Half-integrality of the KGB decomposition for SL_3

東京大学大学院数理科学研究科　林 拓磨
Takuma Hayashi
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要

本稿では [5] に基づき, 軌道分解の組合せ論に関する一般的なアイデアと, その例である $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の SL_3 の旗概形の $\mathrm{SO}(3)$ 不変部分空間への分解について概説する.

1　軌道の分類と代数幾何

群作用に関する軌道分解の組合せ論的分類の問題の多くは次の形で定式化することができる:

問題 1　k を可換環, K を k 上定義された群概形, X を K の作用を持った k 概形とする. このとき, 各 k 上の体 F に対し, $X(F)$ の $K(F)$ 軌道を分類せよ.

問題 1 における環 k は大抵 $\mathbb{Z}[1/n]$ ($\mathbb{Z}$ は整数環, n は 0 でない整数) や有理数体 $\mathbb{Q}$ なことが多い. このとき, F はそれぞれ n が可逆な体, 標数 0 の体となる. ところで, 大抵の場合は分類は F に依存する. 例えば軌道の数が異なるかもしれない. 以下 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ を実数体, 複素数体とする.

例 2. X を $\mathbb{Z}$ 上定義された射影直線 $\mathbb{P}^1$ とする. $\mathbb{Z}$ 上定義されたアフィン群概形 $\mathrm{SO}(2)$ を

$$\mathrm{SO}(2)(A) = \{g \in \mathrm{SL}_2(A) :\ g^T = g^{-1}\}$$

とする. ここで A はすべての可換環を走り, g^t は g の転置である. このとき, $\mathrm{SO}(2)$ は自然に $\mathbb{P}^1$ に作用する. ところで, $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{R})$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ に推移的に作用する. 一方, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は 3 つの $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{C})$ 軌道を持つ. 1 つは開軌道であり, 残りは閉軌道である. 閉軌道は具体的に $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}\right\}$ と $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}\right\}$ と書ける. また, それらの和集合は唯一の閉 $\mathrm{O}(2)(\mathbb{C})$ 軌道になっていることに注意する. 2 つの点は $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{SO}(2)(\mathbb{C})$ によって移りあう.

このように体によって依存する理由は大抵分類の途中で方程式を解くからであろう. 一方, 分類の記述または分類の議論に現れる方程式のうち体に依存しない部分を経験的に見つける

こともあるだろう．体に依存しない方程式とはつまり k 上定義された方程式を指す．より正確にこれらのことを述べるため, まずその依存または不変性が起こる理由をもう少しはっきりさせておこう．それは例えば次の 2 つの要素によるだろう．

1. 方程式の解の存在.
2. 解の選び方 (Galois 対称性).

例 3. $\mathbb{P}^1$ の例に戻る．実軌道と複素軌道の数の差が発生する理由は方程式 $x^2+1=0$ を解くからである．また, 2 つの閉 $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{C})$ 軌道は $x^2+1=0$ の解 $\sqrt{-1}$ の取り方に依存する．つまり, 一度 $\sqrt{-1}$ を一度とって 2 つの軌道をこの解を用いて構成したとき, これらの軌道は共役 $\sqrt{-1}$ by $-\sqrt{-1}$ によって入れ替わる．一方, これらの軌道の和集合は $\sqrt{-1}$ の取り方には依存しない．この考察を幾何学化するため, $\mathbb{C}$ を抽象的に $\mathbb{R}$ 代数 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ と思うことにしよう．このとき $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を実概形の射 $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{P}^1$ とみなすことができる．実概形 $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ は実点を持たないが 2 つの複素点を持つ．この事実が例 2 に現れた違いを復元する．つまり, 実概形 $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ が実軌道と複素軌道の分類における相違をコントロールする．この考察は筆者が Karlsruhe 工科大学滞在時 Fabian Januszewski 氏から習った考え方だった．他に特筆すべきことは例 2 に現れた行列 s が共役作用の役割を果たしていたことである．s は $\mathrm{O}(2)(\mathbb{C})$ に入っているが $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{C})$ に入っていないという事実は, 各閉 $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{C})$ 軌道が実数体上定義されないのに対し, 閉 $\mathrm{O}(2)(\mathbb{C})$ 軌道が実数体上定義されることと対応してるだろうと考えられる．群論的立場からは s は $\mathrm{O}(2)$ の Weyl 群の -1 の元を代表していることにも注意したい．

そこで, 体による相違をこのように幾何学的に表すという考え方を提示したい．つまり, この相違を反映した X の K 不変部分概形 (空間) を与えようというのである．さらに, この K 不変部分概形を用いて X を分解するという問題を提示したい．$X(F)$ の $K(F)$ 軌道分解という立場から言えば, F に依存する方程式を解くことをやめることを意味する．そのためこの分解は問題 1 に対して完全な解答を与えない．その代わりに体に依存しない弱い分解を与える．また, 例 3 にみられるように必ずしも基点を持たない空間も許容することで, 解の存在のいかんによって軌道の数が変わるという現象のうち F に依らない方程式からくる部分をコントロールすることができる．実際次のことが証明できる:

定理 4（[5]） k を可換環, X を k 概形, $\{Z_\lambda \subset X\}$ を X の部分概形の集合[*1]とする．

(1) 次の条件は同値である:

[*1] k 概形からの単射 (monomorphism) でよい．

(a) 任意の k 上の代数閉体 F に対して

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda(F) \to X(F)$$

は全単射である．

(b) 任意の k 上の体 F に対して

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda(F) \to X(F)$$

は全単射である．

(c) 自然な射

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \to X$$

は底集合の全単射を誘導する．

(2) k' を忠実平坦 k 代数とする．このとき $\{Z_\lambda \subset X\}$ が (1) の同値条件を満たすことと $\{Z_\lambda \otimes_k k' \subset X \otimes_k k'\}$ が (1) の同値条件を満たすことは同値である．

このことから K 不変部分概形への分解は問題 1 のある種の一般的な場合分けを提示しているとも言える．一見, (a) と (b) の同値は不自然に見えるかもしれない．(a) と (b) の見た目の条件の差はすべて Z_λ という k 概形の存在そのものが補っている．

例 5. $\mathbb{Z}$ 上の閉埋め込み $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right] \to \mathbb{P}^1$ を例 3 と同様に定義し, U をその補空間とする．このとき $g \mapsto g\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ で定義される射 $\mathrm{SO}(2) \to \mathbb{P}^1$ は U への全射 (surjection) になっている．このことは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{C})$ 軌道分解の整類似と思うことができる．

この結果を一般化するためには X, K が与えられたときに Galois 作用を調べることになるだろう．例えば上述の行列 s のように Galois 作用を K を用いて理解することは重要になるだろう．問題 1 の組み合わせ論的研究はすでにその Galois 対称性をすでに捉えきっていることもあるかもしれない．もう少しこの期待について説明するために今度は $\mathbb{P}^1$ の例を群論的立場から説明することを試みよう．$\mathbb{P}^1$ は SL_2 及び GL_2 の旗概形になっていたことに注意しよう．群 $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{R})$ 及び $\mathrm{O}(2)(\mathbb{R})$ は各々 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 及び $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群であった．

一般に, G を連結実簡約代数群, K を $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群, $K_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする．θ を K に付随する $G(\mathbb{R})$ の Cartan 対合とする．G の Lie 環を $\mathfrak{g}_0$, その複素化を $\mathfrak{g}$ と書く．$\mathfrak{g}_0$ の各 θ 不変実 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0$ に対して

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$W_G(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = N_{G(\mathbb{C})}(\mathfrak{h})/Z_{G(\mathbb{C})}(\mathfrak{h})$$

$$W_G(\mathfrak{g},\mathfrak{h})^\sigma = N_K(\mathfrak{h})/Z_K(\mathfrak{h})$$

とおく．また, $\mathcal{B}_G$ を G の旗多様体とする．$\mathfrak{g}_0$ の θ 安定 Cartan 部分代数の K 共役類の代表元 $\mathfrak{h}_0$ を固定しておく．このとき, [7] において次の全単射が証明された:

$$K_{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{B}_G(\mathbb{C}) \cong \coprod_{\mathfrak{h}_0} W_G(\mathfrak{g},\mathfrak{h})^\sigma\backslash W_G(\mathfrak{g},\mathfrak{h}).$$

例 6. $G=\mathrm{SL}_2$, $K=\mathrm{SO}(2)(\mathbb{R})$ とする．$\mathfrak{h}_{\mathrm{std}}$ を対角行列からなる $\mathfrak{sl}_2$ の分裂 Cartan 部分代数とする．$\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}} := \mathfrak{so}(2)$ は基本 Cartan 部分代数になっている．このとき

$$W_{\mathrm{SL}_2}(\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{h}_{\mathrm{std}})^\sigma \cong W_{\mathrm{SL}_2}(\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{h}_{\mathrm{std}})$$

$$W_{\mathrm{SL}_2}(\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}})^\sigma = \{1\}.$$

がわかる．次に $G=\mathrm{GL}_2$ として $\mathfrak{h}_{\mathrm{std}}$ を同様に定義する．また, $\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}}$ を $\mathfrak{so}(2)$ を含む $\mathfrak{gl}_2$ の基本 Cartan 部分代数とする．このとき

$$W_{\mathrm{GL}_2}(\mathfrak{gl}_2,\mathfrak{h}_{\mathrm{std}}) \cong W_{\mathrm{GL}_2}(\mathfrak{gl}_2,\mathfrak{h}_{\mathrm{std}})^\sigma$$

$$W_{\mathrm{GL}_2}(\mathfrak{gl}_2,\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}})^\sigma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

が言える．$W_{\mathrm{GL}_2}(\mathfrak{gl}_2,\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}})^\sigma$ の非自明な元は前述の行列 $s=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ によって代表される．

標数が 2 でない代数閉体への一般化については [8] を見よ．

2 主定理

さて, 前節では $\mathbb{P}^1$ を例にして軌道分解の代数幾何化のアイデアについて説明してきた．ここでは非自明な例として SL_3 の KGB 分解の半整数性定理とでも呼ぶべき結果について簡単に説明したい．

まずは松木分類を書き下してみることにしよう．$\mathfrak{h}_{\mathrm{std}}$ を対角行列からなる $\mathfrak{sl}_3$ の分裂 Cartan 部分代数とする．また, $\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}}$ を $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を含む $\mathfrak{sl}_3$ の基本 Cartan 部分代数とする．このとき,

$$W_{\mathrm{SL}_3}(\mathfrak{sl}_3,\mathfrak{h}_{\mathrm{std}})^\sigma \cong W_{\mathrm{SL}_3}(\mathfrak{sl}_3,\mathfrak{h}_{\mathrm{std}})$$

$$W_{\mathrm{SL}_3}(\mathfrak{sl}_3,\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}}) \cong \mathfrak{S}_3$$

$$W_{\mathrm{SL}_3}(\mathfrak{sl}_3,\mathfrak{h}_{\mathrm{fun}})^\sigma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である．また，$W_{\mathrm{SL}_3}(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{h}_{\mathrm{fun}})^\sigma$ の非自明な元の代表元として $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3)(\mathbb{Z})$ がとれる．特に s は SO(3) の基本 Cartan 部分代数に関する Weyl 群の中で -1 になっていることに注意する．ここで SO(3) は SO(2) と同様に定義する．θ を 付随する Cartan 対合とするとき，θ 安定 Cartan 部分代数はこの 2 つのどちらかに共役であることが知られている．このことから $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}(\mathbb{C})$ は 4 つの $\mathrm{SO}(3)(\mathbb{C})$ 軌道を持つとわかったことになる．分裂 Cartan 部分代数に対応する唯一の軌道は分裂 Borel 部分群を含み，特に対応する軌道は自明な実構造を持つ．一方，残りの軌道は実 Borel 部分群を含まない．期待としては例 3 のように上述の行列 s が共役作用の役割を果たして軌道が実形を持つのではないかと考えられる[*2]．この期待が正しいことを証明したのが次の結果である:

定理 7（[5]） SL_3 を $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の簡約群とみなす．このとき，SL_3 の旗概形 $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ は集合として 4 つの SO(3) 不変部分概形に分解する．

3 証明の概要

まず，分裂 Cartan 部分代数に対応する軌道は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義される Borel 部分群を含むことから開軌道が $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義されることは容易に証明することができる．

残りの 3 つの軌道の半整数形式の構成についてまず大雑把なアイデアを述べてみたい．まず，3 つの軌道の中で各々 $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上定義される Borel 部分群 B を見つけることができる．このことから $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上定義される単射

$$\mathrm{SO}(3)/B \cap \mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$$

を得る．$\mathbb{Z}[1/2] \subset \mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ は Galois 群 $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の Galois 拡大であることに注意する．$\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義されているので $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ に底変換することで $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ に Galois 作用が入る．次に部分空間 $\mathrm{SO}(3)/B \cap \mathrm{SO}(3)$ がこの Galois 作用で閉じていることを確かめ，$\mathrm{SO}(3)/B \cap \mathrm{SO}(3)$ に Galois 作用が誘導されることを証明する．この Galois 作用は行列 s を用いて記述することができる．これにより定義環が $\mathbb{Z}[1/2]$ に降下する．

この方針を正確に遂行するにはいくらか注意すべき点がある．まず $\mathrm{SO}(3)/B \cap \mathrm{SO}(3)$ は確かに概形になっているがそのことは自明ではない．例えば基礎環が体でないことから $B \cap \mathrm{SO}(3)$ の平坦性を計算などにより確認する必要がある ([2] Théorème 10.1.2)．概形の

[*2] 一般的にはこの期待は少し楽観的過ぎる．SO(3) の中で s が特別であることは説明したが s が SL_3 の中でどのような事情を持っているかについて全く説明していない．実際旗多様体上の閉軌道以外の場合は例えば $\bar{B}_{\mathrm{std}} = B_{\mathrm{std}}$ のように -1 以外の元が Galois 作用の役割を果たすこともある．部分旗多様体上の閉軌道の場合については [6] で調べている．

Galois 降下が概形になっていることもまた非自明である．[6] や [5] では方針を修正して各部分概形が具体的にわかる議論を展開している．以下開でも閉でもない 2 つの軌道と閉軌道の場合に分けてこのことを説明する．

まず

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right])$$

$$B_1 = g_1 B_{\mathrm{std}} g_1^{-1}$$

とする．このとき簡単な計算により

$$B_1 \cap \mathrm{SO}(3) = \begin{pmatrix} \mathrm{SO}(2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が言える．よって軌道は

$$\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}, x, y, z\right]/(x^2+y^2+z^2-1) \cong \mathrm{SO}(3)/B_1 \cap \mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$$

と書ける．そこで，$A = \mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}, x, y, z\right]/(x^2+y^2+z^2-1)$ とおく．A の上に対合 σ を

$$\sqrt{-1} \mapsto -\sqrt{-1}$$

$$x \mapsto -x$$

$$y \mapsto -y$$

$$z \mapsto -z$$

で定義する．これは $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ と整合的な作用になっている．この射を $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}(A)$ の元とみなすとき，この元は対合 $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}(\sigma)$ で不変であることが定義に従って示すことができる．この証明に行列 s が現れることに注意しておく．このことより上述の $\mathrm{Spec}\, A \to \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の射 $\mathrm{Spec}\, A^{\Gamma} \to \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ に降下することがわかる．また，

$$A^{\Gamma} \cong \mathbb{Z}\left[1/2, x', y', z'\right]/((x')^2+(y')^2+(z')^2+1)$$

であることも容易に証明できる．これが開でも閉でもない軌道のうちの 1 つの降下の証明である．もう一方も同様の方法で降下させられる．

次に閉軌道について論じる．以下は Fabian Januszewski 氏との共同研究 [6] に基づく．

$$g_{\mathrm{clo}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\mathrm{clo}} = g_{\mathrm{clo}} B_{\mathrm{std}} g_{\mathrm{clo}}^{-1}$$

とする． このとき $B_{\mathrm{clo}} \cap \mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ は SO(3) の Borel 部分群になる． これにより $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上の旗概形の埋め込み

$$\mathrm{SO}(3)/B_{\mathrm{clo}} \cap \mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$$

を得る．ところで, 複素旗多様体の点が Borel 部分群と同一視できたように, 旗概形が Borel 部分群のモジュライ空間になるであろうことが期待できる．この場合, 群が底概形上 Borel 部分群を必ずしも持つ必要はなくなることに注意する．とにかく $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ を SO(3) の Borel 部分群のモジュライ空間としたとき, $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ は自然に $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義される．[1] Corollaire 5.8.3 によれば $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ は概形であり, $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ への底変換は $\mathrm{SO}(3)/B_{\mathrm{clo}} \cap \mathrm{SO}(3)$ と同型である．ここまで $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ の定義を明記せずに来たが, $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ も同様に定義される．そのようなわけで今 $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上定義された射

$$\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)} \cong \mathrm{SO}(3)/B_{\mathrm{clo}} \cap \mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$$

があり, $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ と $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ には自然な Galois 作用が入っている．この射が $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義されているためにはこの射が共役と交換すればよい．このことは実質, 先ほど期待として述べていた等式

$$sB_{\mathrm{clo}}s^{-1} = \bar{B}_{\mathrm{clo}}$$

から従う．ただし, 体以外の上で定義されている Borel 部分群を考える必要があり, その場合必ずしも Borel 部分群同士が共役で互いに移りあうとは限らないので技術的にはギャップがある．この問題は Weil 制限を使ってうまいエタール被覆を構成することで解消される．

以上で 4 つの $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義された概形の単射を得ることができた．分解を証明するためには, 定理 4 (2) により $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ に底変換し, 各 $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上の代数閉体 F に対して, これまで作った 4 つの軌道の F 点集合が $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}(F)$ の分解を与えていることを証明すればよい．このことは例えば [8] から従う．ただし, 実はここまでの議論では閉軌道以外の 3 つの概形が部分概形であることは証明できていない．このことを証明するにはエタール位相について局所的にこれらの射の定義方程式を書く必要がある．[5] では 4 つの軌道をモジュライ空間として記述し, その結果を用いて各単射がアファイン埋め込みになっていることを証明した．分解もモジュライ空間としての記述の系として再証明された．実は, このアイデアをうまく応用すると $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ が斉次方程式 $x^2 + y^2 + z^2$ で定義される $\mathbb{P}^2$ の被約閉部分概形であることも証明できる ([5]).

4　最後に

本研究を始めた最初の動機は Harish-Chandra 加群の整構造やその保型表現論への応用にあった．このことについては [4] を参照されたい．また, 閉軌道の半整数性を表現論的立場

から説明することもできる．これについては [3] を参照してもらうことにしてここでは割愛する．

参考文献

[1] M. Demazure. Groupes réductifs: Déploiements, sous-groupes, groupes-quotients. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1964), Fasc. 6, Exposé 22*, page 106. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1965.

[2] P. Gabriel. Construction de préschémas quotient. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1963/64), Fasc. 2a, Exposé 5*, page 37. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1963.

[3] T. Hayashi. Half-integrality of the KGB decomposition for SL_3. 2019 年度表現論シンポジウム講演集.

[4] T. Hayashi. Half-integrality of the closed SO(3)-orbit on the flag variety of SL_3. 数理解析研究所講究録 2139, 165-176, 2019-12.

[5] T. Hayashi. Half-integrality of the KGB decomposition for SL_3. In preparation.

[6] T. Hayashi and F. Januszewski. Families of $\mathcal{D}$-modules. In preparation.

[7] Toshihiko Matsuki. The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. *J. Math. Soc. Japan*, 31(2):331–357, 1979.

[8] R. W. Richardson and T. A. Springer. Combinatorics and geometry of K-orbits on the flag manifold. In *Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992)*, volume 153 of *Contemp. Math.*, pages 109–142. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.