $\xi^{(1)}$ は自明指標である）．すると，$0 \leq r \leq \ell - 1$ について，$\mathrm{Span}\,\widehat{R}_r$ の既約 $\mathfrak{o}^\times$ 表現分解は，

$$\mathrm{Span}\,\widehat{R}_r = \bigoplus_{i=1}^{I_r} \mathbb{C}\varphi_r^{(i)} \tag{22}$$

と表すことができる．ただし，R 上関数 $\varphi_r^{(i)}$ は指標 $\xi^{(i)}$ に関して $\mathfrak{o}^\times$-相対不変であるとする：

$$\varphi_r^{(i)}(ax) = \xi^{(i)}(a)\varphi_r^{(i)}(x) \qquad \left(a \in \mathfrak{o}^\times,\ x \in R\right) \tag{23}$$

(特に $\varphi_r^{(1)}$ は $\mathfrak{o}^\times$-不変)．また $\left\langle \varphi_r^{(i)}, \varphi_r^{(i)} \right\rangle = 1$ と正規化しておく．無重複性と（20）の直交性より，次が $\mathbb{C}[R]$ の正規直交基底となる：

$$\{1\} \cup \left\{\varphi_r^{(i)} \mid 0 \le r \le \ell - 1,\ 1 \le i \le I_r\right\}. \tag{24}$$

$\mathbb{C}[R]$ への R-作用（平行移動）に関する基底 (24) の変換が，帯球函数の分解の基礎となる．特に我々の考察では，次が重要である．

命題 4. $0 \le r \le \ell - 1$ について，$\mathfrak{o}^\times$-不変関数 $\varphi_r^{(1)}$ に対する $1 \in R$ の作用の結果は次のようになる：係数 $\theta^{(1)} := -\frac{1}{q-1}$ および適当な係数の列 $\{\theta^{(i)}\}_{i=2}^{I_{\ell-1}} \subset \mathbb{C}$ を用いて，

$$\varphi_0^{(1)}(1 + \ \cdot\ ) = \theta^{(1)}\varphi_0^{(1)} + \sum_{i=2}^{q-1} \theta^{(i)}\varphi_0^{(i)}, \qquad \varphi_r^{(1)}(1 + \ \cdot\ ) = \sum_{i=I_{r-1}+1}^{I_r} \theta^{(i)}\varphi_r^{(i)} \quad (1 \le r \le \ell - 1). \tag{25}$$

2.3 wreath 積 $G = (\mathfrak{o}^\times)^N \rtimes \mathfrak{S}_N$ の既約表現

コンパクト群 T 上の wreath 積 $T^N \rtimes \mathfrak{S}_N$ の既約表現の分類については，一般論が知られている（[4] など）．特にここでは $T = \mathfrak{o}^\times$ が可換群であることから，分類は以下のように簡単にまとめることができる．

$G = (\mathfrak{o}^\times)^N \rtimes \mathfrak{S}_N$ の既約表現をパラメトライズする集合として，次が取れる：

$$\boldsymbol{Y}_N(\mathfrak{o}^\times) = \{\ \Lambda = (\lambda^{(i)})_{i=1,2,\cdots} \mid\ \lambda^{(i)}\text{は分割で}, \sum_{i\ge1} |\lambda^{(i)}| = N\} \tag{26}$$

($\lambda^{(i)}$ が分割 (partition) であるとは，単調非増加な非負整数の有限列 $\lambda^{(i)} = (\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \cdots)$ であること)．$\Lambda = (\lambda^{(i)}) \in \boldsymbol{Y}_N(\mathfrak{o}^\times)$ に対し，各分割 $\lambda^{(i)}$ に対応する対称群 $\mathfrak{S}_{|\lambda^{(i)}|}$ の既約表現とその表現空間を $(\lambda^{(i)}, W^{(i)})$ として,（実質有限個の）テンソル積 $W = \bigotimes_{i\ge1} W^{(i)}$ における部分群 $G_\Lambda := (\mathfrak{o}^\times)^N \rtimes \prod_{i\ge1} \mathfrak{S}_{|\lambda^{(i)}|} \subset G$ の表現を次式で定める：

$$\left((a_k)_{k=1}^N,\ (\sigma^{(i)})_{i\ge1}\right) = \prod_{k=1}^N \xi^{(i_k)}(a_k) \cdot \bigotimes_{i\ge1} \lambda^{(i)}(\sigma^{(i)}) \qquad \left(a_k \in \mathfrak{o}^\times,\ \sigma^{(i)} \in \mathfrak{S}_{|\lambda^{(i)}|}\right) \tag{27}$$

（ここで $1 \le k \le N$ に対し，i_k は $k \le |\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(i)}|$ なる最小の i とする．また，$\xi^{(i)}$ は前節 2.1 で定めた $\mathfrak{o}^\times$ の指標である）．そして誘導表現 $\mathrm{ind}_{G_\Lambda}^G W$ を考えれば，これが G

の既約表現となっており，さらにこの構成で $\boldsymbol{Y}_N(\mathfrak{o}^\times)$ と G の既約表現全体が一対一に対応する．

球表現 V_n $(n\in X(\ell,N))$ の G-表現への分解においては，一般にはこれらの既約表現が混在して出てくる．しかし我々が 3.1 節以降で扱う状況においては，$\lambda^{(1)}$ が高々長さ 2 の分割 $\lambda^{(1)}=(\lambda_0^{(1)},\lambda_1^{(1)})$ ，$\lambda^{(i)}$ $(i\geq 2)$ が長さ 1 の分割（これは $\mathfrak{S}_{|\lambda^{(i)}|}$ の自明表現に対応する）の場合のみ現れる．

2.4　$\mathfrak{o}^\times$-相対不変関数による球表現 V_n の分解

$n\in X(\ell,N)$ に対して，軌道 $\mathcal{P}(n)\in G\backslash\widehat{R^N}$ に付随した球表現 $V_n:=V_{\mathcal{P}(n)}=\mathrm{Span}\,\mathcal{P}(n)\subset\mathbb{C}[R^N]$ が定まる．我々の計画（2.1 節の手順 (i)）では，これを $G=(\mathfrak{o}^\times)^N\rtimes\mathfrak{S}_N$-表現として分解するのであった．ここではその第 1 段階として，2.2 節で定めた $R=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ 上の $\mathfrak{o}^\times$-相対不変関数 $\varphi_r^{(i)}$ $(0\leq r\leq\ell-1,\ 1\leq i\leq I_r)$ を用いて，V_n の G-部分表現を構成する（まだ既約分解には至らない）．

$n=(n_r)_{r=0}^{\ell-1}\in X(\ell,N)$ に対し，次のパラメータ集合を定める：

$$\mathfrak{A}(n)=\{\,\alpha=(\alpha_r)_{r=0}^{\ell-1}\ \mid\ \alpha_r=(\alpha_r^{(i)})_{i=1}^{I_r}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{I_r},\ |\alpha_r|=n_r\,\}\tag{28}$$

（いわゆる，α_r は n_r の composition（本稿では分画と訳する）．また I_r は式 (19) に定めた数である）．そして $\alpha\in\mathfrak{A}(n)$ に対し，

$$V_{n,\alpha}=\mathrm{Span}\left\{\bigotimes_{k=1}^{N}f_k\ \middle|\ \begin{array}{l}\{f_k\}_{k=1}^N\text{ は，}\alpha_r^{(i)}\text{ 個の }\varphi_r^{(i)}\ \ (0\leq r\leq\ell-1,\ 1\leq i\leq I_r)\text{ と}\\ N-|n|\text{ 個の }1\text{ から成る}\end{array}\right\}\tag{29}$$

とおく．なお，N 個の R 上関数 $\{f_k\}_{k=1}^N$ に対して，テンソル積 $\bigotimes_{k=1}^N f_k$ は R^N 上関数として，

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{N}f_k\right)(a)=\prod_{k=1}^{N}f_k(a_k)\qquad(a=(a_k)_{k=1}^N\in R^N)\tag{30}$$

として実現する．定義より $\varphi_r^{(i)}\in\mathrm{Span}\,\widehat{R}_r$ であることから，(29) の条件を満たす $\bigotimes_{k=1}^N f_k$ が V_n に入ることは明らかである．そして，V_n の中で張られた部分空間 $V_{n,\alpha}$ が G-部分表現となることについては，$\varphi_r^{(i)}$ の相対 $\mathfrak{o}^\times$-不変性，および $\mathfrak{S}_N$-作用ではテンソル積の並び替えが起こるだけであることからわかる．

さらに α が集合 $\mathfrak{A}(n)$ を走るとき，$V_{n,\alpha}$ たちは V_n の G-表現の直交分解

$$V_n=\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}(n)}V_{n,\alpha}\tag{31}$$

を与える．

2.5 ラドン変換

$V_{n,\alpha}$ を G-表現としてさらに分解するため，G-作用と可換な作用素 $d_r^{(i)}:\mathbb{C}[R^N]\to\mathbb{C}[R^N]$ を導入する．ここで $(r,i)=(0,1)$ または $1\le r\le\ell-1,\ 1\le i\le I_{r-1}$ とする．

まず，R 上 $\mathfrak{o}^\times$-相対不変関数 $\varphi_r^{(i)}$ に対し，

$$\partial\varphi_0^{(1)}:=1,\qquad \partial\varphi_r^{(i)}:=\varphi_{r-1}^{(i)}\quad(1\le r\le\ell-1,\ 1\le i\le I_{r-1}) \tag{32}$$

と定める．そして，$\mathbb{C}[R]$ の基底 (24) の元をテンソル積で組合わせた $\bigotimes_{k=1}^{N} f_k\in\mathbb{C}[R^N]$（すなわち，各 f_k は 1 またはある $\varphi_s^{(j)}$）に対し，

$$d_r^{(i)}\ :\ \bigotimes_{k=1}^{N} f_k\mapsto\sum_{f_k=\varphi_r^{(i)}}(f_1\otimes\cdots\otimes f_{k-1}\otimes\partial f_k\otimes f_{k+1}\otimes\cdots\otimes f_N) \tag{33}$$

と定める．ただし $\{f_k\}$ が $\varphi_r^{(i)}$ を含まないときは行先を 0 とする．$\left\{\bigotimes_{k=1}^{N} f_k\right\}$ は $\{f_k\}$ の構成が変わるとき $\mathbb{C}[R^N]$ の基底をなすから，これで線型変換 $d_r^{(i)}:\mathbb{C}[R^N]\to\mathbb{C}[R^N]$ が定まる．簡単に言えば，$\varphi_r^{(i)}$ を $\varphi_{r-1}^{(i)}$ に（複数個の積については 1 つずつ）置き換える変換である．この変換 $d_r^{(i)}$ を，$\mathbb{C}[R^N]$ 上のラドン変換と呼ぶ．また，$d_r^{(i)}$ の（内積 (4) に関する）随伴写像を $d_r^{(i)*}$ で表す．これは，$d_r^{(i)}$ とは逆に $\varphi_r^{(i)}$ を $\varphi_{r+1}^{(i)}$ に置き換えるものとなる．

$d_r^{(i)},\ d_r^{(i)*}$ は，$G=(\mathfrak{o}^\times)^N\rtimes\mathfrak{S}_N$-作用と可換である．実際，$\mathfrak{S}_N$-作用は $\bigotimes_{k=1}^{N} f_k$ のテンソル積成分の置換を引き起こすのみであるから，定義 (33) より，可換性は明らかである．また $\mathfrak{o}^\times$-作用については，$\varphi_r^{(i)}$ と $\varphi_{r-1}^{(i)}$ および $\varphi_{r+1}^{(i)}$ が同値な $\mathfrak{o}^\times$-表現の生成元であることから，これらの置き換えである $d_r^{(i)},\ d_r^{(i)*}$ との可換性がわかる．したがって，

$$V_{n,\alpha}\cap\bigcap_{r,i}\operatorname{Ker}d_r^{(i)} \tag{34}$$

は $V_{n,\alpha}$ の部分 G-表現となる．

実はこれが既約であり，さらに $V_{n,\alpha}$ はこのような形の既約表現の（無重複とは限らない）直和で表されると予想できる（このことについて証明はできていない）．以下では，そのような一般的な分解は用いず，特別な場合に限定して考察する．

3 加法定理（$|n|=N$ の場合）

以下では，$n=(n_r)_{r=0}^{\ell-1}\in X(\ell,N)$ が，特に $|n|=\sum_{r=0}^{\ell-1}n_r=N$ を満たす場合を考える．

3.1 帯球函数の平行移動と $V_{n,\alpha}$-成分

球表現 V_n に付随する帯球函数 $\omega_n\in {V_n}^G$ は，$(\mathfrak{o}^\times)^N\subset G$-不変であることから，2.2 節で

定めた R 上の $\mathfrak{o}^\times$-不変関数 $\{\varphi_r^{(1)}\}_{r=0}^{\ell-1}$ を用いて表されるであろう．更に $\mathfrak{S}_N \subset G$-不変性も考慮すれば，次の明示的な表示が得られる：

命題 5. $1 \le k \le N$ に対し，$r_k := \min\{r \mid 0 \le r \le \ell-1,\ k \le n_0 + \cdots + n_r\}$ とおき，$\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_N$ を $(r_k)_{k=1}^N$ の固定部分群とする（$\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{S}_{n_0} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_{\ell-1}}$ である）．このとき，

$$\omega_n = \frac{1}{\binom{N}{n}Q} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N/\mathfrak{S}_n} \varphi^{(1)}_{r_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi^{(1)}_{r_{\sigma(N)}} \tag{35}$$

（ここで $\binom{N}{n}$ は多項係数．また，$Q = \prod_{r=0}^{\ell-1} \sqrt{(I_r)^{n_r}}$ とする．これらで割っているのは，$\omega_n(0) = 1$ とするための定数倍の調整である）．

次に $0 \le t \le N$ なる整数 t に対し，$1^t := (\overbrace{1, \cdots, 1}^{t\text{ 個}}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{N-t\text{ 個}}) \in R^N$ なる元を考え，これで帯球函数 ω_n を「平行移動」した関数 $\omega_n(1^t + \ \cdot\ ) \in V_n$ を考察する．これは，(35) の各項において第 1 から第 t までの t 個のテンソル成分を，$\varphi_r^{(1)}$ から $\varphi_r^{(1)}(1 + \ \cdot\ )$ へ置き換えたものである．そして $\varphi_r^{(1)}(1 + \ \cdot\ )$ は，命題 4 のように展開する．

このことから，$\omega_n(1^t + \ \cdot\ )$ を V_n の分解 (31) に関して成分にわけたとき，各 $\alpha \in \mathfrak{A}(n)$ に対する $V_{n,\alpha}$-成分を，次のように具体的に書き下すことができる．なお，関数 $f \in \mathbb{C}[R^N]$ に対し，その $V_{n,\alpha}$-成分を $V_{n,\alpha}(f)$ と表すこととする．

命題 6. $\alpha = (\alpha_r)_{r=0}^{\ell-1} \in \mathfrak{A}(n),\ \alpha_r = (\alpha_r^{(i)})_{i=1}^{I_r}$ に対し，$\alpha^{(1)} := (\alpha_r^{(1)})_{r=0}^{\ell-1}$ と表すとして，

(1) $V_{n,\alpha}\left(\omega_n(1^t + \ \cdot\ )\right) \neq 0$ なる必要十分条件は，次の 2 点がともに成り立つことである：

(i) $1 \le r \le \ell-1,\ 2 \le i \le I_{r-1}$ について $\alpha_r^{(i)} = 0$,

(ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell-1} \alpha_r^{(1)} \le N - t \le |\alpha^{(1)}| = \sum_{r=0}^{\ell-1} \alpha_r^{(1)}$.

(2) α が (1) の 2 条件を満たすとき，$2 \le i \le I_{\ell-1}$ に対し，$i \le I_r$ なる最小の r $(0 \le {}^{\exists!}r \le \ell-1)$ を用いて $\alpha^{(i)} := \alpha_r^{(i)},\ \varphi^{(i)} := \varphi_r^{(i)}$ と表す（(i) より，$|\alpha^{(1)}| + \displaystyle\sum_{i=2}^{I_{\ell-1}} \alpha^{(i)} = N$ に注意）．また $\varphi^{(1)} = \varphi_0^{(1)}$ とする．$1 \le k \le t$ に対し，

$$i_k = \begin{cases} \min\{i \mid 2 \le i \le I_{\ell-1},\ k \le \alpha^{(2)} + \cdots + \alpha^{(i)}\} & (k \le N - |\alpha^{(1)}|), \\ 1 & (k > N - |\alpha^{(1)}|) \end{cases} \tag{36}$$

とおき，$\mathfrak{S}_{\alpha'} = \displaystyle\prod_{i=2}^{I_{\ell-1}} \mathfrak{S}_{\alpha^{(i)}} \times \mathfrak{S}_{t-N+|\alpha^{(1)}|} \subset \mathfrak{S}_t$ を $(i_k)_{k=1}^t$ の固定部分群とする．さらに $1 \le k \le N-t$ に対し，

$$r_k = \begin{cases} \min\{r \mid 1 \le r \le \ell-1,\ k \le \alpha_1^{(1)} + \cdots + \alpha_r^{(1)}\} & (k \le |\alpha^{(1)}| - \alpha_0^{(1)}), \\ 0 & (k > |\alpha^{(1)}| - \alpha_0^{(1)}) \end{cases} \tag{37}$$

とおき，$\mathfrak{S}_{\alpha^{(1)}}=\prod_{r=1}^{\ell-1}\mathfrak{S}_{\alpha_r^{(1)}}\times\mathfrak{S}_{N-t-|\alpha^{(1)}|+\alpha_0^{(1)}}\subset\mathfrak{S}_{N-t}$ を $(r_k)_{k=1}^{N-t}$ の固定部分群とする．以上の表記のもと，

$$V_{n,\alpha}\left(\omega_n(1^t+\ \cdot\ )\right)=\frac{1}{\binom{N}{n}Q}\left(\theta^{(1)}\right)^{t-N+|\alpha^{(1)}|}\prod_{i=2}^{I_{\ell-1}}(\theta^{(i)})^{\alpha^{(i)}}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_t/\mathfrak{S}_{\alpha'},\\ \tau\in\mathfrak{S}_{N-t}/\mathfrak{S}_{\alpha^{(1)}}}}\bigotimes_{k=1}^{t}\varphi^{(i_{\sigma(k)})}\otimes\bigotimes_{k=1}^{N-t}\varphi^{(1)}_{r_{\tau(k)}} \tag{38}$$

（ここで，Q は命題 5 で定めた数，$\theta^{(i)}$ $(1\leq i\leq D_{\ell-1})$ は命題 4 で定めた係数である）．

3.2 $V_{n,\alpha}$ の分解

次に，命題 6(1) の条件を満たすような $\alpha\in\mathfrak{A}(n)$ に関する $V_{n,\alpha}$ を，部分的に既約分解する（いくつかの無重複な既約成分と，今回欲する成分を含まない補空間に分ける）．2.3 節に $G=(\mathfrak{o}^\times)^N\rtimes\mathfrak{S}_N$ の既約表現についてまとめたが，以下で既約成分として現れるのは，次のようなものに限られる：

命題 7. 非負整数の組 $h,\ (\beta^{(i)})_{i=2}^{I_{\ell-1}}$ で，$h+|\beta|:=h+\sum_{i=2}^{I_{\ell-1}}\beta^{(i)}\leq N$ なるものが与えられたとする．このとき，

$$\beta_0=(0,\beta^{(2)},\cdots,\beta^{(q-1)}),\qquad \beta_r=(\underbrace{0,\cdots,0}_{I_{r-1}\text{個}},\beta^{(I_{r-1}+1)},\cdots,\beta^{(I_r)})\quad(1\leq r\leq\ell-1) \tag{39}$$

と定め，β_0 の第 *1* 成分を h に代えたものを $he^{(1)}+\beta_0$ と書く．$m=(h+|\beta_0|,|\beta_1|,\cdots,|\beta_{\ell-1}|)\in X(\ell,N)$ とし，分画 *(composition)* の組 $\left(he^{(1)}+\beta_0,\ \beta_1,\cdots,\beta_{\ell-1}\right)\in\mathfrak{A}(m)$ を考える．一方，$(N-h-|\beta|,\ h)$ を小さくない順に並び変えた分割 *(partition)* を $\langle N-h-|\beta|,\ h\rangle$ と表すとして，分割の組として

$$\Lambda_{h,\beta}=\left(\langle N-h-|\beta|,\ h\rangle,(\beta^{(2)}),\cdots,(\beta^{(I_{\ell-1})})\ \right)\in\boldsymbol{Y}_N(\mathfrak{o}^\times) \tag{40}$$

を考える．このとき，$V_{(h,\beta)}:=V_{m,\left(he^{(1)}+\beta_0,\ \beta_1,\cdots,\beta_{\ell-1}\right)}\cap\mathrm{Ker}d_0^{(1)}$ は，$\Lambda_{h,\beta}$ に対応する G の既約表現である．

この命題の証明は，まず分割 $\langle N-h-|\beta|,\ h\rangle$ に対応する $\mathfrak{S}_{N-|\beta|}$ の既約表現の表現空間として，$V_{(h,0,\cdots,0),\ (he^{(1)},0,\cdots,0)}\subset\mathbb{C}[R^{N-|\beta|}]$ を取れることが，対称群の球表現の分解（Dunkl[1]）から従い，それを 2.3 節の手順に従い，誘導表現によって G 上へ誘導する．

命題 8. 命題 6(1) の条件を満たす $\alpha=(\alpha_r)_{r=0}^{\ell-1}\in\mathfrak{A}(n)$ が与えられたとする．同命題と同様に，$\alpha^{(1)}=(\alpha_r^{(1)})_{r=0}^{\ell-1}$，$\alpha^{(i)}=\alpha_r^{(i)}$ $(i\geq 2,\ I_{r-1}<i\leq I_r)$ とおき，$\alpha'=(\alpha^{(i)})_{i=2}^{I_{\ell-1}}$ と

おく．さらに，$0 \le h \le \alpha_0^{(1)} \wedge \left(|\alpha^{(1)}| - \alpha_0^{(1)}\right)$ を満たす整数 h が与えられたとする（なお $a \wedge b := \min\{a, b\}$ の記号を用いる）．

このとき，命題 7 で与えられる G の既約表現 $V_{(h,\alpha')}$ から，$V_{n,\alpha}$ への G-表現の埋め込みが，次の合成写像で与えられる：

$$\left(d_{\ell-1}^{(1)*}\right)^{\alpha_{\ell-1}^{(1)}} \circ \left(d_{\ell-2}^{(1)*}\right)^{\alpha_{\ell-2}^{(1)}+\alpha_{\ell-1}^{(1)}} \circ \cdots \circ \left(d_2^{(1)*}\right)^{\sum_{r=2}^{\ell-1} \alpha_r^{(1)}} \circ \left(d_1^{(1)*}\right)^{\sum_{r=1}^{\ell-1} \alpha_r^{(1)} - h} \circ \left(d_0^{(1)*}\right)^{|\alpha^{(1)}|-h} \circ \left(d_1^{(1)*}\right)^h \tag{41}$$

この写像の像を $V_{n,\alpha,h} \subset V_{n,\alpha}$ と表す（G-既約表現）．なお，逆写像 $V_{n,\alpha,h} \to V_{(h,\alpha')}$ は，(41) の随伴写像（「$*$」を外し，並びを逆にしたもの）で与えられる．h が動くとき，これらは互いに直交する．次の命題で今回必要な分解が完成する（証明は略）．

命題 9. 命題 6(1) の条件を満たす $\alpha \in \mathfrak{A}(n)$ について，

(1) $V_{n,\alpha}$ は，次のように，互いに直交する G-表現へ分解される（最後の成分を除いて既約である）:

$$V_{n,\alpha} = \bigoplus_{h=0}^{\alpha_0^{(1)} \wedge \left(|\alpha^{(1)}| - \alpha_0^{(1)}\right)} V_{n,\alpha,h} \oplus \operatorname{Ker}\left(\left(d_2^{(1)}\right)^{\sum_{r=2}^{\ell-1} \alpha_r^{(1)}} \circ \cdots \circ \left(d_{\ell-2}^{(1)}\right)^{\alpha_{\ell-2}^{(1)}+\alpha_{\ell-1}^{(1)}} \circ \left(d_{\ell-1}^{(1)}\right)^{\alpha_{\ell-1}^{(1)}}\right).$$

(2) $0 \le t \le N$ に対し，帯球函数の平行移動の $V_{n,\alpha}$-成分 $V_{n,\alpha}\left(\omega_n(1^t + \ \cdot\ )\right)$（命題 6）を (1) の分解で分けたとき，最後の成分（Ker-部分）は 0 となる．

3.3 加法定理

では本稿の結論として，命題 9 の分解に対応する加法定理を導こう．基本方針を述べた 2.1 節の恒等式 (17) を，我々の設定において $a = 1^t \in R^N$ $(0 \le t \le N)$ として用い，さらに右辺を直交分解 (31) および命題 9(1) に従って分解すると，

$$\begin{aligned} \omega_n\left(g(1^t) - b\right) &= \dim V_n \left\langle g \cdot \omega_n(1^t + \ \cdot\ ),\, \omega_n(b + \ \cdot\ )\right\rangle \\ &= \dim V_n \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}(n)} \sum_{h \ge 0} \left\langle g \cdot V_{n,\alpha,h}\left(\omega_n(1^t + \ \cdot\ )\right),\, V_{n,\alpha,h}\left(\omega_n(b + \ \cdot\ )\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{42}$$

（$b \in R^N,\ g \in G = (\mathfrak{o}^\times)^N \rtimes \mathfrak{S}_N$）となる．精確には $\alpha \in \mathfrak{A}(n)$ は命題 6(1) の条件を満たすものを走り，h は $0 \le h \le \alpha_0^{(1)} \wedge \left(|\alpha^{(1)}| - \alpha_0^{(1)}\right)$ の範囲を走る．$b \in R^N$ としては（分解の直交性を考え），一般の元を取って構わない．そこで，$u = (u_r)_{r=0}^{\ell-1} \in X(\ell, N)$ を決め，

$$b = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{u_0\text{個}}, \underbrace{\pi, \cdots, \pi}_{u_1\text{個}}, \cdots, \underbrace{\pi^{\ell-1}, \cdots, \pi^{\ell-1}}_{u_{\ell-1}\text{個}}, 0, \cdots, 0) \in R^N \tag{43}$$

とおく．また，$g = \left((c_k)_{k=1}^N,\ \sigma\right) \in G$（$c_k \in \mathfrak{o}^\times,\ \sigma \in \mathfrak{S}_N$）とおく．(42) の両辺を，軌

道 (7) のパラメータを用いて書き換えるために，群作用を反映する数

$$
\begin{aligned}
x_r &= \sharp\left\{k \in \{1, \cdots, t\} \;\middle|\; \sum_{s=0}^{r-1} u_s + 1 \le \sigma(k) \le \sum_{s=0}^{r} u_s \right\}, \\
y_r &= \sharp\left\{k \in \{1, \cdots, t\} \;\middle|\; 1 \le \sigma(k) \le u_0 \text{ かつ } c_{\sigma(k)} \in \{1 + d\pi^r,\ d \neq 0\} \right\}
\end{aligned} \tag{44}
$$

を定める（$0 \le r \le \ell - 1$）．このとき，

$$
g(1^t) - b \in \mathcal{O}(t + u_0 - 2x_0 + y_0,\ u_1 - x_1 + y_1,\ \cdots, u_{\ell-1} - x_{\ell-1} + y_{\ell-1}) \tag{45}
$$

が成り立つ（作用 (5) を施し，付値 v の各値をもつ成分数を数えることでわかる）．したがって命題 1 より，(42) の左辺は，

$$
K_n^{\langle \ell \rangle}\left(t + u_0 - 2x_0 + y_0, u_1 - x_1 + y_1, \cdots, u_{\ell-1} - x_{\ell-1} + y_{\ell-1};\ \frac{q-1}{q};\ N\right) \tag{46}
$$

となる．

(42) の右辺については，以下の点に注意する．

・各 $\alpha \in \mathfrak{A}(n)$ が命題 6(1) を満たすので，和は $\alpha^{(1)} = (\alpha_r^{(1)})_{r=0}^{\ell-1}$ と $\alpha' = (\alpha^{(i)})_{i=2}^{I_{\ell-1}}$ に分けて考えられるが，α' の方を足し上げることで $K_{n-\alpha^{(1)}}^{\langle \ell \rangle}\left(y; \frac{q-2}{q-1}, \frac{q-1}{q}, \cdots, \frac{q-1}{q}; x_0\right)$ という形にまとまる（単純計算による．詳細略）．

・各項を $g \in G$ の関数と見た時，それが右 $\mathfrak{S}_t \times \mathfrak{S}_{N-t}$ -左 $\displaystyle\prod_{r=0}^{\ell-1} \mathfrak{S}_{u_r} \times \mathfrak{S}_{N-|u|}$-不変性を持つことがわかる（$\mathfrak{S}_t \times \mathfrak{S}_{N-t}$ の元は 1^t を動かさないから，g に右からその元をかけたとしても $g \cdot V_{n,\alpha,h}\Big(\omega_n(1^t + \ \cdot\ )\Big)$ は不変である．同様に，$\displaystyle\prod_{r=0}^{\ell-1} \mathfrak{S}_{u_r} \times \mathfrak{S}_{N-|u|}$ の元は (43) の b を動かさないから，内積の群不変性も考慮し，左からの不変性も成り立つ）．

よって命題 2 により，各項は多変数 Hahn 多項式の線型結合で表せると期待できる（命題 2 は $\mathfrak{S}_N$ 上の関数に対するものなので，調整は要する）．実際，各 $h \ge 0$ に対し，合計 h なる非負整数の組 $m = (m_r)_{r=0}^{\ell}$ にわたって線型結合で展開される．その係数を次式中で A_m と表している．

以上の注意のもと計算を実行し，主結果となる恒等式を得る（特に係数 A_m を求める計算がかなり大変であったが，その過程は省略する）．パラメータは $p := \frac{q-1}{q}$ と置き換える．また，結果の簡潔な記述のために，次の記法を用いる：

<u>記法.</u>　有限列 $z = (z_r)_{r=0}^{\ell-1}$ に対し，

(1)　$z + ae_0$ によって，第 0 成分にのみ a を加えた有限列 $(z_0 + a, z_1, \cdots, z_{\ell-1})$ を表す．

(2)　$\displaystyle z|^h := \sum_{r=0}^{h} z_r, \quad z|_h := \sum_{r=h}^{\ell-1} z_r.$

では，ここまでの設定も改めて記述した上で，本稿の主結果を述べる：

定理（多変数 Krawtchouk 多項式の加法定理）. $n=(n_r)_{r=0}^{\ell-1},\ |n|=N$ とする．$0\le t\le N,\ u=(u_r)_{r=0}^{\ell-1},\ |u|\le N$ とする．$x=(x_r)_{r=0}^{\ell-1},\ |x|\le t,\ x_r\le u_r$ とし，$y=(y_r)_{r=0}^{\ell-1},\ |y|\le x_0$ とする．$0<p<1$ とする．このとき，次式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&K_n^{\langle\ell\rangle}\Big(u-x+y+(t-x_0)e_0\,;\,p\,;\,N\Big) \;=\; \frac{1}{\binom{N}{n}}\left(-\tfrac{1-p}{p}\right)^{t+u_0}\\
&\times\sum_{\alpha=(\alpha_r)_{r=0}^{\ell-1}}\frac{p^{2(n|_1-\alpha|_1)}(2p-1)^{n_0-\alpha_0}}{(1-p)^{2(N-|\alpha|)}}\binom{x_0}{n-\alpha}K_{n-\alpha}^{\langle\ell\rangle}\Big(y\,;\,\tfrac{2p-1}{p},p,\cdots,p\,;x_0\Big)\\
&\times\sum_{m=(m_r)_{r=0}^{\ell-1}}A_mQ_m^{\langle\ell\rangle}\Big(x-(N-|\alpha|)e_0\,;-u-1^\ell+(N-|\alpha|)e_0,\,-N+|\alpha|-1\,;t-N+|\alpha|\Big).
\end{aligned}
$$

ここで係数 A_m は x,y に依らない次式で与えられる：

$$
\begin{aligned}
A_m&=(-1)^{|m|}\frac{\binom{t-N+|\alpha|}{m}\binom{N-t-|m|}{\alpha|_1-|m|}}{\binom{|\alpha|-2|m|}{\alpha_0-|m|}}\frac{\binom{u_0-N+|\alpha|}{m_0}\binom{\alpha|_1-m|_1}{m_0}}{\binom{|\alpha|-2|m|+m_0+1}{m_0}\binom{N-u_0-2m|_1}{m_0}}\\
&\quad\times\prod_{r=1}^{\ell-1}\frac{\binom{u_r}{m_r}}{\binom{N-u|^{r-1}-2m|_{r+1}-m_r+1}{m_r}\binom{N-u|^r-2m|_{r+1}}{m_r}}\\
&\quad\times\sum_{j=0}^{a_r\wedge m_r}\frac{\binom{\alpha|_{r+1}-m|_{r+1}}{m_r-j}\binom{N-u|^r-\alpha|_{r+1}-m|_{r+1}}{j}\binom{N-u|^{r-1}-2m|_{r+1}-m_r+1}{j}\binom{N-u|^{r-1}-\alpha|_{r+1}-m|_r-j}{\alpha_r-j}}{\binom{N-u|^{r-1}-\alpha|_{r+1}-m|_{r+1}-j+1}{j}\,p^j}\\
&\quad\times K_{\alpha_r-j}\left(u_r-j\,;\,p\,;\,N-u|^{r-1}-\alpha|_{r+1}-m|_{r+1}-2j\right).
\end{aligned}
$$

4　今後の課題

本稿で与えられた結果は，$|n|=N$ という特別な場合の帯球函数（多変数 Krawtchouk 多項式）に関するもので，その群移動についても制限があった．この結果をより一般の場合に拡張することが，今後の課題である．同時に，加法定理の表現論的な意味づけをより明確にすることも，課題である．

また，Mizukawa[8] において実現された複素鏡映群上の帯球函数としての多変数 Krawt-chouk 多項式は，局所体の場合とは多項式のパラメータが異なる．そのため，これについても加法定理の考察を行い，局所体の場合と比較することは，一般のパラメータの場合の加法定理を見出すうえで重要と考えられる．次に，多変数 Krawtchouk 多項式の q-類似を帯球函数に持つ，局所体上の行列群に関する例（Stanton[10] の多変数化）についても，考察を行いたい．課題は山積みである．

謝辞　本共同研究「表現論とその組合せ論的側面」のお世話をしていただき、講演の機会を与えてくださった石川雅雄先生に、この場を借りて御礼申し上げます。

引用・参考文献

[1] C.F. Dunkl, A Krawtchouk polynomial addition theorem and wreath product of symmetric groups, *Indiana Univ. Math. J.*, **25** (1976), 335-358.

[2] C.F. Dunkl, An addition theorem for Hahn polynomials: the spherical functions, *SIAM J. Math. Anal.*, **9** (1978), 627-637.

[3] R.C. Griffiths, Orthogonal polynomials on the multinomial distribution, *Austral. J. Statist.*, **13** (1971), 27-35.

[4] A. Hora, T. Hirai and E. Hirai, Limits of characters of wreath products $\mathfrak{S}_n(T)$ of a compact group T with the symmetric groups and characters of $\mathfrak{S}_\infty(T)$, II, From a viewpoint of probability theory, *J. Math. Soc. Japan*, **60** No.4 (2008), 1187-1217.

[5] K. Kawamura, Infinite-variate extensions of Krawtchouk polynomials and zonal spherical functions over a local field, 京都大学博士学位論文 (2018), 58pages; *The FUNKCIALAJ EKVACIOJ* に掲載決定.

[6] R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Awarttouw , *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[7] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd.ed. , Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1995.

[8] H. Mizukawa, Zonal spherical functons on the complex reflection groups and $(m+1, n+1)$-hypergeometric functions, *Adv. Math.*, **184** (2004), 1-17.

[9] F. Scarabotti, Multidimensional Hahn polynomials, intertwining functions on the symmetric group and Clebsch-Gordan coefficients, Preprint, arXiv: 0805.0670v1.

[10] D. Stanton, Three Addition Theorems for some q-Krawtchouk Polynomials, *Geom. Dedicata*, **10** (1981), 403-425.

[11] A. Terras, *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, London Mathmatical Society Student Text **43**, University of California, San Diego, 1999.

[12] Y.Xu, Hahn, Jacobi, and Krawtchouk Polynomials of Several Variabls, *Journal of Approximation Theory*, **195** (2015), 19-42.

[13] 川村晃英，局所体上の帯球関数として現れる多変数 q-超幾何型多項式，RIMS 共同研究「表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題」報告集 (2016)，15-32.