(-2)-blowup formula

早稲田大学　大川　領
R. Ohkawa
Waseda University

概要

この講演では A_1 特異点から定まるネクラソフ分配関数について紹介する．これは特異点解消上の枠付き連接層のモジュライ上の積分を係数とする母関数である．特異点解消として二つ、極小解消とスタック的な解消、つまり、射影平面を位数 2 の巡回群で割った商スタックを考える．これら二つの特異点解消から定まるネクラソフ分配関数の間の関数等式について紹介する．

1　導入

アフィン平面 $Q=\mathbb{C}^2$ と $\mathrm{SL}(Q)$ の有限部分群 Γ を考える．有限群 Γ は射影平面 $\mathbb{P}^2=\mathbb{P}(\mathbb{C}\oplus Q)$ に自然に作用する．この作用による商スタックを $X_0=[\mathbb{P}(\mathbb{C}\oplus Q)/\Gamma]$ とおく．X_0 から無限遠直線 $\ell_\infty=[\mathbb{P}(Q)/\Gamma]$ を取り除いた開集合を U_0 とおく．U_0 は商特異点 $Q/\Gamma=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[Q]^\Gamma$ のスタック的な特異点解消 $f\colon U_0\to Q/\Gamma$ を与え，$X_0=U_0\sqcup\ell_\infty$ はそのコンパクト化である．

一方，極小特異点解消 $g\colon U_1\to Q/\Gamma=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[Q]^\Gamma$ が Γ-ヒルベルトスキーム $U_1=\Gamma\text{-}\mathrm{Hilb}(Q)$ により得られる．

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[dr, "f"'] & & U_1 \arrow[dl, "g"] \\ & Q/\Gamma \ni O & \end{tikzcd}$$

U_1 のコンパクト化 X_1 を次のように構成する．アフィン平面 $Q=\mathbb{C}^2$ への Γ-作用は原点 $O=\{(0,0)\}\subset Q$ 以外では自由なので，同型

$$U_0\setminus f^{-1}(O)\cong U_1\setminus g^{-1}(O)$$

を得る．この同型により，U_1 と $X_0\setminus f^{-1}(O)$ とを貼り合わせることにより

$$X_1=U_1\cup(X_0\setminus f^{-1}(O))=U_1\sqcup\ell_\infty$$

を得る.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[dr] & & X_1 \supset C = g^{-1}(O) \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^2/\Gamma & \end{tikzcd}$$

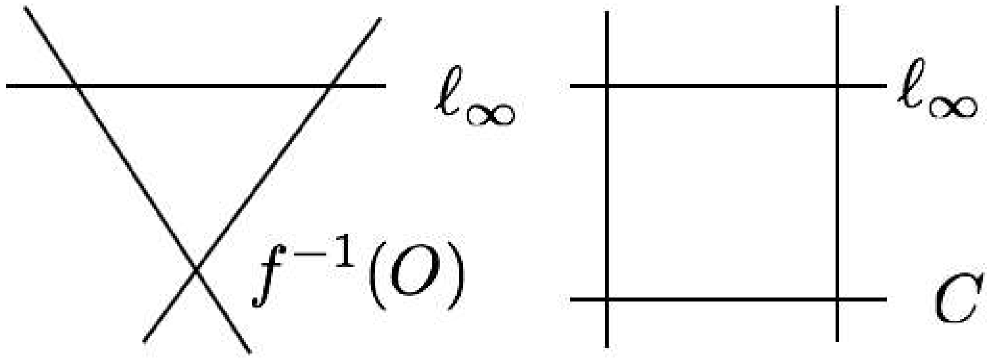

図 1　X_0 と X_1

定義 1.1. X_κ（$\kappa = 0, 1$）上の枠付き連接層とは組 (E, Φ) であり, E は X_κ 上のねじれを持たない連接層, $\Phi\colon E|_{\ell_\infty} \cong \mathcal{O}_{\ell_\infty} \otimes W$ は連接層の同型を表す. ここで, W は有限次元 Γ-表現である. このような同型 Φ を W 枠とよぶ.

以下では, $\Gamma = \{\mathrm{id}_Q\}$, または $\{\pm \mathrm{id}_Q\} \subset \mathrm{SL}(Q)$ の場合を考える. この時, Γ-表現は, ただの有限次元ベクトル空間 $W = \mathbb{C}^r$, または $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-次数付きベクトル空間 $W = W_0 \oplus W_1$ により与えられる. この状況において, X_κ 上の枠付き連接層のモジュライから定まるネクラソフ分配関数と呼ばれる母関数について比較する.

動機としては, 中島-吉岡による blow-up formula がある. これは, $\Gamma = 1$ のとき, 従って $X = Y = \mathbb{P}^2$ の状況で, $\mathbb{P}^2$ とその 1 点 blow-up $\hat{\mathbb{P}}^2$ 上の枠付き連接層のモジュライを考え, その上の積分の比較により得られるものである.

2　主結果

X_1 上の Chow 環 $A^*(X_1)$ に対して, 元 $c = (w_0, w_1, kC, -nP) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \oplus A^1(X_1) \oplus A^2(X_1)$ を一つ固定する. ここで, P は U_1 上の点とする. また, Γ-Hilbert scheme の普遍部分スキームにより誘導される McKay 導来同値 $F\colon D(X_0) \cong D(X_1)$ を考える. この時, 枠付き連接層のモジュライスキーム

$$M_1(c) = \{(E, \Phi) \mid (\dim W_0, \dim W_1, c_1(E), \mathrm{ch}_2(E)) = c\}$$
$$M_0(c) = \{(E, \Phi) \mid (\dim W_0, \dim W_1, c_1(E), \mathrm{ch}_2(E)) = c\}$$

が得られる. ここで, Φ は固定した W に関する枠 $\Phi\colon E|_{\ell_\infty} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes W$ としている.

ただし, $M_\kappa(c)$ は滑らかだが, コンパクトではないため, モジュライ空間 $M_\kappa(c)$ 上の積分は, 代数的トーラス $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^r$ の作用による局所化の方法によって定義さ

れる.

$$T^2 = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(Q) \right\}, T^r = \left\{ \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e_r \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(W) \right\},$$

ここで, $M_\kappa(c)$ への $\mathbb{T}$ 作用は以下のように定まる. $T^2 \subset \mathrm{GL}(Q)$ は $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus Q)$ への $\mathrm{GL}(Q)$ 作用による枠付き連接層の引き戻しにより, $T^r \subset \mathrm{GL}(W)$ は同型 $\mathcal{O}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \otimes W \cong \mathcal{O}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \otimes W$ により枠を変えることにより, $M_\kappa(c)$ へ作用する.

固定点集合 $M_\kappa(c)^{\mathbb{T}}$ は有限であることに注意すると, $M = M_\kappa(c)$ 上のコホモロジー類 $\psi \in A^*_{\mathbb{T}}(M)$ の積分が

$$\int_M \psi = \sum_{p \in M^{\mathbb{T}}} \frac{\psi|_p}{e(T_p M)} \in \mathrm{Frac}(A^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})) = \mathbb{Q}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{a})$$

と定義される. ここで,

$$(t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2, (e_1, \ldots, e_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$$

の各成分を重みにもつベクトル空間を一点 pt の上の $\tilde{T}$-同変直線束とみて,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (c_1(t_1), c_1(t_2)), \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r) = (c_1(e_1), \ldots, c_1(e_r))$$

とおく. このとき, 有理関数体 $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})$ は $\tilde{T}$-同変 Chow ring $A^*_{\tilde{T}}(\mathrm{pt})$ の商体とみなされる.

次に, 積分するコホモロジー類を定義するために, モジュライ空間上のベクトル束を導入する. $\mathcal{E}$ を $X_\kappa \times M_\kappa(c)$ 上の普遍連接層とし,

$$\mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^1 p_* \mathcal{E}(-\ell_\infty)$$
$$\mathcal{V}_1 = \mathbb{R}^1 p_* \mathcal{E}(-F)$$

とおく. ここで, $p \colon X_\kappa \times M_\kappa(c) \to M_\kappa(c)$ を射影とする. また, $F = \{z_1 = 0\} \subset X_0$ とし, X_1 上の固有変換も同じ記号 F で表す. 別のベクトル束 $\mathcal{W}_0 = \mathcal{O}_M \otimes W_0, \mathcal{W}_1 = \mathcal{O}_M \otimes W_1$ は, $\mathbb{T}$-同変束として非自明になる.

このとき, 普遍連接層 $\mathcal{E}$ の第二 Chern 指標 $\mathrm{ch}_2(\mathcal{E})$ と例外曲線 $C = g^{-1}(O)$ とのスラント積 $\mu(C) = c_2(\mathcal{E})/[C]$ を考える. これは, $p_*\left(\mathrm{ch}_2(\mathcal{E}) \cap [C \times M_Y(c)]\right)$ のポアンカレ双対として定められ, $A^*_{\mathbb{T}}(M_Y(c))$ の元となる.

補題 2.1. *$M_1(c)$ に関して, 次の等式が成り立つ.*

$$\mathrm{ch}_2(\mathcal{E})/[C] = 2c_1(\mathcal{V}_0) - 2c_1(\mathcal{V}_1) + c_1(\mathcal{W}_1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(2k + w_1/2)$$

ここで, $w_0 = \dim W_0, w_1 = \dim W_1$ とおいた.

そこで, $A^*_{\mathbb{T}}(M_\kappa(c))$ ($\kappa = 0, 1$) において,

$$\psi_+ = 2c_1(\mathcal{V}_0) - 2c_1(\mathcal{V}_1) + c_1(\mathcal{W}_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(2k + w_1/2)$$
$$\psi_- = -\mathrm{ch}_2(\mathcal{E})/[C] + 2k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

とおく.

主定理 2.2. $c_\pm = (w_0, w_1, \pm k[C], -nP) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \oplus A^1(X_1) \oplus A^2(X_2)$ に対して,

$$\int_{M_1(c_+)} (\mathrm{ch}_2(\mathcal{E})/[C])^d = \begin{cases} \int_{M_0(c_+)} (\psi_+)^d & \textit{if } d \leq 2-4k \\ \int_{M_0(c_-)} (\psi_-)^d & \textit{if } d \leq 2r+2-4k \end{cases}$$

ここで, $r = w_0 + w_1$ である.

0 以上の整数 d に対し Nekrasov 分配関数

$$\hat{Z}^d(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{a}, q) = \sum_n q^{n+w_1/4} \int_{M_1(c)} (\psi_+)^d \in \mathbb{Q}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})[[q]]$$

が定義される. ここで, $c = (w_0, w_1, k[C], -nP)$ のうち w_0, w_1, k を固定し, n を動かした和をとる.

このとき, 主定理から以下の等式が成り立つ.

$$\hat{Z}^d(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{a}, q) = \begin{cases} \sum_n q^{n+w_1/4} \int_{M_0(c_+)} (\psi_+)^d & \text{if } d \leq 2-4k \\ \sum_n q^{n+w_1/4} \int_{M_0(c_-)} (\psi_-)^d & \text{if } d \leq 2r+2-4k. \end{cases}$$

この公式は中島-吉岡の示した blow-up formula [NY] の類似である.

3 証明のあらまし

証明には, ADHM データと呼ばれる行列の組によるモジュライ $M_\kappa(c)$ の記述を用いる.

Theorem 3.1. （中島）$\boldsymbol{\zeta}$ 安定 *ADHM data* のモジュライ $M^{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ からの同型がある.

$$M^{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \cong \begin{cases} M_0(c) \textit{ for } \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^0 \\ M_1(c) \textit{ for } \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^1 \end{cases}$$

ここで, $\boldsymbol{w} = (\dim W_0, \dim W_1), \boldsymbol{v} = (\mathrm{rank}\mathcal{V}_0, \mathrm{rank}\mathcal{V}_1)$ とし, $\boldsymbol{\zeta}^\kappa$（ $\kappa = 0, 1$ ）は以下の図のようにとった.

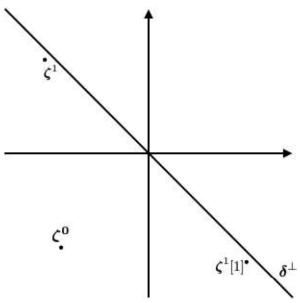

図 2　ζ^0, ζ^1 の取り方.

この記述に望月拓郎氏の開発した壁越え公式 [M] を適用することで主定理が得られる.

今後の課題としては, 以下が挙げられる.

- （物質場付きの理論）$e(\mathcal{F}_r(\mathcal{V}_0)) \cdot (\mathrm{ch}_2(\mathcal{E})/[C])^d$ への拡張（[O] では $e(\mathcal{F}_r(\mathcal{V}_0))$ の積分を扱い Ito-Maruyoshi-Okuda の予想 [IMO] を証明した.）
- K 理論への拡張
- Painlevé τ 関数の関数等式への応用

参考文献

[M] T. Mochizuki, *Donaldson Type Invariants for Algebraic Surfaces: Transition of Moduli Stacks*, Lecture Notes in Math. 1972, Springer, Berlin, 2009.

[IMO] Y. Ito, K. Maruyoshi, T. Okuda, *Scheme dependence of instanton counting in ALE spaces*, J. High Energy Phys. 2013, no. 5, 045, front matter+16 pp.

[NY] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. Math. 162 (2005), no. 2, 313–355.

[O] R. Ohkawa, *Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda*, arXiv:1804.00771, to appear in Moscow Mathematical Journal.

R. Ohkawa

Waseda University, 3–4–1 Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169–8555, Japan

ohkawa.ryo@aoni.waseda.jp