

# On the existence of a colored Khovanov bicomplex <sup>\*</sup>

東京大学・大学院数理科学研究科<sup>†</sup> 伊藤 昇

Noboru Ito

Graduate School of Mathematical Science

The University of Tokyo

2020年3月31日

## §1. Introduction

2000年のKhovanov [13]によるジョーンズ多項式の categorification (圏論化) から20年ほど経ち, 最初のKhovanov homologyについては, その背景の広がり, およびそれらの応用範囲は随分と広がってきたように思われる. しかしながら, ジョーンズ多項式の最も基本的な拡張の一つである「自然表現からなる colored Jones 多項式の categorification」においては, 期待があるにも関わらず未解明な部分も多い (表1).

表1 colored Jones 多項式の categorifications

Categorifications	A colored Khovanov complex			
	object	coefficient	bicomplex	invariance
Khovanov (2005) [14]	knot (link)	$\mathbb{F} (\mathbb{F}_2)$	For $\mathbb{F}$ , ?	○
Beliakova-Wehrli (2008) [4]	link	$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$	unavailable	○
講演者 (2014) [9]	link	$\mathbb{Z}$	available	?

---

<sup>\*</sup> A colored Khovanov bicomplex [9] (拙著) に関する議論の紹介.

<sup>†</sup> 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

## §2 colored Jones 多項式の式

Khovanov の論文 [14] で最初に提案されている colored Jones 多項式の categorification は「colored Jones 多項式が Jones 多項式で書かれること (村上順 <sup>\*1</sup>[16])」を使ってなされている (表 1 の Khovanov の方法). 村上 [16] においてはかなりの一般化が考察されているが, ここでは実際に Khovanov [14] が使った場合, その中でも knot の場合を記載する.

まずよく知られているジョーンズ多項式のスケイン関係式は

$$t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}, \quad V_{\text{unknot}} = 1.$$

これに  $-t^{-1/2} = q$  の変換および,  $(q + q^{-1})$  を全体にかけて補正したジョーンズ多項式を  $J(L)$  とする:

$$q^2 J(L_+) - q^{-2} J(L_-) = (q^{-1} - q) J(L_0), \quad J(\text{unknot}) = q + q^{-1}. \quad (1)$$

Jones 多項式の表現を一般化すると,  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の既約表現による  $(n+1)$ -次元表現  $V_n$  に対応する colored Jones 多項式  $J_n(K)$  が考えられる. ここでは  $K$  は framed knot とし, その  $m$  重平行化  $K^m$  も blackboard framing による平行化とする.

**定理 1** (村上順 [16](1989), Kirby-Melvin [12] (1992))  $K$  を framed knot とする.

$$J_n(K) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} J(K^{n-2k}). \quad (2)$$

(2) の証明は  $(n+1)$ -次元表現  $V_n$  の分解

$$V_n \otimes V_1 \cong V_{n+1} \oplus V_{n-1} \quad (3)$$

を用いた漸化式によりなされる ([16] では (2) よりはるかに一般的な議論をしている).

## §3 Khovanov の問題提起

Khovanov [14] は, 村上の式 (2) に対して  $n$  が小さいところから帰納的に categorification をする様子が記載されている. 一般の定義は原論文 [14, Section 4] に譲り, ここでは Khovanov の姿勢に倣い, より問題の詳細を具体例を通じて俯瞰してみたい.

---

<sup>\*1</sup> 身近な先生の文献を引く際も, 私個人として恐縮ですが, 歴史上の文献の著者として敬称略で全体を統一します.

•  $n = 1$  の場合：このとき村上の式 (2) は  $J_2(K) = J(K^2) - 1$  となり、表現の分解は  $V_1 \otimes V_1 \cong V_2 \oplus V_0$  となる。

対応する Khovanov の方法 (表 1 の方法) は以下の通りである。式  $\mathcal{H}(K^2) \xrightarrow{u} \mathbb{Z}$  ( $= \mathcal{H}(\emptyset)$ ) が「 $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$  で annulus を貼る」という operation から誘導され、その複体での map  $u : \mathcal{C}(K^2) \xrightarrow{u} \mathbb{Z}$  の存在を保証する (ただし map  $u$  は up to sign で well-defined となるため、符号の ambiguity が残る)。このとき  $u$  の cone を  $\mathcal{C}_2(K)$  と定義すれば、短完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[-1] \rightarrow \mathcal{C}_2(K) \rightarrow \mathcal{C}(K^2) \rightarrow 0$$

ができて\*2

$$\rightarrow \mathcal{H}_2(K) \rightarrow \mathcal{H}(K^2) \xrightarrow{u} \mathbb{Z} \rightarrow$$

が得られる。

この定義における well-defined 性の考察のため、Khovanov は (係数に対して) さらに議論を進めている。上記の「annulus を貼る」という反対操作は cobordism としては存在するので、それに対応した map  $u'$  を考えると、 $uu'$  はトーラスを表すはずである。そして Khovanov 理論においてトーラスは  $+2$  または  $-2$  に対応\*3する。

cobordism と適切に対応した colored Jones 多項式の categorification を  $\mathbb{F}_2$  以外で考えるなら、それは 2 が可逆であるような係数環で行われて然るべきである (その意味で表 1 の Beliakova-Wehrli [4] が  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  で categorification を行なっているのは、この論点と適合している)。

実際、標数 2 ではない体  $k$  により  $u : \mathcal{C}(K^2) \otimes_{\mathbb{Z}} k \rightarrow k$ ,  $u' : k \rightarrow \mathcal{C}(K^2) \otimes_{\mathbb{Z}} k$  として上記の議論を考え直すと (そして考え直したものに  $k$  の添字をつけることにするなら)

$$\mathcal{H}(K^2)_k \cong \text{im}(u') \oplus \text{ker}(u)$$

となり、

$$\mathcal{H}_2(K)_k \cong \text{ker}(u) \cong \text{coker}(u')$$

がわかる。

•  $n = 2$  の場合：村上の式 (2) は  $J_3(K) = J(K^3) - 2J(K)$  となり、表現の分解は  $V_1 \otimes V_1 \otimes V_1 \cong V_3 \oplus V_1 \oplus V_1$  となる。

\*2  $[-1]$  は cone をとるときの degree の shift を表す。

\*3 Bar-Natan [2, Page 1456 の第一段落] の cobordism による categorification における complex の設定が読みやすい。考えているものは TQFT, すなわち cobordisms の圏からの factor であるから、これらの議論は総じて連動していると思うのが自然であろう。

対応する Khovanov の方法 (表 1 の方法) の概略は以下の通りである.

$K^3$  に現れる平行な 3 本の紐のうち, 隣同士の 2 本を選ぶ方法は 2 通りであるから,  $n = 1$  の時と同じように (ただし今度は 2 通りに) 「annulus を貼って」 2 本の紐を対にすることで,

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(K^3) \rightarrow \mathcal{C}(K) \oplus \mathcal{C}(K) \rightarrow 0$$

という系列が考えられる (ただし map の符号の ambiguity は依然として残る). この系列を coboundary map の系列だと期待して, 複体  $\mathcal{C}(\cdot)$  における 2 重複体の total complex を「符号の問題を回避して」  $\mathcal{C}_3(K)$  だと定義するのが筋がよさそうである (ただし, この場合も何らかの意味で符号の問題を解決しなくてはならない).

### §3 Khovanov の問題 (2つ) を解決した Beliakova-Wehrli の問題提起

Khovanov [14, Section 6 (a)–(f)](2005, arXiv version は 2003) は問題のリストを挙げた. 最初の問題 (a), (b) は大まかに言えば, Jones 多項式の categorification に対する link cobordism 理論があったように, colored Jones 多項式に対する colored framed link cobordism 理論を構築せよ, というものである. Beliakova-Wehrli [4] は, Khovanov の問題 (a), (b) について一つの答えを与えた. Beliakova-Wehrli [4] が成功したのは, Khovanov の議論を徹底的に Bar-Natan の link cobordism 理論に寄り添うように拡張させたせいであろう. Bar-Natan の理論から得られる homotopy 不変性を使い, 欲しいものを得ている. ただ同時に colored framed link cobordism 理論を構築する中で bicomplex は得られないことも指摘している [4, Page 1248]. またこの方針を進めていくと Khovanov が [14, Page 126, Remark] で指摘していたように annulus を貼る map を定義した複体を經由する以上, 整係数の複体を得ることはできない (ただし Beliakova-Wehrli [4] は, [14, Page 115] において Khovanov が予見した  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  での構成に成功はしている).

これらをまとめ, Khovanov の問題 [14, Section 6 (a)–(f)] 中の (c) も踏まえると次が問題となる.

**Problem 1** Links に対する非自明な整係数 bicomplex で colored Jones 多項式の categorification となるものは存在するのか?

### §3 講演者の結果

Khovanov [14] の設定と同じように framed link  $L$ , そしてその link diagram  $D$  を考える.  $J_n(L)$  は link の場合の colored Jones 多項式 (定理 1 の本来の形, link に対するもの) とする.

**定理 2** (I. [9]) 式 (4) を満たす非自明な tri-graded bicomplex  $\{C_n^{k,i,j}(D), d', d''\}$  が存在する.

$$J_n(L) = \sum_j q^j \sum_{i,k} (-1)^{i+k} \text{rank } H^k H^i(C_n^{*,*,j}(D), d''), d'. \quad (4)$$

当初から Khovanov [14] が指摘していたように「annulus を貼る」ことに対応する map の定義域である複体を, そのまま使うことはできない. 定理 4 において筆者 [9] のとったアプローチは, 整係数 homology を得るために, Viro [17] の方法を取り, 2 辺形に関する Reidemeister move の retraction (拙著 (2011) [8]) に対応するものを使って「annulus を貼った」際に起きる変化を考えて構成する, というものである. なお, Viro のアプローチについては, 穂坂秀昭の丁寧な脚注がついた講義録 [7] が拙著 [10] よりも専門家向けとなっており, ここに挙げておきたい.

この筆者 [9] の構成は, 随分複雑になってしまい不変性の証明に至らなかった. 筆者は 2010 年頃, colored Jones 多項式の categorification について Khovanov, Beliakova, Wehrli と議論を行った経緯があり, この問題の重要性を今でも感じているのであるが, 歯がゆいことに 3 方向のアプローチいずれも完全な解決に迫っていない (ことを理解したままである). 今後, 何らかの新しい idea, ブレークスルーが必要であるのではないかと思案している.

ところで筆者が取り組んだことの思いがけない副産物として, 拙著 (2011) [8] の retraction の量子コンピューティングへの応用 (Audoux [1] (2014)) があり, Khovanov 複体の内部構造を操る chain map 達に目を向けるモチベーションは当時よりさらに増える方向に変化している.

### §4 さらになる論点

以上で述べられなかった当課題 (自然表現からなる colored Jones 多項式の categorification) のさらになる論点 (1)–(4) を挙げておきたい.

- (1) 表現の次元を上げることが容易であるような形での整備が充分ではない。  
 例：村上順 [16] の式 (定理 1) により，ジョーンズ多項式から色つきジョーンズ多項式への一般化はストレートにできるにも関わらず，ジョーンズ多項式の categorification である Khovanov homology から色つきジョーンズ多項式の categorification (colored Khovanov complex) への一般化は (ほとんどの homology が消えるような) 自明な形でしかストレートに伸びていない。Beliakova-Wehrli [4] でより具体的に指摘されたように，TQFT におけるストレートな拡張が bicomplex を導かないことは考察されるべき問題点だと思われる。
- (2) 表現を (少し) 動かしたときのようなすが本当に見えるようになってはいえない。  
 例：例えば  $sl_2$  から  $sl_n$  にするとき，TQFT の観点からもっとストレートに見えるような拡張があるだろうか。
- (3) 係数に関してデリケートな問題がある。  
 例 (定義などの基礎的な部分)：例えば，式 (3) により，表現の次元を 2 つずつ下げていくとき，Khovanov homology の differential の符号と compatible になるような，2 次元表現 1 つに対する canonical な符号の付け方が知られているとはいえない。また，例えば単純な円周が単純な arc に乗っている状況で，交点をなくす方向にライデマイスター移動をするような単純な幾何的操作ですら符号に気をつける必要がある。  
 例 (より広い視点)： $\mathbb{F}_2$ -homology ではミュータントペアを区別しないが，(筆者の知る限り) 整係数 homology ではどうか明らかではない。さらにいうと  $\mathbb{F}_2$ -homology で判別されず，整係数 homology で判別できる例がどれほどあるかについてもっと解明がなされたほうがよい。トーションによる結び目の判別がどれほどであるか，わかっている命題も多いとはいえない。
- (4) 表現論においては明解に説明がなされた量子不変量の局所変形の理論を categorification の意味で展開し構築するには至らない。  
 例：Goussarov, 葉廣に代表される Vassiliev 不変量の拡張理論で現れる  $C_n$ -move に対し，その圏論化がまだ構築されていない。

## §5 基本理論における最近の動向

最後に論点 (4) に触れておきたい. Vassiliev 不変量<sup>\*4</sup>や  $C_n$ -move による同値関係 ( $C_n$ -同値) が重要であることを端的に説明しようとするなら, 次の3点を挙げることになる.  $v_n$  をフィルター次数  $n$  の Vassiliev 不変量としておく.

- Vassiliev 不変量により, 結び目の全体集合が有次元ベクトル空間における秩序づけられた filtration により徐々に精密度を増しつつ分類されていく. 特に, Goussarov [5], 葉廣和夫 [6] による独立な結果:

$$\text{結び目 } K, K' \text{ が } C_{n+1}\text{-同値} \iff v_m(K) = v_m(K') \quad (\forall m \leq n)$$

がある.

- pure braids は Vassiliev 不変量により分類される (河野俊丈 [15]).
- Jones 多項式  $V_K(q)$  を  $\epsilon = q - 1$  について Taylor 展開すると

$$V_K(q) = 1 + v_2(K)\epsilon^2 + v_3(K)\epsilon^3 + \dots$$

となる. より広い量子不変量についてもそうである (Birman-Lin [3]).

この Vassiliev 理論は 1990 年代からの十数年で飛躍的に発展し今も研究が続いている, “壁越え”理論の一種である. この理論は Khovanov 理論と長い間結びつかなかった. 理論的・技術的両方のハードルがあるといえる.

ただ, 様相は大きく変わろうとしている. 最近の吉田純との共著 (2019) [11] では, 交差交換に対応する, 今までになかった形の chain map を見つけることで, Khovanov homology 上の Vassiliev 不変量を定義する特異点 (2重点) を構成した. 結果的に Vassiliev の定義関係式を導く長完全列を Khovanov homology の言葉で得た. これらは FI 関係式<sup>\*5</sup>を満たすため, その非自明性だけでなく, 今までになかったタイプの不変量であることが保証される<sup>\*6</sup>. 系として特異絡み目の新しい不変量が得られる. ただし, この論文 [11] では  $\mathbb{F}_2$  上で議論が展開されており, 舞台は異なるものの, Khovanov の直面したような符号の問

---

<sup>\*4</sup> 結び目に定義されたもので, 後に様々な objects に対して定義される有限型不変量という概念に拡張された. 完全不変量であることが期待されている. 実際, pure braid に関しては河野俊丈の結果 [15] がある.

<sup>\*5</sup> Vassiliev 不変量の構成上, 自然に現れる関係式. Kontsevich の不変量構成にも現れる.

<sup>\*6</sup> FI 関係式を満たさなくてよいのであれば交差交換を実現するような自明な方法や既存の方法がある. ただし既存の方法では Vassiliev の定義関係式は出ず, 代わりに Jones 多項式のスケイン関係式が得られる.

題 (§3 参照) を乗り越えることが今後期待されるべきだろう.

Khovanov homology は categorification による「再定義の数学」の重要性を高めた. 実際, Jones 多項式や Alexander 多項式の categorifications は結び目種数の問題に関する研究を推し進めているとあってよい. ならば, colored Jones 多項式や Vassiliev 理論といった分野横断的で基本に近い対象もかくあるべし, であろう. この方面における今後の研究者の新しいアプローチや努力が強く望まれるところである.

## 参考文献

- [1] B. Audoux, An application of Khovanov homology to quantum codes, *Ann. Inst. Henri Poincaré D* **1** (2014), 185–223.
- [2] D. Bar-Natan, Khovanov’s homology for tangles and cobordisms, *Geom. Topol.* **9** (2005), 1443–1499.
- [3] J. S. Birman and X.-S. Lin, Knot polynomials and Vassiliev’s invariants, *Invent. Math.* **111** (1993), 225–270.
- [4] A. Beliakova and S. Wehrli, Categorification of the colored Jones polynomial and Rasmussen invariant of links, *Canad. J. Math.* **60** (2008), 1240–1266.
- [5] M. N. Goussarov, Knotted graphs and a geometrical technique of  $n$ -equivalence, POMI Sankt Petersburg preprint, circa 1995 (in Russian).
- [6] K. Habiro, Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topol.* **4** (2000), 1–83.
- [7] 穂坂秀昭 記, 伊藤昇 述, 2018 年度数学特別セミナー 結び目理論の圏論化, 開成学園紀要 研究論集 第 40 号 (2020).
- [8] N. Ito, Chain homotopy maps for Khovanov homology, *J. Knot Theory Ramifications* **20** (2011), 127–139.
- [9] N. Ito, A colored Khovanov bicomplex, Banach Center Publ., 111–143, 2014.
- [10] 伊藤昇, 結び目理論の圏論, 日本評論社, 2018.
- [11] N. Ito and J. Yoshida, Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation, arXiv:1911.09308.
- [12] R. Kirby and P. Melvin, The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , *Invent. Math.* **105** (1991), 473–545.
- [13] M. Khovanov, A categorification of Jones polynomial, *Duke Math. J.* **101** (2000), 359–426.



- [14] M. Khovanov, Categorifications of the colored Jones polynomial, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), 1479–1503.
- [15] T. Kohno, Vassiliev invariants and de Rham complex on the space of knots, *Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993)*, 123–138, Contemp. Math. 179, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [16] J. Murakami, The parallel version of polynomial invariants of links, *Osaka J. Math.* **26** (1989), 1–55.
- [17] O. Viro, Khovanov homology, its definitions and ramifications, *Fund. Math.* 184 (2004), 317–342.