A generalization of Lakshmibai-Seshadri paths and Chevalley formula for arbitrary weights

東京工業大学・理学院数学系　河野 隆史
Takafumi Kouno
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

概要

本研究では，表現論において重要な組合せ論的対象である Lakshmibai-Seshadri パスを，一般のウェイトへ拡張し，interpolated Lakshmibai-Seshadri パスを導入した．また，interpolated Lakshmibai-Seshadri パスを用いて，旗多様体 G/B のトーラス同変 K 理論における Chevalley 公式を記述した．本稿では，これらの結果について，証明等の詳細を省いて概説する．本稿は，RIMS 共同研究「表現論とその組合せ論的側面」における講演 "A generalization of Lakshmibai-Seshadri paths and Chevalley formula for arbitrary weights" のまとめである．

1 Introduction

本稿を通して，G を $\mathbb{C}$ 上の単連結単純代数群，H を極大トーラス，B を Borel 部分群とし，G のルート系を Δ，正ルート全体の集合を Δ^+，単純ルート全体の集合を $\{\alpha_i \mid i \in I\}$，ウェイト格子を P，優整ウェイト全体の集合を P^+，ルート格子を Q とする．各ルート $\alpha \in \Delta$ に対応する余ルートを $\alpha^\vee$ とし，余ルート格子を $Q^\vee$ とする．また，α_i $(i \in I)$ に対する単純鏡映を s_i とし，$W = \langle s_i \mid i \in I \rangle$ を Weyl 群，$\alpha \in \Delta$ に対応する鏡映を s_α，W の Bruhat グラフを $\mathrm{BG}(W)$ とする．そして，$W_{\mathrm{af}} = W \ltimes Q^\vee$ および $W_{\mathrm{af}}^\vee = W \ltimes Q$ を，アフィン Weyl 群およびその dual，$W_{\mathrm{ex}}^\vee = W \ltimes P = W_{\mathrm{af}}^\vee \ltimes (P/Q)$ を拡大アフィン Weyl 群の dual とし，$\mu \in P$ を $W_{\mathrm{ex}}^\vee$ の元とみなすとき，$t_\mu (\in W_{\mathrm{ex}}^\vee)$ と書く．さらに，Δ_{af} をアフィンルート系とし，$\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}$ に対応する鏡映も $s_\beta \in W_{\mathrm{af}}$ と書く．いま，null root を $\delta \in \Delta_{\mathrm{af}}$ と書くとき，$\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}$ が $\beta = \gamma + k\delta$ $(\gamma \in \Delta,\ k \in \mathbb{Z})$ と表されるならば，$\overline{\beta} := \gamma$ と定める．

続いて，$\lambda \in P$ に対し，$\mathbb{C}(\lambda)$ を B の λ をウェイトとする 1 次元表現とし，旗多様体 $X = G/B$ 上の直線束 $G \times_B \mathbb{C}(\lambda) \to G/B$ の正則切断の層を $\mathcal{L}(\lambda)$ と書く．また，Schubert 多様体 $X_w = \overline{BwB}/B$ $(w \in W)$ の構造層を $\mathcal{O}_w$ と書く．さらに，G/B 上の連接層 $\mathcal{M}$ に対して，旗多様体 G/B のトーラス同変 K 理論 $K_H(G/B)$ における $\mathcal{M}$ の同型類を $[\mathcal{M}]$ と書く．

$\mu \in P$，$w \in W$ を任意にとる．$K_H(G/B)$ における以下のような等式を，**Chevalley 公式**という．

$$[\mathcal{L}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] = \sum_{v \in W} \sum_{\xi \in P} c_{w,v}^{\mu,\xi} e^{-\xi} [\mathcal{O}_v]$$

ここで，整数 $c_{w,v}^{\mu,\xi} \in \mathbb{Z}$ $(w, v \in W,\ \mu, \xi \in P)$ は $\boldsymbol{K_H}$**-Chevalley 係数**と呼ばれる．

Schubert calculus における主要な問題の一つとして，「K_H-Chevalley 係数を組合せ論的に記述せよ」というものがある．これに対し，C. Lenart 氏および A. Postnikov 氏は，K_H-Chevalley 係数を **alcove walk** と呼ばれる組合せ論的対象を用いて記述し，問題を解決した ([LP])．しかし，alcove walk はアフィンルート系の情報を必要とするため，具体的に計算をする際にはやや複雑である．

一方で，alcove walk と密接な関係がある組合せ論的対象として，**Lakshmibai-Seshadri パス** (以下 LS パスと略す) が挙げられる．$\mu \in P$ が優整ウェイト (すなわち $\mu \in P^+$) のときは，alcove walk 側の集合 $\mathcal{A}(\mu)$ (**admissible subset** の集合．定義は [LNSSS, §5] 参照) と LS パス側の集合 $\mathrm{QLS}(\mu)$ (**量子 Lakshmibai-Seshadri パス**の集合．定義は [LNSSS, Definition 3.1] 参照) の間に，よい全単射が存在することが知られている ([LNSSS, Proposition 6.8])．

この全単射を用いることで，Chevalley 公式を，LS パスを用いた記述に書き直すことができる．LS パスは有限ルート系の情報のみを必要とするため，具体的に計算するときには alcove walk による記述より適している．

しかし一般のウェイトの場合の alcove walk については，対応する LS パス側の組合せ論的対象が存在しない．そこで本研究では，一般のウェイトに対して LS パスの定義を拡張し，上記の全単射の類似を作ることで，Chevalley 公式を有限ルート系の情報だけで記述することを目指した．

2 Bruhat グラフ

この節では，$\mu \in P$ に応じて正ルートの集合を 3 分割し，その分割に対応する Bruhat グラフ上の “label-increasing パス” について準備する．これ以降，しばらく $\mu \in P$ を固定する．

定義 2.1. 集合 $R_+, R_0, R_- \subset \Delta^+$ を以下のように定める．

$$\begin{aligned} R_+ &:= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \langle \mu, \alpha^\vee \rangle > 0\}, \\ R_0 &:= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \langle \mu, \alpha^\vee \rangle = 0\}, \\ R_- &:= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \langle \mu, \alpha^\vee \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

この分割に対応する Δ^+ 上の reflection order を考える．ここで，Δ^+ 上の全順序 $\lhd$ が **reflection order** であるとは，次の [条件] が成り立つことである：

> [条件] 各 $\alpha, \beta \in \Delta^+$ に対し，$\alpha + \beta \in \Delta^+$ ならば，$\alpha \lhd \alpha + \beta \lhd \beta$ または $\beta \lhd \alpha + \beta \lhd \alpha$ が成り立つ．

定義 2.2. 集合 $\mathcal{RO}(\mu,\Delta^+)$ を，以下のように定める．

$$\mathcal{RO}(\mu,\Delta^+) := \left\{ \lhd : \Delta^+ \text{ 上の reflection order} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \alpha \in R_-, \beta \in R_0, \gamma \in R_+ \text{に対し} \\ \alpha \lhd \beta \lhd \gamma \text{ が成り立つ.} \end{array} \right\}.$$

以下，$\lhd \in \mathcal{RO}(\mu,\Delta^+)$ をひとつ固定する．

定義 2.3. $x, y \in W$ とする．
(1) $\mathrm{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で，$\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in R_+$ かつ $\gamma_1 \lhd \gamma_2 \lhd \cdots \lhd \gamma_s$ を満たすものが存在するとき，$x \xRightarrow{(\mu,+,q=0)} y$ とかく．
(2) $\mathrm{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で，$\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in R_-$ かつ $\gamma_1 \lhd \gamma_2 \lhd \cdots \lhd \gamma_s$ を満たすものが存在するとき，$x \xRightarrow{(\mu,-,q=0)} y$ とかく．

注意 2.4. $\xRightarrow{(\mu,\pm,q=0)}$ の定義は，$\lhd \in \mathcal{RO}(\mu,\Delta^+)$ の取り方によらない．

3 Interpolated Lakshmibai-Seshadri パス

本節では，Lakshmibai-Seshadri パスの拡張である，interpolated Laksmibai-Seshadri パスを導入する．

まずは，整数性条件について述べる．

定義 3.1. $x, y \in W$ とする．
(1) $\mathrm{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で，$\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in R_+$ かつ $\gamma_1 \lhd \gamma_2 \lhd \cdots \lhd \gamma_s$ を満たし，さらにすべての $k \in \{1, \ldots, s\}$ に対して $\sigma\langle \mu, \gamma_k^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ が成り立つものが存在するとき，$x \xRightarrow{(\mu,+,q=0)}_\sigma y$ とかく．
(2) $\mathrm{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で，$\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in R_-$ かつ $\gamma_1 \lhd \gamma_2 \lhd \cdots \lhd \gamma_s$ を満たし，さらにすべての $k \in \{1, \ldots, s\}$ に対して $\sigma\langle \mu, \gamma_k^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ が成り立つものが存在するとき，$x \xRightarrow{(\mu,-,q=0)}_\sigma y$ とかく．

以上の準備をもとに，interpolated Lakshmibai-Seshadri パスを導入する．

定義 3.2. $s \geq 1$ とする．$x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_{s-1} \in W$ および $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \mathbb{Q}$ が以下の条件 (1)，(2)，(3) を満たすとき，組 $(x_1, x_2, \ldots, x_s; y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}; \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ を型 μ の **interpolated Lakshmibai-Seshadri パス** (または **interpolated LS パス**) とよぶ．

(1) $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1$ が成り立つ．
(2) すべての $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ に対し，$x_{i+1} \xRightarrow{(\mu,+,q=0)}_{\sigma_i} y_i$ が成り立つ．
(3) すべての $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ に対し，$y_i \xRightarrow{(\mu,-,q=0)}_{\sigma_i} x_i$ が成り立つ．

型 μ の interpolated LS パス全体の集合を $\mathrm{ILS}(\mu)$ とかく．

interpolated LS パスに対して，通常の LS パスと同様にウェイト等を定める．

定義 3.3. $\eta = (x_1, x_2, \ldots, x_s; y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}; \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathrm{ILS}(\mu)$ を型 μ の interpolated LS パスとする．

(1) $\iota(\eta) := x_1$, $\kappa(\eta) := x_s$ と定める．$\iota(\eta)$ を η の **initial direction**, $\kappa(\eta)$ を η の **final direction** という．

(2) $\mathrm{wt}(\eta) \in P$ を

$$\mathrm{wt}(\eta) := \sum_{k=1}^{s} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) x_k \mu$$

と定める．$\mathrm{wt}(\eta)$ を η の**ウェイト**という．

続いて，interpolated LS パス特有の量である，positivity length を定める．

定義 3.4. $\eta = (x_1, x_2, \ldots, x_s; y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}; \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathrm{ILS}(\mu)$ を型 μ の interpolated LS パスとする．$\mathrm{pos}(\eta) \in \mathbb{Z}$ を

$$\mathrm{pos}(\eta) := \sum_{k=1}^{s-1} (\ell(x_{k+1}) - \ell(y_k))$$

と定める．$\mathrm{pos}(\eta)$ を η の **positivity length** という．

4 Interpolated LS パスを用いた Chevalley 公式の記述

Chevalley 公式の問題は，K_H-Chevalley 係数 $c_{w,v}^{\mu,\xi} \in \mathbb{Z}$ $(w, v \in W, \mu, \xi \in P)$ を組合せ論的に記述することであった．この問題に対する，C. Lenart 氏および A. Postnikov 氏による結果を述べる．いま，$\mu \in P$ をとり，$t_\mu \in W_{\mathrm{ex}}^\vee$ の reduced expression $t_\mu = s_{i_r} \cdots s_{i_2} s_{i_1} (\pi^\vee)^{-1} \in W_{\mathrm{af}}^\vee \ltimes (P/Q) = W_{\mathrm{ex}}^\vee$ $(i_1, \ldots, i_r \in I_{\mathrm{af}} = I \sqcup \{0\}, \pi^\vee \in P/Q)$ をひとつ固定する．なお，$\theta \in \Delta$ を最高ルートとしたとき，s_0 は $\alpha_0 = -\theta + \delta$ に対応する単純鏡映である．この reduced expression に従って，(アフィン) 余ルートの列 $(\beta_1^{\mathsf{L}})^\vee, (\beta_2^{\mathsf{L}})^\vee, \ldots, (\beta_r^{\mathsf{L}})^\vee$ および (有限) ルートの列 $\gamma_1^{\mathsf{L}}, \gamma_2^{\mathsf{L}}, \ldots, \gamma_r^{\mathsf{L}}$ を

$$(\beta_k^{\mathsf{L}})^\vee := \pi^\vee s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}} (\alpha_{i_k}^\vee), \quad \gamma_k^{\mathsf{L}} := \overline{\beta_k^{\mathsf{L}}} \quad \text{for } k \in \{1, \ldots, r\}$$

により定める．

定理 4.1 ([LP, Theorem 6.1])**.** 各 $\xi \in P$ および $v \in W$ に対し

$$c_{w,v}^{\mu,\xi} = \sum_J (-1)^{n(J)}$$

が成り立つ．ここで，和 $\sum_J$ において，J は以下の条件 (a), (b) を満たす集合 $J = \{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, r\}$ 全体を動く．

(a) $w \leftarrow w s_{\gamma_{j_1}^{\mathsf{L}}} \leftarrow \cdots \leftarrow w s_{\gamma_{j_1}^{\mathsf{L}}} \cdots s_{\gamma_{j_s}^{\mathsf{L}}} = v$ は $\mathrm{BG}(W)$ のパスである．

(b) $-\xi = ws_{\beta^{\mathsf{L}}_{j_1}} \cdots s_{\beta^{\mathsf{L}}_{j_s}}(-\mu)$ が成り立つ．

また，$n(J) := \#\{j \in J \mid \gamma^{\mathsf{L}}_j \in -\Delta^+\}$ と定める．

本稿では，interpolated LS パスを用いて K_H-Chevalley 係数 $c^{\mu,\xi}_{w,v}$ を記述する方法を考察する．そのために，以下に述べる O. Mathieu 氏による結果を利用する．$v, w \in W$ および $\mu \in P$ に対し，多項式 $S^v_w(\mu) \in \mathbb{Z}[P]$ を

$$[\mathcal{L}_v(-\mu)] = \sum_{v \in W} S^v_w(\mu)[\mathcal{O}_v]$$

となるように定める．また，$v, w \in W$ および $\mu, \xi \in P$ に対し，整数 $m^{v,\xi}_w(\mu) \in \mathbb{Z}$ を

$$[\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] = \sum_{v \in W} \sum_{\xi \in P} m^{v,\xi}_w(\mu)[\mathcal{L}_v(\xi)]$$

となるように定める．

定理 4.2 ([M, §5])**.** $v, w \in W$ および $\mu \in P$ に対し

$$S^{v^{-1}}_{w^{-1}}(\mu) = \sum_{\xi \in P} m^{v,\xi}_w(\mu) e^{\xi}$$

が成り立つ．

定理 4.1 と定理 4.2 を組み合わせることにより，以下を得る．

系 4.3. $\mu \in P$ および $w \in W$ に対し

$$[\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] = \sum_{J = \{j_1, \ldots, j_s\}} (-1)^{n(J)} \left[\mathcal{L}_{\left(w^{-1} s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}} \cdots s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_s}}\right)^{-1}} \left(w^{-1} s_{\beta^{\mathsf{L}}_{j_1}} \cdots s_{\beta^{\mathsf{L}}_{j_s}}(-\mu) \right) \right]$$

が成り立つ．ここで，和 $\sum_J$ において，J は以下の条件 (a) を満たす集合 $J = \{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, r\}$ 全体を動く．

(a) $w^{-1} \leftarrow w^{-1} s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}} \leftarrow \cdots \leftarrow w^{-1} s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}} \cdots s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_s}}$ は BG(W) のパスである．

注意 4.4. 系 4.3 における条件 (a) は，以下の条件 (a)$'$ と同値である．

(a)$'$ $w_\circ w^{-1} \rightarrow w_\circ w^{-1} s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}} \rightarrow \cdots \rightarrow w_\circ w^{-1} s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}} \cdots s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_s}}$ は BG(W) のパスである．

いま，系 4.3 の和 $\sum_J$ における，集合 J の動く範囲をまとめた集合を用意する．

定義 4.5. $u \in W$ に対し，集合 $\mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \ldots, i_r))$ を

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \ldots, i_r)) \\ &:= \left\{ J = \{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, r\} \;\middle|\; u \rightarrow u s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}} \rightarrow \cdots \rightarrow u s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}} \cdots s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_s}} \text{ in BG}(W) \right\} \end{aligned}$$

で定める．集合 $\mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \ldots, i_r))$ の元を **admissible subset** (of $\{1, \ldots, r\}$) という．

また，admissible subset J に対し，終点とウェイトを定義する．

定義 4.6. $u \in W$ とする．$J \in \mathcal{A}|_{q=0}(u;(i_1,\dots,i_r))$ に対し

$$\mathrm{end}(J) := us_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_1}}\cdots s_{\gamma^{\mathsf{L}}_{j_s}}, \quad \mathrm{wt}(J) := -us_{\beta^{\mathsf{L}}_{j_1}}\cdots s_{\beta^{\mathsf{L}}_{j_s}}(-\mu)$$

と定める．

上記の admissible subset を用いて，系 4.3 を書き直す．

系 4.7. $\mu \in P$ および $w \in W$ に対し

$$[\mathbb{C}(-\mu)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_w] = \sum_{J\in\mathcal{A}|_{q=0}(w_\circ w^{-1};(i_1,\dots,i_r))} (-1)^{n(J)}[\mathcal{L}_{(w_\circ \mathrm{end}(J))^{-1}}(-w_\circ \mathrm{wt}(J))]$$

が成り立つ．

以下，筆者が得た結果を説明する．以下，t_μ の reduced expression $t_\mu = s_{i_r}\cdots s_{i_2}s_{i_1}(\pi^\vee)^{-1}$ を "適切に" とって固定する (取り方についての説明は省略する)．

定理 4.8 (K.)**.** 単射 $\Xi : \mathcal{A}|_{q=0}(u;(i_1,\dots,i_r)) \to \mathrm{ILS}(-\mu)\times W$ であって，$\Xi(J) = (\eta, v)$ ($J \in \mathcal{A}|_{q=0}(u;(i_1,\dots,i_r))$) のとき，次の (1)，(2)，(3) が成り立つものが存在する．

(1) $\mathrm{wt}(J) = -\mathrm{wt}(\eta)$,
(2) $\mathrm{end}(J) = v$,
(3) $n(J) = \mathrm{pos}(\eta) + \ell(v) - \ell(\iota(\eta))$.

また，Ξ の像 $\mathrm{Im}(\Xi)$ は，以下の通りである．

$$\mathrm{Im}(\Xi) = \left\{ (\eta, v) \in \mathrm{ILS}(-\mu)\times W \;\middle|\; u \xrightarrow{(-\mu,-,q=0)} \kappa(\eta),\ \iota(\eta) \xrightarrow{(-\mu,+,q=0)} v \right\}.$$

系 4.9 (K.)**.** $\mu \in P$ および $w \in W$ に対し

$$\begin{aligned}&[\mathbb{C}(-\mu)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_w] \\ =& \sum_{\substack{\eta\in\mathrm{ILS}(-\mu) \\ w_\circ w^{-1} \xrightarrow{(-\mu,-,q=0)} \kappa(\eta)}} \sum_{\substack{v\in W \\ \iota(\eta) \xrightarrow{(-\mu,+,q=0)} v}} (-1)^{\mathrm{pos}(\eta)+\ell(v)-\ell(\iota(\eta))}[\mathcal{L}_{(w_\circ v)^{-1}}(w_\circ \mathrm{wt}(\eta))]\end{aligned}$$

が成り立つ．

5 Yip 公式

$\lambda \in P$ に対し，$E_\lambda(q,t)$ を非対称 Macdonald 多項式とする．M. Yip 氏は，$\mu, \lambda \in P$ に対し

$$e^\mu E_\lambda(q,t) = \sum_{\nu\in P} c^\nu_{\mu,\lambda}E_\nu(q,t)$$

という形の等式を考察した ([Y, Corollary 4.1]). このような等式を，本稿では Yip 公式と呼ぶことにする．なお，各 $\nu, \mu, \lambda \in P$ に対し，$c^{\nu}_{\mu,\lambda} \in \mathbb{Q}(q,t)$ は q, t を不定元とする有理式である．とくに $q = t = 0$ と特殊化するとき，$c^{\nu}_{\mu,\lambda}$ は整数である．本節では，前節の系 4.9 を用いて，$q = t = 0$ と特殊化した Yip 公式の，interpolated LS パスによる記述を試みる．

定義 5.1 ([LS, §4]). $\nu \in P^+$ とする．写像 $\chi_\nu : K_H(G/B) \to \mathbb{Z}[P]$ を，G/B 上の連接層 $\mathcal{M}$ に対し

$$\chi_\nu([\mathcal{M}]) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{ch} H^i(G/B, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(-\nu))$$

で定める．χ_ν を (ν で twist された) **Euler 指標**という．

注意 5.2. $\nu = 0 \in P^+$ のとき，χ_ν は [M, §2] で定められている χ_B と一致する．

[M, Theorem 2.1] を用いることで，以下の等式が示される．

命題 5.3. (1) $\nu \in P^+$，$\mu \in P$ および $w \in W$ に対し，$\chi_\nu([\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w]) = \overline{e^{\mu} E_{w\nu}(0,0)}$ が成り立つ．
(2) $\nu \in P^+$，$w \in W$，$\xi \in P$ とする．$\xi + \nu \in P^+$ のとき，$\chi_\nu([\mathcal{L}_w(-\xi)]) = \overline{E_{w(\xi+\nu)}(0,0)}$ が成り立つ．

ここで，$\mathbb{Z}[P]$ 上の対合 $\overline{\cdot}$ は，各 $\xi \in P$ に対し $\overline{e^{\xi}} := e^{-\xi}$ と定め，これを $\mathbb{Z}$-線形に拡張したものである．

系 4.9 の等式において，両辺の ν で twist された Euler 指標をとり，命題 5.3 を適用すると，以下の系が得られる．これは，$q = t = 0$ と特殊化した Yip 公式にほかならない．

系 5.4 (K.). $\nu \in P^+$，$\mu \in P$，$w \in W$ とする．$w_\circ w^{-1} \xrightarrow{(-\mu,-,q=0)} \kappa(\eta)$ を満たすすべての $\eta \in \mathrm{ILS}(-\mu)$ に対して $-w_\circ \mathrm{wt}(\eta) + \nu \in P^+$ が成立するとき

$$\begin{aligned} & e^{\mu} E_{w\nu}(0,0) \\ = & \sum_{\substack{\eta \in \mathrm{ILS}(-\mu) \\ w_\circ w^{-1} \xrightarrow{(-\mu,-,q=0)} \kappa(\eta)}} \sum_{\substack{v \in W \\ \iota(\eta) \xrightarrow{(-\mu,+,q=0)} v}} (-1)^{\mathrm{pos}(\eta) + \ell(v) - \ell(\iota(\eta))} E_{v^{-1}(-\mathrm{wt}(\eta) + w_\circ \nu)}(0,0) \end{aligned}$$

が成り立つ．

謝辞

RIMS 共同研究「表現論とその組合せ論的側面」にて貴重な講演の機会を頂き，ありがとうございました．また，本研究において，多くの助言をくださった内藤聡先生，佐垣大輔先生に感謝申し上げます．

参考文献

[LNSSS] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II. Alcove model, path model, and $P = X$, Int. Math Res. Not. **2017** (2017), 4259–4319.

[LP] C. Lenart and A. Postnikov, Affine Weyl groups in K-theory and representation theory, Int. Math Res. Not. **2007** (2007), Art. ID rnm038, 65.

[LS] P. Littelmann and C. S. Seshadri, A Pieri-Chevalley type formula for $K(G/B)$ and standard monomial theory, in "Studies in memory of Issai Schur" (Chevaleret/Rehovot, 2000), 155–176, Progr. Math., vol. 210, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[M] O. Mathieu, Positivity of some intersections in $K_0(G/B)$, J. Pure Appl. Algebra **152** (2000), 231–243.

[Y] M. Yip, A Littlewood-Richardson rule for Macdonald polynomials, Math. Z. **272** (2012), no. 3-4, 1259–1290.