非線形遅延微分方程式のダイナミックスの計算機援用解析

早稲田大学理工学術院応用数理学科 大石進一
Shin'ichi Oishi,
Department of Applied Mathematics,
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

1　なぜ非線形遅延微分方程式?

非線形遅延微分方程式を取り扱い始めたのは、ポーランドから Ogorzlak 教授が大石研にサバティカルで来られて、これをテーマにしようと彼から提案があったのが切っ掛けである。2018 年の秋であったから、かれこれ 2 年近くになる。常微分方程式の周期解の精度保証付き包み込みについては、有名な 1965 年の占部稔先生の結果 [2] があり、篠原先生や三井先生など多数の方がこの方向での研究に取り組まれてきて、大変良い成果が出されている。著者も少し一般化した定式化を 1995 年に出版した [3]。

さて、占部の方法は、簡易ニュートン法の収束定理を用いる、計算機援用解析である。簡易ニュートン法の収束定理はニュートン法の収束定理と同じ条件となる。ニュートン法の収束定理は Kantorovich が先行して結果を出版しているが、Duffing 方程式などの非線形振動論において、その有用性を確立したのが占部であるといえるであろうか。

さて、遅延微分方程式に拡張するとなると、少し、困難があるのは知っていた。それは、一階フレッシェ微分のリプシッツ連続性が言えなくなることである。すなわち、収束定理を少し拡張してあげる必要が生じる。これについては Plum の収束定理や文献 [7] があって、その場合に拡張できることも知られていた。

ということで、この方向で研究を始めることにした。Ogorzalek 教授はポーランドでの結果を中心にヨーロッパでの興味の持たれ方を教えてくれた。彼によればダーウィンの種の起源にある唯一の図は種の分岐図であるが、この分岐図に似た分岐構造を持つ非線形遅延偏微分方程式を最終ターゲットにしようということであった。これには少しカルチャーショックを感じるぐらいに興味を惹かれた。しかし、その方程式の計算機援用解析には、まだまだ遠い。

2　簡単な方程式から?

では、まずは一階の遅延微分差分方程式から取り掛かろうと考えた。この方面では Wright 方程式が有名で、また、すでに計算機援用解析も行われていた。ゆっくり振動する周期解が Hopf 分岐から発生するものに限られるという、Jones 予想があって、これを精度保証の研究者が競って研究して、ついには昨年ぐらいに肯定的に解決した。これは自励系で、このようにシンプルな解しか存在しないということが示されたのである。

著者は、別の簡単な方程式として遅延 Duffing 方程式を取り上げることにした。これについては、まだ、半分ぐらいの結果であるが、今年に印刷された結果があるのでそれを参照されたい [6]。実は Duffing 方程式は精度保証するためには、とても良い収束性があって、主な困難はニュートン法の収束定理を拡張することにあったが、これはすでに先人が解決していた。

その次に、意外なことに難しい一階の遅延微分方程式について、2009 年の 10 月にブレークスルーを見つけ、取り扱うことにした。本稿の話題は、この困難とは何か、そして、どのようにブレークスルーされたかを議論することにある。実は、微分方程式の精度保証全体のブレークスルーになるかもしれないと考えている。

簡単な例としてエルニーニョのモデル方程式を考える。これは 1988 年に, Suarez and Schopf [1] が導入したものである。

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) + x^3(t) + \alpha x(t-\tau) = 0 \tag{1}$$

x はペルー沖の海面の温度の平均値からの偏差で、非線形項は海面と大気のそご作用にを表す項である。また、ペルー沖からインドシナに向かってケルビン波が進行し、そこで跳ね返ってアルフェン波となってペルー沖まで帰ってくるというモデルである。τ は従って、その行き帰りの伝搬時間で一年とか 2 年のオーダーである。この方程式には名前がついていないので、いか、Suarez-Schopf 方程式と呼ぶことにしよう。この方程式の解もかなり詳しく調べたが、確かにエルニーニュの周期に見合う数年周期の周期解があって、大変面白い。しかし、Wright 方程式と同様にシンプルな解しかないようである。そこで、季節の温度変化を表す強制項を付け加えてみることにした。

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) + x^3(t) + \alpha x(t-\tau) - \beta \cos \omega t = 0 \tag{2}$$

である。これを強制 Suarez-Schopf 方程式（簡単に fSS 方程式）と呼ぶことにした。この方程式は解が発散せず、その意味で安定でありながら、カオスがふんだんに現れる大変面白い方程式であることを発見した。カオスの存在の計算機援用証明は少し大掛かりな技術を要するので、当面、この方程式の分数調波解の計算機援用証明を行いとともに、シミュレーションでカオスを含む分岐図を色々描いてみることにした。

数学的には周期解の計算機援用証明に困難が生じるが、それが実に面白い数理的な現象の発見によってブレークスルーされた。以下、以上のような点について簡単に述べていくが、すでに英語での論文も完成しており、投稿間近なので、オリジナリティをあまり犯さない範囲で議論する。

3 fSS 方程式の周期解の計算機援用証明

基本的には fSS 方程式には至る所にカオスが発生する。その発生メカニズムも様々である。また、概周期解の発生も見られる。従って、周期解の存在証明というよりカオスとカオスの間をつなぐ窓が周期解になっていると言っても良い。

自励系で周期解が存在する場合に、外力を加えていくと、外力の振幅が弱いので完全に自励振動を同期させられず、概周期解が発生するようである。その例を次に示す。

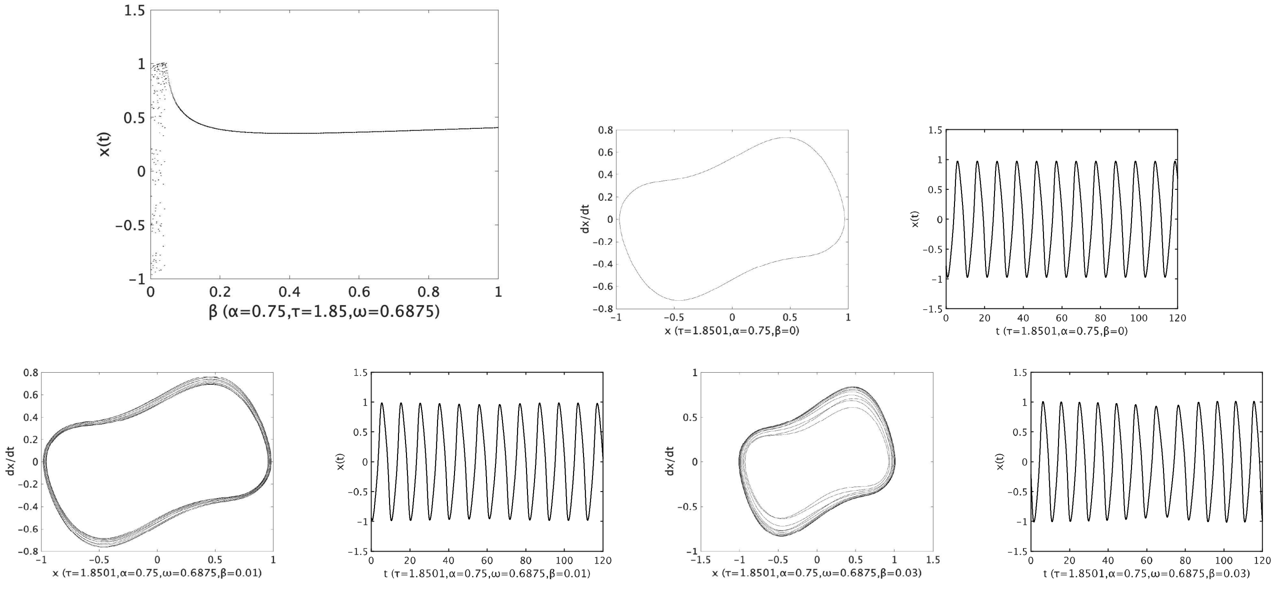

図 1: When $\beta \leqq 0.034$ almost periodic waves are observed by numerical simulation ($\alpha = 0.75, \tau = 1.85, \omega = 0.6875$).

一方、$\beta = 0$ で自励振動が存在しないときは、3 つの周期解が存在してそのうち 2 つが安定になる。その状態で外力を増やしていくとこの 2 つの安定状態を行き来するカオスが発生する。次の図はその典型例である。

このように、季節変動の効果を与える外力の振幅が小さくても極めて複雑な振動が発生することが見て取れる。

β を大きくしていくと、さらに様々なカオスや複雑な分数調波周期解が現れる。次の図はその例である。こ

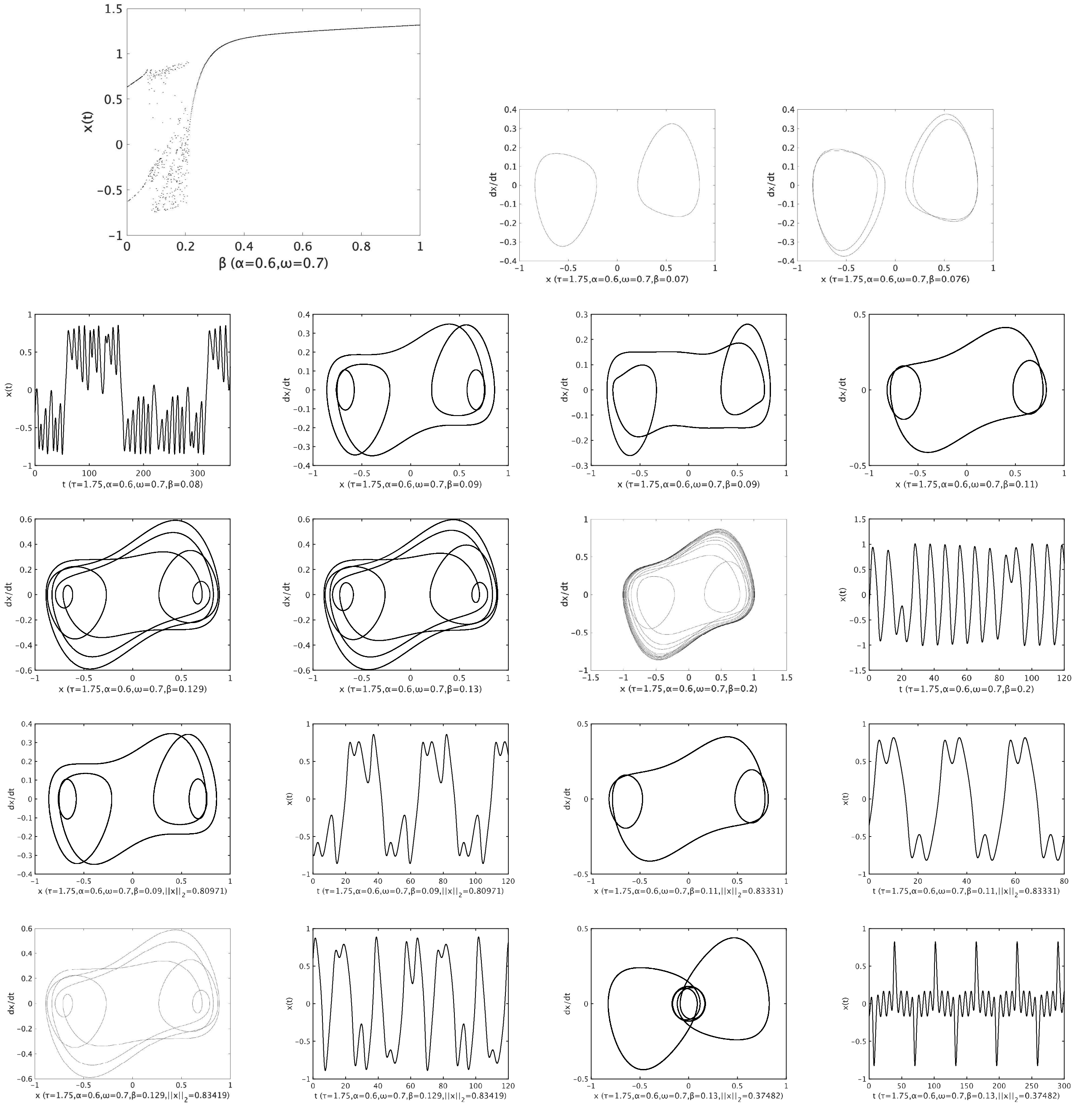

図 2: Case of no self oscillating mode exist ($\alpha = 0.6, \tau = 1.75, \omega = 0.7$) at $\beta = 0$. Three rows from top are obtained by numerical integration and others are obtained by Galerkin's method.

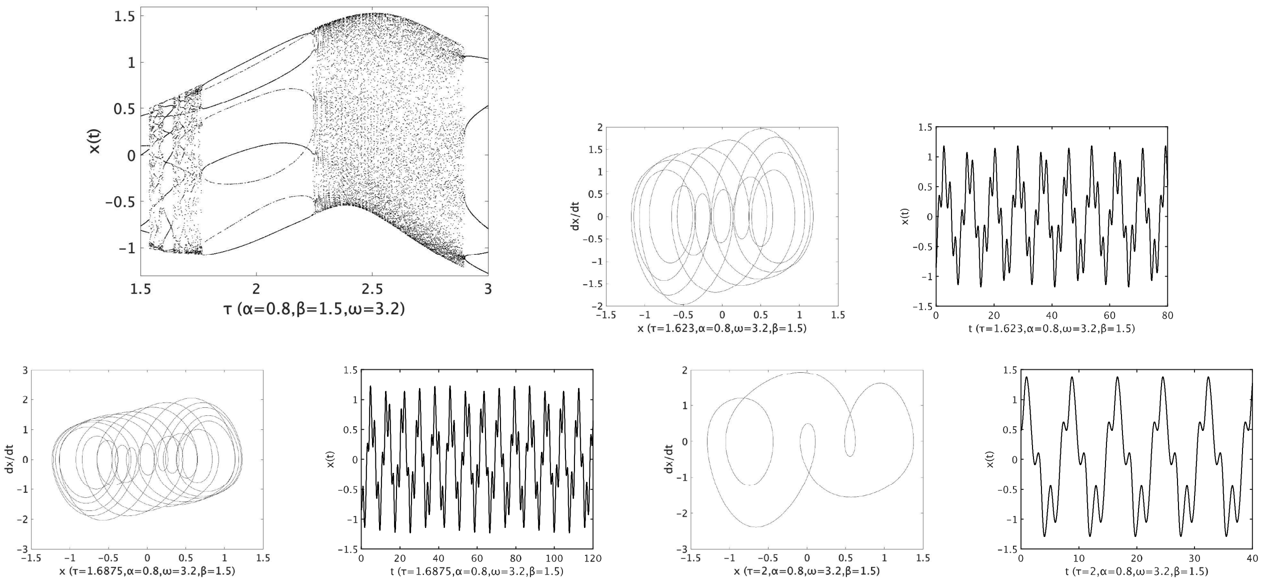

図 3: Stroboscopic bifurcation diagram obtained by numerical integration

の図には $\tau = 1.5$ と $\tau = 2$ の付近に安定な 1/4 分数調波解のウィンドウが見えるが、その間のカオスの中に $\tau = 1.623$ 付近に 1/13 分数調波解が $\tau = 1.6875$ 付近に 1/21 分数調波解の窓が存在する。

これらの分数調波解を含む多数の周期解の存在と局所一意性について、ガレルキン法をベースにして計算機援用証明を行うことができた。詳細については近く論文を投稿する予定なので、そちらを参照されたい。

参考文献

[1] M. J. Suarez and P. S. Schopf: A delayed action oscillator for ENSO, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **45(21)** (1988) pp. 3283-3287.

[2] M. Urabe, Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rat. Mech. Anal. **20**, pp.120-152 (1965).

[3] S. Oishi: Numerical verification of existence and inclusion of solutions for nonlinear operator equations, *J. Computational and Applied Math.*, **60** (1995) pp. 171-185.

[4] Teruya Minamoto, Mitsuhiro T. Nakao, A numerical verification method for a periodic solution of a delay differential equation, Journal of Computational and Applied Mathematics **235** pp.870-878 (2010).

[5] Jan Bouwe van den Berg, Chris Groothedde and Jean-Philippe Lessard, A general method for computer-assisted proofs of periodic solutions in delay differential problems, (September 14, 2018), preprint.

[6] S. Oishi: Numerical inclusion of exact periodic solutions for time delay Duffing equation, to appear in *J. Computational and Applied Math.*, (2019).

[7] Jan Bouwe van den Berg, Chris Groothedde and Jean-Philippe Lessard, A general method for computer-assisted proofs of periodic solutions in delay differential problems, (September 14, 2018), preprint.