Several classes of plane partitions with the same generating function

石川 雅雄

岡山大学, 理学部

mi@math.okayama-u.ac.jp

概 要

Striker と Williams は rc-poset という概念を定義して promotion や rowmotion を toggle という概念を使って rc-poset の順序イデアル全体になす分配束に一般化できることを示した. また, 交代符号行列全体の成す分配束に対して, join-irreducible な元全体の成す部分半順序集合 $\mathbf{A}_n$ が A 型の positive root posets $\Phi^+(A_k)$ を貼り合わせてできることを示した. この原稿の中で我々は点対称な交代符号行列の成す有限分配束について調べる.

1 半順序集合

$x, y \in \mathbb{R}$ に対して $\max\{x, y\}$, $\min\{x, y\}$ は, それぞれ x, y の小さくない方, 大きくない方を表す. $\lfloor x \rfloor$ は x 以上の最小の整数, $\lceil x \rceil$ は x を超えない最大の整数を表す. $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, $y = x$ または $y = x+1$ が成り立つとき, $y \gg x$ または $x \ll y$ と書く.

1.1 有限分配束

半順序集合 P とは二項関係 $\leqslant$ が定義されていて, 任意の $x \in P$ に対して $x \leq x$, $x \leqslant y$ かつ $y \leqslant x$ ならば $x = y$, $x \leqslant y$ かつ $y \leqslant z$ ならば $x \leqslant z$ が成り立つことである. 半順序集合 L が, 任意の元の組 (x, y) に対して上限 $x \vee y = \min\{z \mid z \geq x, y\}$ と下限 $x \wedge y = \max\{z \mid z \leq x, y\}$ を持つとき, 束 *(lattice)* という. 束 L の任意の元 $x, y, z \in L$ に対して, 分配束 (distributive laws)

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

が成り立つとき, 分配束 *(distributive lattice)* という. 半順序集合 P に対して, 部分集合 $I \subset P$ が, 『$x \in I$ かつ $y \leq x$ ならば $y \in I$』を満たすとき 順序イデアル *(order ideal)* という. 半順序集合 P の順序イデアル全体の集合を $J(P)$ と書く. $J(P)$ は包含関係によって分配束になる.

定理 1.1. L が有限分配束ならば $L \simeq J(P)$ となる半順序集合 P が同系を覗いて一意的に存在する.

有限束 L の元 x が *join-irreducible* とは $x \neq \hat{0}$ かつ $u < x$ かつ $v < x$ となる $u, v \in L$ が存在して $x = u \vee v$ と書けないことである. ここで $\hat{0}$ は L の最小元とする. 上の定理の P は L の join-irreducible な元がなす部分半順序集合として得られることが知られている.

1.2 Positive root posets

ワイル群 W をもつルート系を $\Phi(W)$ と書く. 正のルート全体の集合を $\Phi^+(W)$ と書き, 半順序を次のように入れる. $\alpha, \beta \in \Phi^+(W)$ に対して, $\beta - \alpha$ が正ルートの非負整数係数の線形結合であるとき $\alpha \leqslant \beta$ と定義する. これを *Positive root poset* と呼ぶ. 例えば, 次が正ルートの集合である.

- $\Phi^+(A_n) = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$
- $\Phi^+(B_n) = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

また, 個数は次のようになる.

n	1	2	3	4	5	6
$\sharp\Phi^+(A_n)$	1	3	6	10	15	21
$\sharp\Phi^+(B_n)$	1	4	9	16	25	36

$\Phi^+(A_4)$ のハッセ図は以下のようになる.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & e_1 - e_4 & & \\
 & e_1 - e_3 \arrow[ur] & & e_2 - e_4 \arrow[ul] & \\
e_1 - e_2 \arrow[ur] & & e_2 - e_3 \arrow[ul] \arrow[ur] & & e_3 - e_4 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

また, $\Phi^+(B_3)$ の図は以下である.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & e_1 + e_2 \\
 & & & e_1 + e_3 \arrow[ur] & \\
 & & e_1 \arrow[ur] & & e_2 + e_3 \arrow[ul] \\
 & e_1 - e_3 \arrow[ur] & & e_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
e_1 - e_2 \arrow[ur] & & e_2 - e_3 \arrow[ul] \arrow[ur] & & e_3 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

2 交代符号行列について

2.1 交代符号行列

n 次の 交代符号行列 *(alternating sign matrix)* とは, n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le n}$ で, (i) $a_{ij} \in \{0, \pm 1\}$, (ii) 各行各列の和が 1, (iii) 各行各列で 0 を除けば $+1$ と -1 が交代に現れる, $b_{i+1,j} = b_{i,j}$ または $b_{i+1,j} = b_{i,j} + 1$ をみたすものである.. n 次交代符号行列全体の集合を $\mathscr{A}_n$ で表す. $A \in \mathscr{A}_n$ に対して $(n+1)\times(n+1)$ 行列 $S(A) = (s_{ij})_{0\le i,j\le n}$ を $s_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{kl}$ によって定義する. 例えば, 以下の例のようになる.

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}
$$

このとき, 次の条件をみたす.

(i) (境界条件)

$$
s_{ij} = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ または } j = 0 \text{ のとき}, \\ j & i = n \text{ のとき}, \\ i & j = n \text{ のとき}. \end{cases}
$$

(ii) $0 < i < n,\ 0 \le j < n$ のとき, $s_{i,j} \ll s_{i,j+1}$.

(iii) $0 \le i < n,\ 0 < j < n$ のとき, $s_{i,j} \ll s_{i+1,j}$.

この条件をみたす $(n+1)\times(n+1)$ 行列 $S(A) = (s_{ij})_{0\le i,j\le n}$ 全体の集合を $\mathscr{S}_n$ と書く. $\mathscr{A}_n$ の元と $\mathscr{S}_n$ の元は 1 対 1 に対応する. $S(A) = (s_{ij})_{0\le i,j\le n}, S(A') = (s'_{ij})_{0\le i,j\le n} \in \mathscr{S}_n$ に対して

$$
S(A) \le S(A') \quad \Leftrightarrow \quad s_{ij} \le s'_{ij} \quad (0 \le {}^\forall i, j \le n)
$$

によって順序を定義する.

定理 2.1. このとき, $\mathscr{S}_n$ は, この順序によって分配束であり, meet と join は

$$
S(A) \wedge S(A') = \left(\min\{s_{ij}, s'_{ij}\}\right)_{0\le i,j\le n}, \qquad S(A) \vee S(A') = \left(\max\{s_{ij}, s'_{ij}\}\right)_{0\le i,j\le n}
$$

によって定まる. また $S(A) = (s_{ij})_{0\le i,j\le n} \in \mathscr{S}_n$ に対して

$$
\max\{0, i + j - n\} \le s_{ij} \le \min\{i, j\}
$$

が成り立つ.

2.2 変形和行列と重み行列

交代符号行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{A}_n$ に対して

$$d(A)_{ij} = s(A)_{ij} - \max\{0, i+j-n\}, \qquad h(A)_{ij} = \min\{i+j, 2n-i-j\} - 2\,s(A)_{ij}$$

によって定義される行列 $d(A)_{ij} = (d(A)_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ と $h(A)_{ij} = (h(A)_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ を, それぞれ変形和行列 *(deformed sum)* と重み行列 *(height function)* という.

命題 2.2. $A \in \mathscr{A}_n$ とする. このとき次が成り立つ.

(i) $i = 0, n$ または $j = 0, n$ のとき, $d(A)_{ij} = 0$ が成り立つ.

(ii) $i + j \le n$ ならば, $d(A)_{i-1,j} \ll d(A)_{i,j}$ かつ $d(A)_{i,j-1} \ll d(A)_{i,j}$ が両辺が定義される限り成り立つ.

(iii) $i + j \ge n$ ならば, $d(A)_{i,j} \gg d(A)_{i+1,j}$ かつ $d(A)_{i,j} \gg d(A)_{i,j+1}$ が両辺が定義される限り成り立つ.

(iv) $0 \le d(A)_{ij} \le \min\{i, j, n-i, n-j\}$

最小元と最大元に対して, その変形和行列は次のようになる.

$$d(A^{\min}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad d(A^{\max}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&1&2&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

命題 2.3. $A, A' \in \mathscr{A}_n$ に対して.

$$A \leqslant A' \Leftrightarrow d(A) \leqslant d(A')$$

である. ここで $d(A) \leqslant d(A')$ とは, すべての $0 \le i,j \le n$ に対して $d(A)_{i,j} \leqslant d(A')_{i,j}$ が成り立つことである.

2.3 join-irreducible な元の半順序集合

定理 2.4. $0 < x, y < n$ かつ $0 < z \le \min\{x, y, n-x, n-y\}$ であるような任意の (x, y, z) に対して, join-irreducible な交代符号行列 $A^{(x,y,z)} \in \mathscr{A}_n$ で $d(A^{(x,y,z)})_{x,y} = z$ であり, (x, y) 成分は 1 減らすことができ, それ以外の成分は減らせないようなものが存在する.

例えば

$$d(A^{(3,3,3)}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&1&2&2&2&1&0\\0&1&2&3&3&2&1&0\\0&1&2&3&2&1&0&0\\0&1&2&2&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

は, 丸のついた $(3, 3)$ 成分は 1 減らして 2 にできるがそれ以外の成分は命題 2.2 に抵触するので減らすことが出来ない. したがって, カバーする元が 1 つで join-irreducble となる.

$$\mathscr{J}_n = \left\{ A^{(x,y,z)} \mid 0 < x, y < n \text{ and } 0 < z \le \min\{x, y, n-x, n-y\} \right\}$$

とおく. $\mathscr{J}_n$ は $\mathscr{A}_n$ の中の join-irreducible 全体の集合であり, $\mathscr{A}_n$ の誘導された部分半順序集合としての構造を入れる. すなわち $\mathscr{J}_n$ の中で順序関係があることは $\mathscr{A}_n$ の中で順序関係があることと同値である. このとき $\mathscr{A}_n = J(\mathscr{J}_n)$ である.

命題 2.5.

$$\sharp \mathscr{J}_n = (n-1)^2 + (n-3)^2 + (n-5)^2 + \cdots = \binom{n+1}{3}$$

よって, これを表にすると次のようになる.

n	2	3	4	5	6	7
$\sharp\mathscr{A}_n$	2	7	42	429	7436	218348
$\sharp\mathscr{J}_n$	1	4	10	20	35	56

定理 2.6. $0 < x, y < n$ かつ $0 < z \le \min\{x, y, n-x, n-y\}$ とする. このとき $\mathscr{J}_n$ におけるカバー関係は次のいずれかである.

(i) $x + y < n$ のとき

$$A^{(x-1,y,z-1)}, A^{(x,y-1,z-1)}, A^{(x+1,y,z)}, A^{(x,y+1,z)} \lessdot A^{(x,y,z)} \lessdot A^{(x-1,y,z)}, A^{(x,y-1,z)}, A^{(x+1,y,z+1)}, A^{(x,y+1,z+1)}$$

ここでは両辺が定義されている限り.

(ii) $x+y>n$ のとき

$$A^{(x-1,y,z)}, A^{(x,y-1,z)}, A^{(x+1,y,z-1)}, A^{(x,y+1,z-1)} \lessdot A^{(x,y,z)} \lessdot A^{(x-1,y,z+1)}, A^{(x,y-1,z+1)}, A^{(x+1,y,z)}, A^{(x,y+1,z)}$$

ここでは両辺が定義されている限り.

(iii) $x+y=n$ のとき

$$A^{(x-1,y,z-1)}, A^{(x,y-1,z-1)}, A^{(x+1,y,z-1)}, A^{(x,y+1,z-1)} \lessdot A^{(x,y,z)} \lessdot A^{(x-1,y,z)}, A^{(x,y-1,z)}, A^{(x+1,y,z)}, A^{(x,y+1,z)}$$

ここでは両辺が定義されている限り.

これらのハッセ図を小さな n について書くと以下のようになる.

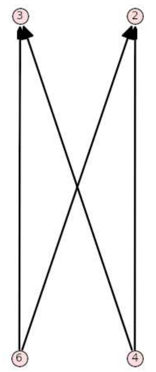


図 1: $\mathscr{J}_3$ のハッセ図

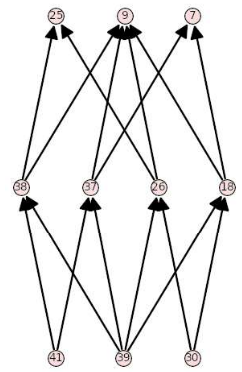


図 2: $\mathscr{J}_4$ のハッセ図

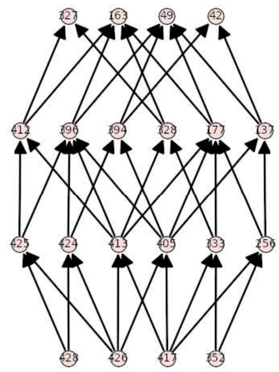


図 3: $\mathscr{J}_5$ のハッセ図

[5] の中で J. Striker は $\mathbf{A}_n$ を集合として

$$\mathbf{A}_n = \left\{ (i,j,k) \in \mathbb{Z}^3 \mid i,j,k \geq 0,\, i+j+k \leq n-2 \right\}$$

とし, 次の条件によってカバー関係を定義した.

(i) もし, 両辺が $\mathbf{A}_n$ の元ならば $(i,j,k) \gtrdot (i+1,j,k)$ かつ $(i,j,k) \gtrdot (i,j+1,k)$ が成り立つ.

(ii) もし, 両辺が $\mathbf{A}_n$ の元ならば $(i,j,k) \gtrdot (i+1,j,k-1)$ かつ $(i,j,k) \gtrdot (i,j+1,k-1)$ が成り立つ.

このとき, Striker は $\mathscr{A}_n \simeq J(\mathbf{A}_n)$ を示した. よって, 次の定理のように $\mathscr{J}_3$ と $\mathbf{A}_n$ の間に順序同型が定義できる.

定理 2.7. 写像 $\varphi : \mathscr{J}_n \to \mathbb{Z}^3$ を

$$\varphi(A^{(x,y,z)}) = \begin{cases} (x-z, y-z, z-1), & \text{if } x+y \leq n, \\ (n-y-z, n-x-z, x+y+z-n-1), & \text{if } x+y \geq n. \end{cases}$$

によって定義すると $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{A}_n$ であり, 半順序集合として $\mathscr{J}_n \simeq \mathbf{A}_n$ (順序同型) である.

J. Striker [5] は次の定理も得ている.

定理 2.8. 集合

$$\Phi^+(A_1) \oplus \Phi^+(A_2) \oplus \cdots \oplus \Phi^+(A_{n-1})$$

の上にカバー関係を本来のカバー関係以外に任意の i,j,k に対して $\Phi^+(A_i)$ の $\epsilon_j - \epsilon_k$ は $\Phi^+(A_{i+1})$ の $\epsilon_j - \epsilon_k$ と $\epsilon_{j+1} - \epsilon_{k+1}$ をカバーすると定義する. (これらは両辺が意味がある限り定義する) このとき $\mathbf{A}_n$ は, この半順序集合と同型である.

3 点対称交代符号行列

N 次の交代符号行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ が点対称 *(half turn symmetric)* とは

$$a_{N+1-i,N+1-j} = a_{i,j}. \tag{1}$$

が成り立つことである. N 次の点対称交代符号行列 (half-turn-symmetric alternating sign matrix, HTSASM) 全体の集合を $\mathscr{A}_N^{\mathrm{HTS}}$ と書く,

3.1 和行列

$N=2n$ 次の点対称交代符号行列 $A=(A_{ij})_{1\le i,j\le N}$ が与えられたとき, 前と同様に

$$s(A)_{i,j}=\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}a_{k,l},$$

で成分が決まる行列を $S(A)=(s(A)_{i,j})_{0\le i,j\le N}$ と書き, 和行列という. また, $\mathscr{S}_N^{\mathrm{HT}}=\{S(A)\mid A\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}\}$ によって点対称交代符号行列の和行列全体の集合を表す. が挙げられる. N 次の点対称交代符号行列 (Half-Turn Symmetric Alternating Sign Matrices) 全体の集合を $\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ と書く. 例えば $N=8$ のとき, 次の行列は 8 次の点対称交代符号行列とその和行列である.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&1&-1&0&1&0&-1&1\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&-1&0&1&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad S(A)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&2&2\\0&0&1&1&1&2&2&2&3\\0&0&1&2&2&3&3&3&4\\0&0&1&2&2&3&4&4&5\\0&1&1&2&3&4&4&5&6\\0&1&2&3&3&4&5&6&7\\0&1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

命題 3.1. 和行列 $S(A)=(s_{ij}(A))_{0\le i,j\le N}\in\mathscr{S}_N^{\mathrm{HT}}$ は次の条件を満たす:

$$\begin{cases}s_{i,0}(A)=s_{0,j}(A)=0 \qquad (0\le i,j\le N)\\ s_{i,N}(A)=i \qquad (0\le i\le N) \qquad\qquad s_{N,j}(A)=j \qquad (0\le j\le N)\end{cases}\tag{2}$$

かつ

$$\begin{cases}s_{i,j}(A)\ll s_{i,j+1}(A) \qquad (0\le i\le N,\ 0\le j<N),\\ s_{i,j}(A)\ll s_{i+1,j}(A) \qquad (0\le i<N,\ 0\le j\le N).\end{cases}\tag{3}$$

さらに (1) をみたす点対称交代符号行列から得られた和行列は次の和行列に関する対称性をみたす.

定理 3.2. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le N}\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ ならば $S(A)=(s_{ij}(A))_{0\le i,j\le N}\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ は次の条件を満たす.

$$s_{N-i,N-j}(A)-s_{i,j}(A)=N-i-j, \qquad (0\le i,j\le N).\tag{4}$$

証明. 式の対称性から $i+j\le N$ として証明すればよい. i に関する数学的帰納法で証明する.

(i) $i=0$ のとき, (2) 式より

$$s_{N,N-j}(A)-s_{0,j}(A)=(N-j)-0=N-0-j$$

だから成立する.

(ii) $i>0$ とする. $A\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ とすると, 交代符号行列の条件より

$$\sum_{l=1}^{j}a_{i,l}+\sum_{l=j+1}^{N}a_{i,l}=\sum_{l=1}^{N}a_{i,l}=1$$

である. (1) 式より

$$\sum_{l=1}^{j}a_{i,l}+\sum_{l=j+1}^{N}a_{N+1-i,N+1-l}=1$$

後の和で $N+1-l=l'$ とおくと

$$\sum_{l=1}^{j}a_{i,l}+\sum_{l'=1}^{N-j}a_{N+1-i,l'}=1$$

ここで $\sum_{l=1}^{j}a_{i,l}=s_{i,j}(A)-s_{i-1,j}(A)$ を使うと

$$s_{i,j}(A)-s_{i-1,j}(A)+s_{N+1-i,N-j}(A)-s_{N-i,N-j}(A)=1$$

となる. これを書き換えて

$$s_{N-i,N-j}(A)-s_{i,j}(A)=s_{N+1-i,N-j}(A)-s_{i-1,j}(A)-1\tag{5}$$

を得る. (5) 式と帰納法の仮定より

$$s_{N-i,N-j}(A)-s_{i,j}(A)=s_{N-(i-1),N-j}(A)-s_{i-1,j}(A)-1=N-(i-1)-j-1=N-i-j$$

となり, i のときも成り立つ.

(i), (ii) より (4) 式は任意の i について成り立つ. □ □

逆に, これらの条件が点対称交代符号行列の特徴付となることがわかる.

定理 3.3. $N+1$ 次の行列 $S=(s_{ij})_{0\le i,j\le N}$ が条件 (2), (3), (4) を満たすならば, 成分が,

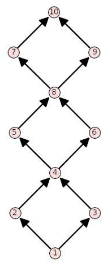
$$a_{ij}=s_{i,j}-s_{i-1,j}-s_{i,j-1}+s_{i-1,j+1} \tag{6}$$

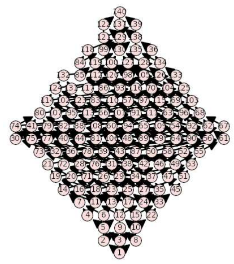
によって定義される N 次の行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ は点対称交代符号行列である.

$\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ に, $\mathscr{A}_N$ の部分集合としての誘導された順序を入れて, 半順序集合とする. すなわち $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le N}, A'=(b'_{ij})_{1\le i,j\le N}\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ に対して $s_{ij}(A)\le s_{ij}(A')$ が任意の $0\le i,j\le N$ について成り立つとき $A\lessdot A'$ と定義する. これによって $\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ は束になることは同様である. すなわち $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le N}, A'=(b'_{ij})_{1\le i,j\le N}\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ に対して次を満たす $A_1,A_2\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ が存在することは, 定理 3.3 より保証される.

$$S(A_1)=(\min\{s_{ij}(A),s_{ij}(A')\})_{0\le i,j\le N},,\qquad S(A_2)=(\max\{s_{ij}(A),s_{ij}(A')\})_{0\le i,j\le N}.$$

よって $A\wedge A'=A_1$ and $A\vee A'=A_2$, と置くと $\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ は有限分配束である. $\mathscr{A}_4^{\mathrm{HT}}$ と $\mathscr{A}_6^{\mathrm{HT}}$ の図を描くと次のようになる. このように $n=6$ でも元の数が多すぎて構造が見えない.





3.2 変形和行列

変形和行列 $D_{\mathrm{HT}}(A)=(d(A)_{ij})_{1\le i,j\le N}$ を前と同様に, 次のよって定義する.

$$d(A)_{ij}=\max\{s(A)_{ij},s(A)_{ij}-(i+j-2n)\}$$

また $\mathscr{D}_{\mathscr{N}}^{\mathrm{HTS}}=\{D(A)\mid A\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}\}$ によって変形和行列全体の集合を表すことにしよう. このとき, 次の条件が変形和行列を特徴づける.

命題 3.4. 和行列 $D(A)=(d_{ij}(A))_{0\le i,j\le N}\in\mathscr{D}_N^{\mathrm{HTS}}$ は次の条件を満たす:

$$d_{i,0}(A)=d_{0,j}(A)=d_{i,N}(A)=d_{N,j}(A)=0 \qquad (0\le i,j\le N) \tag{7}$$

かつ

$$\begin{cases} d_{i,j}(A)\ll d_{i,j+1}(A), \quad d_{i,j}(A)\ll d_{i+1,j}(A) \qquad (i+j<N), \\ d_{i,j}(A)\gg d_{i,j+1}(A), \quad d_{i,j}(A)\gg d_{i+1,j}(A) \qquad (i+j\le N). \end{cases} \tag{8}$$

さらに点対称性は変形和行列の方が見やすい.

命題 3.5. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le N}\in\mathscr{A}_N^{\mathrm{HT}}$ ならば, その変形和行列 $D(A)=(d_{ij}(A))_{0\le i,j\le N}\in\mathscr{D}_N^{\mathrm{HTS}}$ は次をみたす.

$$d_{N-i,N-j}(A)=d_{i,j}(A), \qquad (0\le i,j\le N). \tag{9}$$

したがって, 点対称性より半分の成分を考察すれば十分であることがわかる.

例えば $n=2$, $N=2n=4$ のとき, 次の 10 個の点対称交代符号行列がある.

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&-1&1\\1&-1&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

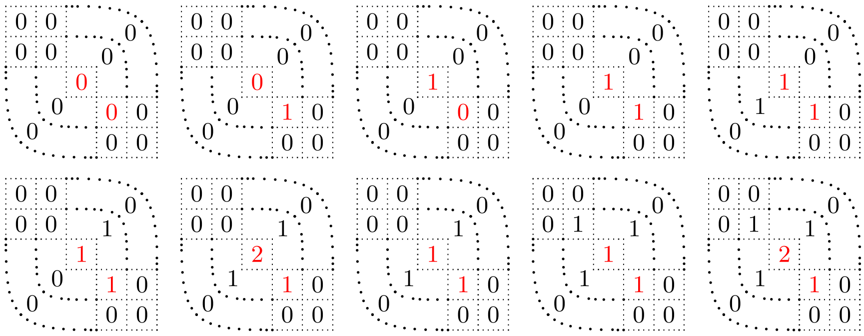
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

これらに対応する変形和行列の左上部分のみを取り出して書くと以下のようになる. ここで反対角線上の成分は対称でなければならないが, 他の成分は上記の条件を満たすように自由に取れる.

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\\0&0&0&&\\0&0&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\\0&0&0&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\\0&0&1&&\\0&0&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\\0&0&1&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\\0&1&1&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&1&\\0&0&1&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&1&\\0&1&2&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&1&\\0&1&1&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&1&\\0&1&1&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&1&\\0&1&2&&\\0&1&&&\\0&&&&\end{pmatrix}$$

反対角線上の成分は対称になっているので, これらの成分を重ねて次のような『図形』にする.



3.3 join-irreducible な元

添字の属する集合として

$$\mathscr{D}^{(2n)} = \{(i,j) \mid i,j \geq 0,\ i+j \leq 2n,\quad \text{where } (2n-i,i) = (i,2n-i) \text{ for } 0 \leq i \leq n\}$$

とおく. すなわち, これは, 三角領域

$$\mathscr{D}_0^{(2n)} = \{(i,j) \mid i,j \geq 0,\ i+j \leq 2n\}$$

の逆対角線上の点対称の位置にある 2 つのセル $(i, 2n-i)$ と $(2n-i, i)$ を同一視したものである. $\hat{S} = (\widetilde{c}_{i,j})_{(i,j)\in\mathscr{D}^{(N)}}$ という行列を考える. この行列では $0 \leq i \leq 2n$ に対して

$$\widetilde{c}_{i,0} \ll \widetilde{c}_{i,1} \ll \cdots \ll \widetilde{c}_{i,2n-i}$$

という成分の並びを第 i 行と呼ぶ. また $0 \leq j \leq 2n$ に対して

$$\widetilde{c}_{0,j} \ll \widetilde{c}_{1,j} \ll \cdots \ll \widetilde{c}_{2n-j,j}$$

という成分の並びを第 j 列と呼ぶことにする.

定理 3.6. $(x,y) \in \mathscr{D}^{(n)}$ かつ $0 < z \leq \min\{x,y\}$ となる (x,y,z) を固定すると, 点対称交代符号行列 $A_{\mathrm{HTS}}^{(x,y,z)} \in \mathscr{A}_{2n}^{\mathrm{HTS}}$ で有限分配束 $\mathscr{A}_{2n}^{\mathrm{HTS}}$ の中で join-irreducible であり, $d(A_{\mathrm{HTS}}^{(x,y,z)})_{x,y} = z$ となるものが唯一つ存在する. すなわち変形和行列 $d(A_{\mathrm{HTS}}^{(x,y,z)})$ は (x,y) 成分を 1 減らすことができ, 他の成分は制約条件が満たされるためには減らすことが出来ないようなものとして具体的に記述できる.

ここで, join-irreducible な元全体の集合を $\mathscr{J}_{2n}^{\mathrm{HTS}} = \left\{A_{\mathrm{HTS}}^{(x,y,z)} \mid (x,y) \in \mathscr{D}^{(n)} \text{ and } 0 < z \leq \min\{x,y\}\right\}$ と置く. このことから $\sharp\mathscr{J}_{2n}^{\mathrm{HTS}} = n(2n^2+1)/3$ であることはすぐにわかる. 個数を表にすると以下のようになる.

n	1	2	3	4	5	6
$\sharp\mathscr{A}_{2n}^{\mathrm{HTS}}$	2	10	140	5544	622908	198846076
$\sharp\mathscr{J}_{2n}^{\mathrm{HTS}}$	1	6	19	44	85	146

これらのハッセ図を SAGE で描かせたものが以下である.

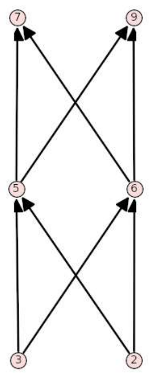


図 4: $\mathscr{J}_4^{\mathrm{HTS}}$ のハッセ図

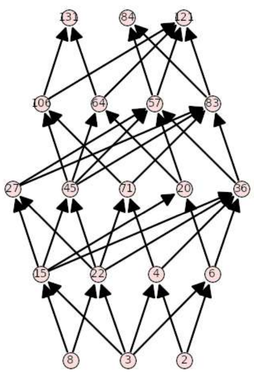


図 5: $\mathscr{J}_6^{\mathrm{HTS}}$ のハッセ図

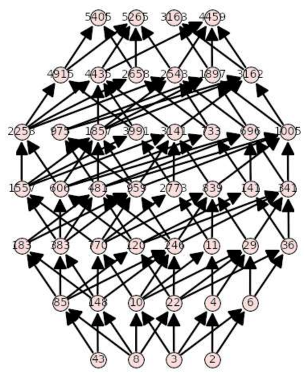


図 6: $\mathscr{J}_8^{\mathrm{HTS}}$ のハッセ図

ここで $\mathbf{B}_n$ を集合として

$$\mathbf{B}_n = \Phi^+(B_1) \uplus \Phi^+(B_1) \uplus \Phi^+(B_2) \uplus \Phi^+(B_2) \cup \cdots \uplus \Phi^+(B_{n-1}) \uplus \Phi^+(B_{n-1}) \uplus \Phi^+(B_n)$$

とする. ここで, $\mathbf{B}_n$ に適当な順序を入れると $\mathscr{J}_{2n}^{\mathrm{HTS}}$ と順序同型になることが示される. また, $\mathbf{B}_n \simeq \mathscr{J}_{2n}^{\mathrm{HTS}}$ は rc-poset であることも示される.

3.4 終わりに

交代符号行列が最初に現れたのは [3] の論文なので, 定義の詳細はその論文に書いてある. 交代符号行列の対称性を考察したのは [2] なので, 点対称交代符号行列については, [2, 4] を参照されたい. 分配束としての考察は [5, 6] に書いてある. また, 点対称交代符号行列の分配束が rc-poset であることがわかったのでそれに伴う Fully packed Loop の上の gyration も toggle を使って解釈できることになる. また, [1, Conjecture 30] には, 点対称交代符号行列に関する Razmov-Stroganov 予想が述べてあり, これらについても将来取り込む必要がある.

参考文献

[1] J. de Gier, "Loops, matchings and alternating-sign matrices", *Discrete Math.*, **298** (2005) 365 – 388.

[2] G. Kuperberg, "Classes of Alternating-Sign Matrices under One Roof", *Ann. of Math.*, **156** (2002) 835 – 866.

[3] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., "Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions", *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983) 340 – 359.

[4] S. Okada, "Enumeration of Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices and Characters of Classical Groups", *J. Algebraic Combin.*, **23** (2006) 43 – 69.

[5] J. Striker, "The toggle group, homomesy, and the Razumov-Stroganov correspondence", *Electron. J. Combin.*, **22** (2015) ♯ P2.57.

[6] J. Striker and N. Williams, "Promotion and rowmotion", *European J. Combin.*, **33** (2012) 1919 – 1942.