道多元環に付随する Grothendieck 群の部屋構造[*1]

京都大学数理解析研究所　　淺井　聡太

Sota Asai

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University

本稿は 2019 年度 RIMS 共同研究（公開型）「表現論とその組合せ論的側面」において、私が行った講演「道多元環に付随する Grothendieck 群の部屋構造」の内容をまとめたものである。内容の多くは [As] に基づく。

本稿では K を体とし、A を K 上の有限次元多元環とする。$\mathsf{proj}\,A$ を有限生成射影的右 A 加群の圏とし、$P_1, P_2, \ldots, P_n$ をその直既約対象の同型類全体とおく。また、$\mathsf{mod}\,A$ を有限生成右 A 加群の圏とし、$S_1, S_2, \ldots, S_n$ を単純 A 加群の同型類全体とする。ここで添え字は、全射 $P_i \to S_i$ が存在するように取る。

特に断りのない限り、部分圏は充満部分圏であり、同型について閉じたものとする。

1　Euler 形式

$\mathcal{C}$ を三角圏または完全圏とするとき、その Grothendieck 群を $K_0(\mathcal{C})$ と記し、さらに実 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を $K_0(\mathcal{C})_{\mathbb{R}}$ で表す。

このとき、自然な同型 $K_0(\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)) \cong K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が存在し、$P_1, P_2, \ldots, P_n$ は $\mathbb{Z}$ 基底を与える。同様に、自然な同型 $K_0(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}\,A)) \cong K_0(\mathsf{mod}\,A)$ が存在し、$S_1, S_2, \ldots, S_n$ は $\mathbb{Z}$ 基底を与える。当然ながら、これらはそれぞれ、実 Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ と $K_0(\mathsf{mod}\,A)_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}$ 基底にもなる。

実 Grothendieck 群上の Euler 形式は、次のように与えられる。

定義 1.1　$\mathbb{R}$ 双線形形式 Euler 形式 (Euler form) $\langle ?, ! \rangle \colon K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}} \times K_0(\mathsf{mod}\,A)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ を、$T \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$, $X \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}\,A)$ に対し、

$$\langle T, X \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim_K \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}\,A)}(T, X[k])$$

が成立するように定める。

すると、$P_1, P_2, \ldots, P_n$ と $S_1, S_2, \ldots, S_n$ は、以下の意味で Euler 形式に関する双対基底となる。

[*1] 本研究は科研費 16J02249 および 19K14500 の助成を受けたものである。

補題 1.2　任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し、

$$\langle P_i, S_j \rangle = \begin{cases} \dim_K \mathsf{End}_A(S_j) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。

2　安定条件と TF 同値類

前章の Euler 形式を用いて、$\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 線形形式 $\langle \theta, ? \rangle \colon K_0(\mathsf{mod}\, A)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ とみなす。これを用いた線形不等式により、加群の安定条件が以下のように定まる。

定義 2.1　[Ki, Definition 1.1] $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ とする。

(1)　$M \in \mathsf{mod}\, A$ が θ **半安定** (θ-semistable) であるとは、$\theta(M) = 0$ であり、かつ任意の商加群 N に対し $\theta(N) \geq 0$ であることをいう。

(2)　$M \in \mathsf{mod}\, A$ が θ **安定** (θ-stable) であるとは、$\theta(M) = 0$ であり、かつ任意の真商加群 $N \neq 0$ に対し $\theta(N) > 0$ であることをいう。

(3)　$\mathcal{W}_\theta \subset \mathsf{mod}\, A$ を θ 半安定な加群全体からなる部分圏とし、これを θ **半安定部分圏** (θ-semistable subcategory) と呼ぶ。

$\mathcal{W}_\theta$ は $\mathsf{mod}\, A$ のワイド部分圏であり、したがって部分アーベル圏である。その単純対象とは、θ 安定な加群たちにほかならず、これらの全体は半煉瓦となる。ここで、$S \in \mathsf{mod}\, A$ が**煉瓦** (brick) であるとは、自己準同型環 $\mathsf{End}_A(S)$ が斜体であることを表し、Hom に関して互いに直交する煉瓦の同型類の集合のことを**半煉瓦** (semibrick) という。

King の安定条件を用いて、与えられた加群を半安定にするような θ がなす、$K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ の部分集合を考えることができる。

定義 2.2　[B, BST] $M \in \mathsf{mod}\, A \setminus \{0\}$ に対し、$K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ の部分集合 Θ_M を、

$$\Theta_M := \{\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}} \mid M \in \mathcal{W}_\theta\}$$

と定め、これを加群 M に対する**壁** (wall) という。

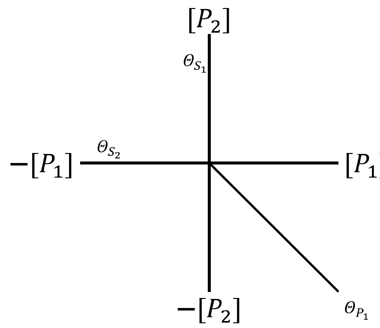
Θ_M は安定条件の定義から $K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ の有理多面錐であり、その次元を $\dim \Theta_M$ で表す。以降、これらの壁による $K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造を考えていく。

部屋構造を考えるに当たっては、各加群に付随する壁を一つ一つ考えるよりも、むしろそれらの和集合に着目することが重要である。壁たちの和集合を求めるには、煉瓦に対応する壁のみを考えれば十分であることが、次の補題からわかる。

補題 2.3　各 $M \in \operatorname{mod} A \setminus \{0\}$ に対し、ある煉瓦 S が、$\Theta_S \supset \Theta_M$ かつ $\dim \Theta_S = n-1$ を満たす。

なお、任意の煉瓦 S に対し、壁 Θ_S の次元が $n-1$ であるとは限らない。また、M が煉瓦でなくとも、$\dim \Theta_M = n-1$ となることがある。

例 2.4　A を道多元環 $K(1 \to 2)$ とすると、A の煉瓦は S_2, P_1, S_1 であり、$K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造は、次の図のようになる。



この部屋構造について、より詳しく調べるため、以下の部分圏を用いる。

定義 2.5　[BKT, Subsection 3.1] $\theta \in K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ に対し、

$$\overline{\mathcal{T}}_\theta := \{M \in \operatorname{mod} A \mid M \text{ の任意の商加群 } N \text{ に対し } \theta(N) \geq 0\},$$
$$\overline{\mathcal{F}}_\theta := \{M \in \operatorname{mod} A \mid M \text{ の任意の部分加群 } L \text{ に対し } \theta(L) \leq 0\}$$

と定義する。

$\overline{\mathcal{T}}_\theta$ は、商と拡大について閉じていることから、$\operatorname{mod} A$ のねじれ類である。同様に $\overline{\mathcal{F}}_\theta$ は、$\operatorname{mod} A$ のねじれ自由類である。これらはそれぞれ、$\mathcal{F}_\theta \subset \overline{\mathcal{F}}_\theta$ を満たすねじれ自由類と、$\mathcal{T}_\theta \subset \overline{\mathcal{T}}_\theta$ を満たすねじれ類により、ねじれ対 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$, $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$ に拡張でき、$\mathcal{T}_\theta, \mathcal{F}_\theta$ についても、商加群や部分加群を用いて記述することが可能である [BKT, Proposition 3.1]。

また、定義から $\overline{\mathcal{T}}_\theta \cap \overline{\mathcal{F}}_\theta = \mathcal{W}_\theta$ であることがわかり、$\mathcal{W}_\theta = \{0\}$ は $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta) = (\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$ と同値である。

これらを用いて、私は $K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ 上の同値関係を、以下のように導入した。

定義 2.6　[As, Definition 2.12] $\theta, \theta' \in K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ に対し、これらが TF 同値 (TF equivalent) であるとは、$\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_{\theta'}$ かつ $\overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_{\theta'}$ であることと定める。$[\theta]$ で θ が属す TF 同値類を表す。

実は部屋構造を用いて、TF 同値を特徴付けることが可能である。

命題 2.7　[As, Theorem 2.16] 異なる $\theta, \theta' \in K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ に対し、次の条件は同値である。

(a) θ と θ' は TF 同値である。

(b) 線分 $[\theta, \theta']$ 上 $\mathcal{W}_\theta$ は一定である。

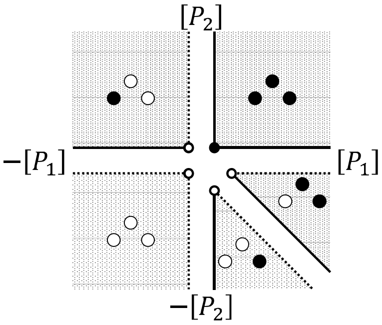
(c) いかなる煉瓦 S についても、線分 $[\theta, \theta']$ は壁 Θ_S と一点で交わらない。

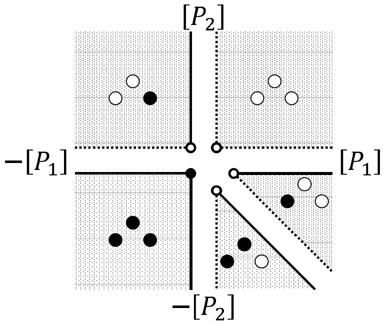
例 2.8　A が道多元環 $K(1 \to 2)$ であるとき、直既約加群は同型を除いて S_2, P_1, S_1 の 3 つであり、Auslander–Reiten 箙は、

$$\begin{array}{ccc} & P_1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ S_2 & & S_1 \end{array}$$

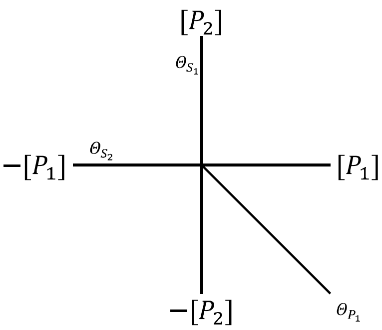
となる。そこで以下では、各直既約加群が部分圏 $\mathcal{C} \subset \mathsf{mod}\, A$ に属すか否かを、${}_*{}^*{}_*$ という図式の $*$ を、$\bullet$（属す）または $\circ$（属さない）に置き換えることで、$\mathcal{C}$ を表す。

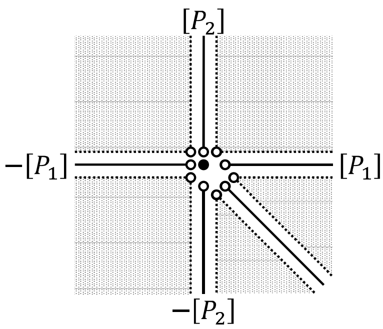
まず $\overline{\mathcal{T}}_\theta$ と $\overline{\mathcal{F}}_\theta$ の分布は、次の図のようになる。





一方、S_2, P_1, S_1 に対応する壁は、下記左図の通りとなり、$K_0(\mathsf{proj}\, A)$ の TF 同値類は右図のようになる。

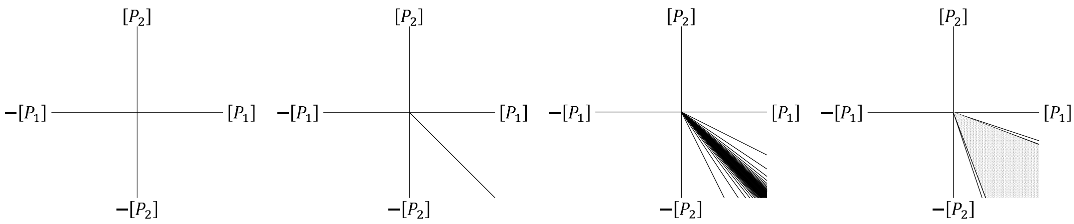




例 2.9　A が m-Kronecker 箙の道多元環であるとする。つまり、

$$A := K\left(1 \;\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \vdots\\ \longrightarrow\end{array}\; 2\right) \quad （矢印は\ m\ 本）$$

とする。$m=0,1,2,3$ の各々について、部屋構造は次のようになる。



ここで $m=3$ の網掛け部分については、稠密に壁が存在している。詳細は [As, Examples 2.19, 5.4] を参照されたい。

3　2 項準傾複体の錐

ここからは TF 同値類を具体的に構成する方法の一つとして、ホモトピー圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の 2 項準傾複体を紹介する。これは以下のように定義される。なお、基本的 (basic) という用語は、直和因子の重複がないことを意味し、2 項複体 (2-term complex) とは -1 番目と 0 番目の項以外が消滅している複体を指す。

定義 3.1　$U=(U^{-1}\to U^0)$ を $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の 2 項複体とする。

(1) U が 2 項前準傾複体 (2-term presilting complex) であるとは、$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)}(U,U[1])=0$ であることをいう。2-presilt A で $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の基本的な 2 項前準傾複体の同型類の全体を表す。

(2) U が 2 項準傾複体 (2-term silting complex) であるとは、U が 2 項前準傾複体であり、さらに U を含む $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の部分三角圏で、直和について閉じているものは、$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ 自身のみであることと定める。2-silt A で $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の基本的な 2 項準傾複体の同型類の全体を表す。

各 $U\in$ 2-presilt A に対して、$U\cong\bigoplus_{i=1}^m U_i$ と直既約分解すると、U は基本的であるから、$i\neq j$ である限り $U_i\ncong U_j$ となる。このとき $|U|=m$ とおく。すなわち $|U|$ は直既約因子の個数である。

補題 3.2　$U\in$ 2-presilt A とする。

(1) [Ai, Proposition 2.16] U はある $T\in$ 2-silt A の直和因子である。

(2) [AIR, Proposition 3.3] $U\in$ 2-silt A であることは $|U|=n$ と同値である。

(3) [AI, Theorem 2.27, Corollary 2.28] $[U_1],\dots,[U_m]\in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ は線形独立であり、さらに $U\in$ 2-silt A ならば、これらは $K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の $\mathbb{Z}$ 基底である。

そこで $U \in \mathsf{2\text{-}presilt}\,A$ に対し、$K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ 内の錐 $C(U), C^+(U)$ を、

$$C(U) := \{a_1[U_1] + \cdots + a_m[U_m] \mid a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}\},$$
$$C^+(U) := \{a_1[U_1] + \cdots + a_m[U_m] \mid a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

と定める。補題 3.2 (3) から、これらは m 次元の錐であることがわかる。

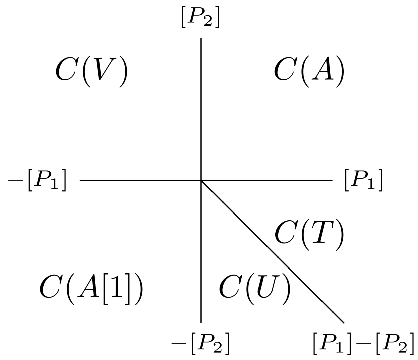
錐同士の交わりについては、[DIJ, Theorem 6.5] から従う、以下の事実が重要である。

命題 3.3 $U, U', U'' \in \mathsf{2\text{-}presilt}\,A$ が $\mathsf{add}\,U \cap \mathsf{add}\,U' = \mathsf{add}\,U''$ を満たすとき、$C(U) \cap C(U') = C(U'')$ となる。

特に $T, T' \in \mathsf{2\text{-}silt}\,A$ であるとき、$C^+(T) \cap C^+(T') = \emptyset$ となる。すなわち 2 項準傾複体に対する錐同士が内部で交わることはない。

例 3.4 $A = K(1 \to 2)$ に対し、$\mathsf{2\text{-}silt}\,A$ の元は下記左の $A, T, U, V, A[1]$ の全 5 個であり、これらに対応する錐を表したものが右図である。

$$\begin{array}{rcccc}
A & = & P_1 & \oplus & P_2 \\
T & = & P_1 & \oplus & (P_2 \to P_1) \\
U & = & P_2[1] & \oplus & (P_2 \to P_1) \\
V & = & P_1[1] & \oplus & P_2 \\
A[1] & = & P_1[1] & \oplus & P_2[1]
\end{array}$$



また、各 2 項前準傾複体からねじれ類を以下のように構成できる。ここで ν は中山関手 $\nu\colon \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A) \to \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{inj}\,A)$ を表す。

定義 3.5 $U \in \mathsf{2\text{-}presilt}\,A$ に対し、

$$\overline{\mathcal{T}}_U := \{M \in \mathsf{mod}\,A \mid \mathsf{Hom}_A(M, H^{-1}(\nu U)) = 0\},$$
$$\overline{\mathcal{F}}_U := \{M \in \mathsf{mod}\,A \mid \mathsf{Hom}_A(H^0(U), M) = 0\}$$

2 項前準傾複体が定めるねじれ類は、次のような顕著な性質を満たす。

定理 3.6 以下の事実が成立する。

(1) [AS, Theorem 5.10] 各 $U \in \mathsf{2\text{-}presilt}\,A$ に対し、$\overline{\mathcal{T}}_U$ は $\mathsf{mod}\,A$ の関手的有限なねじれ類であり、$\overline{\mathcal{F}}_U$ は $\mathsf{mod}\,A$ の関手的有限なねじれ自由類である。

(2) [AIR, Theorems 2.7, 3.2] $\mathsf{mod}\,A$ の関手的有限なねじれ類全体からなる集合を $\mathsf{f\text{-}tors}\,A$ で表すとき、全単射 $\mathsf{2\text{-}silt}\,A \to \mathsf{f\text{-}tors}\,A$ が $T \mapsto \overline{\mathcal{T}}_T$ で与えられる。同様に、

$\mathsf{mod}\,A$ の関手的有限なねじれ自由類全体からなる集合を $\mathsf{f\text{-}torf}\,A$ で表すとき、全単射 $\mathsf{2\text{-}silt}\,A \to \mathsf{f\text{-}torf}\,A$ が $T \mapsto \overline{\mathcal{F}}_T$ で与えられる。

以上の準備のもとで、私は以下の結果を証明した。

定理 3.7　各 $U \in \mathsf{2\text{-}presilt}\,A$ に対し、錐 $C^+(U)$ は TF 同値類であり、任意の $\theta \in C^+(U)$ は $\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_U, \overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_U$ を満たす。

上記の定理のうち、後半部分については、すでに [Y, Proposition 3.3] で示されている。一方 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)_\mathbb{R}$ が $\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_U, \overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_U$ を満たすとき、Koenig–Yang 対応 [KY, BY] において U に対応する $\mathsf{D}^\mathrm{b}(\mathsf{mod}\,A)$ の中間 t 構造や 2 項単純系 (2-term simple-minded collection) との関係を調べることで、私は $\theta \in C^+(U)$ であることを導いた。

特に $T \in \mathsf{2\text{-}silt}\,A$ であるとき、$C^+(T)$ は内点を持つ TF 同値類となることがわかる。そこで、「これ以外に内点を持つ TF 同値類が存在するかどうか」という問いを考える。

内点を持つ TF 同値類と類似していると思われる概念として、$K_0(\mathsf{proj}\,A)_\mathbb{R}$ の部屋構造の「部屋」がある。ここで正確には、Wall をすべての壁の和集合 $\bigcup_{M \in \mathsf{mod}\,A \setminus \{0\}} \Theta_M$ とするとき、その閉包の補集合 $K_0(\mathsf{proj}\,A)_\mathbb{R} \setminus \overline{\mathsf{Wall}}$ の連結成分のことを、**部屋 (chamber)** と呼んでいる。[BST, Corollary 3.29] においては、各 $T \in \mathsf{2\text{-}silt}\,A$ に対し、$C^+(T)$ が $K_0(\mathsf{proj}\,A)_\mathbb{R}$ の部屋となっており、また $T \mapsto C^+(T)$ は単射であることが示されている。

これに関して、私は次の定理を証明した。ここで、2 項準傾複体に付随する錐の和集合を $\mathsf{Cone} := \bigcup_{T \in \mathsf{2\text{-}silt}\,A} C^+(T)$ とおく。

定理 3.8　[As, Theorem 3.17] $\mathsf{Cone} = K_0(\mathsf{proj}\,A)_\mathbb{R} \setminus \overline{\mathsf{Wall}}$ である。

この定理の証明は、通常の Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{proj}\,A)$ 内の等式 $\mathsf{Cone} \cap K_0(\mathsf{proj}\,A) = K_0(\mathsf{proj}\,A) \setminus \mathsf{Wall}$ を、[B, Lemma 7.1] と同種の議論を用いて示すことで、行った。

上の状況で、$K_0(\mathsf{proj}\,A)_\mathbb{R}$ の各部屋は、内点を持つある TF 同値類に含まれ、さらにこの対応は一対一であることが、簡単な位相的議論から従う。$\mathsf{Cone} = \bigcup_{T \in \mathsf{2\text{-}silt}\,A} C^+(T)$ は、明らかに連結成分への分解であるから、上の定理から、任意の部屋はある $T \in \mathsf{2\text{-}silt}\,A$ を用いて $C^+(T)$ の形に書け、特に TF 同値類であることが分かる。ゆえに、$K_0(\mathsf{proj}\,A)_\mathbb{R}$ の部屋とは、内点を持つ TF 同値類に他ならない。

4　表現空間と道多元環

本章では、体 K は代数閉体であると仮定する。通常の Grothendieck 群の各元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ に対し、表現空間と呼ばれる代数多様体を考え、これと TF 同値類との関連について、道多元環の場合を中心に、得られた結果を述べる。

定義 4.1　各 $\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i[P_i] \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ $(a_i \in \mathbb{Z})$ に対し、

$$P_1(\theta) := \bigoplus_{a_i<0} P_i^{\oplus |a_i|}, \qquad P_0(\theta) := \bigoplus_{a_i>0} P_i^{\oplus |a_i|}$$

と定め、θ が定める**表現空間** (presentation space) を、

$$\mathsf{PHom}(\theta) := \mathsf{Hom}_A(P_1(\theta), P_0(\theta))$$

とおく。各 $f \in \mathsf{PHom}(\theta)$ に対して、2 項複体 $P_f \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ を、

$$P_f := (P_1(\theta) \xrightarrow{f} P_0(\theta))$$

と定める。

つまり、各 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ の成分に応じて、2 項複体の項 $P_1(\theta), P_0(\theta)$ を固定し、その間の射のみを動かして得られる 2 項複体の全体が、表現空間である。これは明らかに K 線形空間であるから、既約な代数多様体である。以下、$\mathsf{PHom}(\theta)$ の Zariski 位相における稠密な開集合上で条件が成立することを、**一般の** (general) という言葉で表す。

2 項準傾複体 U に対し、点 $\theta = [U] \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ については、一般の $f \in \mathsf{PHom}(\theta)$ に対し、$P_f \cong U$ となることが知られている（[DK, Subsection 2.1] などを参照)。2 項準傾複体の錐外の点 θ についても、$f \in \mathsf{PHom}(\theta)$ に付随する 2 項複体 P_f が、$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ でどのように直既約分解されるかという問いが考えられ、この際、[DF, P] による次の概念と結果は、極めて重要である。

定義 4.2　[DF, Definition 4.3] $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に対し、直和分解の表記 $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \cdots \oplus \theta_m$ を、一般の $f \in \mathsf{PHom}(\theta)$ が、直和分解

$$P_f = P_{f_1} \oplus P_{f_2} \oplus \cdots \oplus P_{f_m} \quad (f_i \in \mathsf{PHom}(\theta_i))$$

を持つことと定義する。また $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \cdots \oplus \theta_m$ が**標準分解** (canonical decomposition) であるとは、任意の i について、一般の $f_i \in \mathsf{PHom}(\theta_i)$ が直既約であることをいう。

定理 4.3　[P, Theorem 2.7] 任意の $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に対し、並び替えを除いて、ただ一つ標準分解が存在する。

Grothendieck 群の元の直和分解と数値的ねじれ類などの関連について、以下の性質を Laurent Demonet 氏から教えていただいた。

補題 4.4　[D] $\theta, \theta_1, \theta_2 \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ が $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$ を満たすとき、

$$\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_{\theta_1} \cap \overline{\mathcal{T}}_{\theta_2}, \qquad \overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_{\theta_1} \cap \overline{\mathcal{F}}_{\theta_2}, \qquad \mathcal{W}_\theta = \mathcal{W}_{\theta_1} \cap \mathcal{W}_{\theta_2}$$

となる。

特に $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \cdots \oplus \theta_m$ が標準分解であるとき、$\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\}$ は、命題 2.7 から、ある TF 同値類に含まれることがわかる。一般には $\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\}$ 自身が TF 同値類かどうかは未解決だが、$\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が $U \in \text{2-}\mathsf{presilt}\,A$ の錐 $C^+(U)$ に属す場合は、$\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\} = C^+(U)$ となり、定理 3.7 で見たように、これは TF 同値類である。

上記とは別に、A が非輪状な箙 Q の道多元環 KQ である場合に、任意の元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の標準分解が TF 同値類を与えることを、私は示した。

命題 4.5 $A = KQ$ を、非輪状な箙 Q に付随する道多元環とする。もし $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の標準分解が、

$$\theta = \theta_1^{s_1} \oplus \theta_2^{s_2} \oplus \cdots \oplus \theta_m^{s_m} \qquad (i \neq j \Rightarrow s_i \ncong s_j)$$

であれば、$\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\}$ は $K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ での TF 同値類である。

証明の鍵となるのは、$\mathbb{R}$ 部分線形空間 $\langle \underline{\mathsf{dim}}\,M \mid M \in \mathcal{W}_\theta \rangle$ の次元が $n - m$ であることであり、これは道多元環の場合における $K_0(\mathsf{mod}\,A)$ の元の標準分解 [Ka] （先の [DF] はこれの $K_0(\mathsf{proj}\,A)$ における拡張である）に関する [DW] の結果から従う。

最後に A が道多元環である場合に、部屋構造を特定するアルゴリズムについて述べる。以下、A を非輪状な箙 Q の道多元環 KQ とし、$\mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})$ を次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ を持つ箙 Q の表現全体とする。$\mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})$ は既約な代数多様体であり、次元ベクトルが $\boldsymbol{d}$ であるような A 加群全体と同一視できる。

$K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の部屋構造の壁の和集合を求めるため、次のように定義する。

定義 4.6 各次元ベクトル $\boldsymbol{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ に対し、

$$\Theta_{\boldsymbol{d}} := \bigcup_{M \in \mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})} \Theta_M \subset K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$$

とおく。

[S] の結果から、実は $\Theta_{\boldsymbol{d}}$ は、1 つの加群の壁として実現されることが導かれる。

補題 4.7 各次元ベクトル $\boldsymbol{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ に対し、一般の $M \in \mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})$ は $\Theta_{\boldsymbol{d}} = \Theta_M$ を満たす。特に $\Theta_{\boldsymbol{d}}$ 自身が $K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ 内の有理多面錐である。

私はこの $\Theta_{\boldsymbol{d}}$ たちに関する漸化式を得た。

定理 4.8 [As, Proposition 5.6] $A = KQ$ であり、$\boldsymbol{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ は非零成分を 3 個以上持つ次元ベクトルとする。このとき $\Theta_{\boldsymbol{d}}$ は、すべての $\Theta_{\boldsymbol{c}} \cap \Theta_{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}}$ $(0 < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{d})$ を含む最小の有理多面錐である。

$\boldsymbol{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ の非零成分が 2 個以下の場合には、容易に $\Theta_{\boldsymbol{d}}$ を決定できるため、上の定理

と合わせて、帰納的に部屋構造が決まる。

参考文献

[AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory*, Compos. Math. **150** (2014), no. 3, 415–452.

[Ai] T. Aihara, *Tilting-connected symmetric algebras*, Algebr. Represent. Theor. **16** (2013), Issue 3 , 873–894.

[AI] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. (2) **85** (2012), 633–668.

[As] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, arXiv:1905.02180v1.

[AS] M. Auslander, S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, J. Algebra **69** (1981), no. 2, 426–454.

[BKT] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **120** (2014), 113–205.

[B] T. Bridgeland, *Scattering diagrams, Hall algebras and stability conditions*, Algebr. Geom. **4** (2017), no. 5, 523–561.

[BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and Chamber Structure for finite-dimensional Algebras*, Adv. Math. **354** (2019), 106746.

[BY] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs*, Advances in representation theory of algebras, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.

[DK] R. Dehy, B. Keller, *On the combinatorics of rigid objects in 2-Calabi–Yau categories*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. 11, `https://doi.org/10.1093/imrn/rnn029`.

[D] L. Demonet, private communication.

[DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, *τ-tilting finite algebras, bricks, and g-vectors*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2019, Issue 3, 852–892.

[DF] H. Derksen, J. Fei, *General presentations of algebras*, Adv. Math. **278** (2015), 210–237.

[DW] H. Derksen, J. Weyman, *The combinatorics of quiver representations*, Annales de l'Institut Fourier, **61** (2011), no. 3, 1061–1131.

[Ka] V. G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math. **56** (1980), 57–92.

[Ki] A. D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quart. J.

Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994), no. 180, 515–530.

[KY] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for finite-dimensional algebras*, Doc. Math. **19** (2014), 403–438.

[P] P.-G. Plamondon, *Generic bases for cluster algebras from the cluster category*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2013, no. 10, 2368–2420.

[S] A. Schofield, *General representations of quivers*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **65** (1992), Issue 1, 46–64.

[Y] T. Yurikusa, *Wide subcategories are semistable*, Doc. Math. **23** (2018), 35–47.