

対称 R 空間の不変量と大対蹠集合に付随する距離可移グラフ の不変量の関係

北九州工業高等専門学校 栗原 大武
Hirotake Kurihara
National Institute of Technology,
Kitakyushu College

この報告は広島大学の奥田隆幸氏との共同研究に基づく。2017年のRIMSの講究録であるKurihara–Okuda [6]ではコンパクト型既約エルミート対称空間の大対蹠集合について、組合せ論的視点から考察を行った。この報告は[6]の続編であり、コンパクト型既約エルミート対称空間のクラスを対称 R 空間と呼ばれるクラスまで拡張して、それらの大対蹠集合の組合せ論的性質を調べたものである。また対称 R 空間までクラスを広げることで、新たな不変量の対応も見つかった。

1 対称 R 空間

まずは対称空間の定義や性質について述べる。詳細は[5]などを参照していただきたい。 M を連結コンパクトリーマン多様体とする。 M にはその計量から定まる自然な距離 d_M が定義されているものとする。 M 上の自己微分同相であって、リーマン計量を保つものを等長変換と呼ぶことにする。 $\text{Isom}(M)$ を M の等長変換群とする。

定義 1.1. 任意の $x \in M$ に対して x の点対称 s_x が存在するとき、 M をリーマン対称空間であるという。なお $f \in \text{Isom}(M)$ が x の点対称であるとは以下の条件を満たすこと：

- (1) x は f についての孤立固定点になっている。
- (2) $f \circ f = \text{id}_M$.

注意 1.2. (1) 対称空間上で点対称は唯一に決まることが知られている。

- (2) $\text{Isom}(M)$ はリー群であることが知られている。 G を $\text{Isom}(M)$ の単位元を含む連結部分群（単位連結成分）とすると、 G は M に推移的に作用する。したがって M は等質空間であり、一点 $o \in M$ の固定部分群を $K := \{g \in G \mid go = o\}$ とすると、 M と G/K のリーマン多様体としての同型を得る。

例 1.3. 基礎体は $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとする。グラスマン多様体 $\text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ は集合としては以下のように定義される。

$$\text{Gr}_k(\mathbb{K}^n) = \{V \mid V \text{は } \mathbb{K}^n \text{の部分空間であり, } \dim_{\mathbb{K}} V = k\}.$$

$V \in \text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ における点対称 s_V は次のように定まる。 \mathbb{K}^n に内積を指定して $\sigma_V: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ を V 上の鏡映とする。このとき $s_V: \text{Gr}_k(\mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ は $s_V(W) = \sigma_V(W)$ により定まる。なお、

$\text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ の等質空間表示はそれぞれ

$$\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = \text{SO}(n)/\text{S}(\text{O}(k) \times \text{O}(n-k)),$$

$$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \text{SU}(n)/\text{S}(\text{U}(k) \times \text{U}(n-k)),$$

$$\text{Gr}_k(\mathbb{H}^n) = \text{Sp}(n)/\text{Sp}(k) \times \text{Sp}(n-k)$$

である。なお、基礎体が $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ (ケーリーの八元数) の場合、 $\text{Gr}_k(\mathbb{O}^n)$ が対称空間になるのは、 $n=2, k=1$ の場合であり、通常この空間は \mathbb{O} 上の射影空間と呼ばれる。またその記号を $P^2(\mathbb{O})$ で表す。

定義 1.4. エルミート多様体 (M, g) で各点に正則等長な点対称 s_x が存在するとき、 M をエルミート対称空間と呼ぶ。

注意 1.5. エルミート対称空間を $M = G/K$ のように等質空間表示する場合、 G は正則等長変換群の単位連結成分とする。 K は注意 1.2 (2) と同じ一点の固定部分群である。

例 1.6. グラスマン空間 $\text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のときコンパクト型既約エルミート対称空間になる。

定義 1.7. M をエルミート対称空間とする。 $L \subset M$ が実形とは以下の条件を満たすこと： M 上の対合反正則等長変換 σ で $M^\sigma = \{x \in M \mid \sigma(x) = x\}$ の連結成分と L が同型になるようなものが存在する。

例 1.8. (1) $M = \mathbb{C}$ のときは $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \mapsto \bar{\alpha}$ (複素共役) とすることで、 $\mathbb{R} = \{a + 0\sqrt{-1} \mid a \in \mathbb{R}\}$ は \mathbb{C} の実形であることが確かめられる。

(2) 実グラスマン多様体 $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ は複素グラスマン多様体 $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の実形である。

定義 1.9. M が対称 R 空間とは以下の条件を満たすこと：コンパクト型エルミート対称空間 M' と M' の実形 L で $M \cong L$ となるものが存在する。

事実 1.10. 次のことはよく知られた事実である。

- (1) 対称 R 空間はコンパクト対称空間である。
- (2) コンパクト型エルミート対称空間は対称 R 空間である。

つまり模式的には次のようになる。

$$\{\text{コンパクト型エルミート対称空間}\} \subset \{\text{対称 } R \text{ 空間}\} \subset \{\text{コンパクト対称空間}\}$$

事実 1.11. “分解不可能な”対称 R 空間は分類されており、表 1 に一覧を載せている。Spaces の 1 列目にある空間はコンパクト型既約エルミート対称空間であり、Label はそのエルミート対称空間のラベル名を表している。詳しくは [4] を参照されたい。

2 大対蹠集合

1 節にて、対称空間は各点において点対称をもつ空間ということを見た。この 2 節では、対称空間の点対称と“相性の良い”有限部分集合である対蹠集合や大対蹠集合について必要事項を記述する。

表 1: 分解不可能な対称 R 空間のリスト

Label	Spaces				
AIII	$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$	$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$	$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{H}^n)$		
BDI	$Q_{n-2}(\mathbb{C})$	$Q_{p+1,q+1}(\mathbb{R})$	S^{n-1}		
CI	$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{Sp}(n)$
DIII	$\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SO}(n)$			
EIII	$\mathrm{E}_6/\mathrm{Spin}(10) \cdot T$	$\mathrm{G}_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$	$P^2(\mathbb{O})$		
EVII	$\mathrm{E}_7/\mathrm{E}_6 \cdot T$	$\mathrm{SU}(8)/\mathrm{Sp}(4) \cdot \mathbb{Z}_2$	$T \cdot \mathrm{E}_6/\mathrm{F}_4$		

定義 2.1 (Chen–Nagano [3]). リーマン対称空間 M の部分集合 X が対蹠集合であるとは, 任意の $x, y \in X$ について $s_x(y) = y$ を満たすこととする.

リーマン対称空間 M がコンパクトである場合には, M 内の対蹠集合は必ず有限集合であり, さらにその濃度は M のみに依存するある定数で抑えられる. すなわち,

$$\sharp_2 M := \max\{|X| \mid X \text{ は } M \text{ 内の対蹠集合}\}$$

が有限の値をとる. (cf. [3, 11]) なお $\sharp_2 M$ を M の 2 -number という.

定義 2.2. $S \subset M$ が大対蹠集合とは, S が M の対蹠集合であり, $|S| = \sharp_2 M$ を満たす.

事実 2.3 ([8, 12]). $M = G/K$ を対称 R 空間とする.

- (1) 任意の対蹠集合 X に対して, $X \subset S$ となる大対蹠集合 S が存在する.
- (2) 二つの大対蹠集合は合同. つまり任意の 2 つの大対蹠集合 S, S' に対して, ある $g \in G$ が存在し, $gS = S'$ が成り立つ.

注意 2.4. M が対称 R 空間でなければ, M 内で大対蹠集合の構造は一意でない. 例えば, 有向実グラスマン空間 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_k(\mathbb{R}^n)$ は対称 R 空間ではなく, 大対蹠集合の分類は難しい. しかし k が小さい場合には分類済みである. 詳細は Tasaki [13, 14] を参考にされたい.

例 2.5. $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ の大対蹠集合を考える. なお表 1 より, $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ は基礎体によらず対称 R 空間である. \mathbb{K}^n に内積を指定し, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を \mathbb{K}^n の正規直交基底とする. I を $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合とし, \mathbb{K}^n の部分空間 V_I を $V_I := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{e_i \mid i \in I\}$ で定める. このとき

$$S = \{V_I \mid |I| = k\}$$

は $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ の部分集合であり, $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ の任意の大対蹠集合は S と合同である. したがって,

$$|S| = \sharp_2 \mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^n) = \binom{n}{k}$$

を得る.

この節の最後に大対蹠集合の濃度と対称空間の位相的な不変量との関係を与える定理を述べる.

定理 2.6 (Chen–Nagano [3], Takeuchi [10]). M を対称 R 空間とし, S を M 内の大対蹠集合とすると,

$$|S| = \sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_k(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

が成り立つ. ただし $H_k(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数の k 次ホモロジー群である. とくに M がエルミート対称空間の場合は $\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_k(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は M のオイラー数 $\chi(M)$ と一致するので,

$$|S| = \chi(M)$$

が成り立つ.

3 距離可移グラフ

この節では代数的組合せ論で扱われる距離可移グラフの定義や性質について述べる. 詳しくは [1, 2] を参考にされたい. $\Gamma = (X, E)$ を有限単純グラフとし, 辺は無向なものとする. $\partial: X \times X \rightarrow \mathbb{N}$ を Γ の path distance とする. Γ の直径を D で表す.

定義 3.1. $\Gamma = (X, E)$ が距離可移グラフとは以下を満たすこと ; $\forall x, y, x', y' \in X$ with $\partial(x, y) = \partial(x', y')$, $\exists g \in \text{Aut}(\Gamma)$ such that $gx = x'$ and $gy = y'$.

注意 3.2. 距離可移グラフならば距離正則性を持つ. つまり, 任意の $i \in \{0, 1, \dots, D\}$ と任意の $x, y \in X$ with $\partial(x, y) = i$ に対して,

$$\begin{aligned} & |\{z \in X \mid \partial(x, z) = i, \partial(z, y) = 1\}|, \\ & |\{z \in X \mid \partial(x, z) = i + 1, \partial(z, y) = 1\}|, \\ & |\{z \in X \mid \partial(x, z) = i - 1, \partial(z, y) = 1\}| \end{aligned}$$

がそれぞれ, x, y の取り方によらず i のみに依存する定数になる. なおこれらの定数を *intersection number* といい, 上から順に a_i, b_i, c_i で表す.

注意 3.3. (1) 距離正則グラフが Γ は ℓ 正則ならば, $b_0 := \ell$ である. また, $b_D = 0$ や $c_1 = 1$ や任意の $i \in \{0, 1, \dots, D\}$ について $a_i + b_i + c_i = \ell$ といった性質が成り立つ.

(2) 距離正則グラフの隣接行列の相異なる固有値は $D+1$ であることが知られている. 以降それらの固有値を $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_D$ で表し, m_i を θ_i の重複度とする. また θ_i, m_i の組を $\{\theta_0^{m_0}, \theta_1^{m_1}, \dots, \theta_D^{m_D}\}$ で表し, これを Γ の *Spectrum* という.

定義 3.4. 注意 3.3 の $a_i + b_i + c_i = \ell$ より, a_i は b_0, b_i, c_i から決まる. $\{b_0, b_1, \dots, b_{D-1}; c_1, c_2, \dots, c_D\}$ を Γ の *intersection array* という.

例 3.5 (Hamming cube). $X = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ とし, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$ に対して, $(x, y) \in E$ であることを $|\{i \mid x_i \neq y_i\}| = 1$ であるときとして定める. このグラフ (X, E) を Hamming cube とよび, $H(n, 2)$ で表す. $H(n, 2)$ には対称群 S_n と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のリース積 $S_n \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が推移的に作用し, 特に $H(n, 2)$ は距離可移グラフになる. $H(n, 2)$ の等質空間表示は $(S_n \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) / S_n$ である.

$H(n, 2)$ の頂点数 $|X|$, 直径 D , valency ℓ , intersection array, Spectrum は知られている. これらの値は表 2 にまとめている.

例 3.6 (Johnson graph). X を $\{1, 2, \dots, n\}$ の k 点部分集合の集まりとし, $x, y \in X$ に対して, $(x, y) \in E$ であることを $|x \cap y| = k - 1$ であるときとして定める. このグラフ (X, E) を Johnson graph とよび, $J(n, k)$ で表す. $J(n, k)$ には対称群 S_n が推移的に作用し, 特に $J(n, k)$ は距離可移グラフになる. $J(n, k)$ の等質空間表示は $S_n/(S_k \times S_{n-k})$ である.

$J(n, k)$ の頂点数 $|X|$, 直径 D , valency ℓ , intersection array, Spectrum は知られている. これらの値は表 2 にまとめている.

他の距離可移グラフは, 例えば, Coxeter 群をある部分群で割った剰余類に適切な辺構造を入れることで得られる. この方法で得られるグラフを *Coxeter 距離正則グラフ* という. Coxeter 距離正則グラフやその分類について, 詳しくは [2] を参考にされたい. Coxeter 距離正則グラフは表 2 にある 6 つのグラフと, その他 2 つある.

表 2: いくつかの距離可移グラフと不変量

Name	$ X $	D	ℓ	intersection array	Spectrum
$J(n, k)$	$\binom{n}{k}$	k	$k(n - k)$	$b_i = (k - i)(n - k - i)$ $c_i = i^2$	$\theta_i = k(n - k) + i(i - n - 1)$ $m_i = \binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}$
CP_{2m}	$2m$	2	$2m - 2$	$b_i: 2m - 2, 1$ $c_i: 1, 2m - 2$	$\{2m - 2^1, 0^m, -2^{m-2}\}$
$H(n, 2)$	2^n	n	n	$b_i = n - i$ $c_i = i$	$\theta_i = n - 2i$ $m_i = \binom{n}{i}$
$\frac{1}{2}H(n, 2)$	2^{n-1}	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\binom{n}{2}$	$b_i = \frac{1}{2}(n - 2i)(n - 2i - 1)$ $c_i = i(2i - 1)$	$\theta_i = \frac{1}{2}n(n - 1) - 2i(n - i)$ $m_i = \binom{n}{i}$
Schläfli graph	27	2	16	$b_i: 16, 5$ $c_i: 1, 8$	$\{16^1, 4^6, -2^{20}\}$
Gosset graph	56	3	27	$b_i: 27, 10, 1$ $c_i: 1, 10, 27$	$\{27^1, 9^7, -1^{27}, -3^{21}\}$

4 主結果

M を分解不可能な対称 R 空間とし, S を M の大対蹠集合とする.

$$d_{\min}(S) := \min\{d_M(x, y) \mid x, y \in S, x \neq y\}$$

とおく.

定義 4.1 (S から得られるグラフ). $\Gamma_M(S) := (S, E)$, ただし $(x, y) \in E$ は $d_M(x, y) = d_{\min}(S)$ であることとする.

つまりグラフ $\Gamma_M(S)$ は “ S の最小距離を実現するような 2 点を辺で結ぶ” という方法で得られるグラフである. このグラフ $\Gamma_M(S)$ の性質について, 新たな結果がいくつか得られた. 以下の結果の証明の詳細は省略するが, 多くの場合は分解不可能な対称 R 空間の分類 (表 1) に依っていることに注意する.

定理 4.2 (K.-Okuda). $\Gamma_M(S)$ は距離可移グラフである. さらに $\Gamma_M(S)$ は表 2 の内のいずれかのグラフ. より正確には表 1 の各行が表 2 の各行に対応する.

定理 4.2 について, M がコンパクト型既約エルミート対称空間の場合は [6] で言及していたが, この定理は対称 R 空間の場合まで拡張できたことを意味している.

例 4.3. 表 1 の 1 行目の Label AIII に属する全ての空間の大対蹠集合は例 2.5 で与えていた. これらの S から得られるグラフ $\Gamma_M(S)$ は全て Johnson graph になる.

注意 4.4. M が分解可能な対称 R 空間の場合は, $\Gamma_M(S)$ は表 2 に出てくる距離可移グラフの直積になる.

2 節の定理 2.6 の見方を変えると, 各左辺は $\Gamma_M(S)$ の頂点のサイズ, 各右辺は M の位相的なデータを表すものであり, グラフデータと位相的なデータの間に関係があることを意味する. この視点で他にも $\Gamma_M(S)$ のグラフデータと M の位相的なデータの関連性を調べた. その結果を述べるためにいくつかの概念を導入する.

定義 4.5. M を対称 R 空間とする. $o \in M$ ごとに $\tilde{f}_o: M \rightarrow \mathbb{R}$ を長野の帯球関数と呼ばれるものが一意的に存在する. \tilde{f}_o の定義には多くの準備が必要となるので割愛する. 詳しくは [7, 9] を参考にされたい. \tilde{f}_o は Morse–Bott 関数であることが知られている.

Morse–Bott 関数の場合, 臨界点の集合は閉じた多様体になる. これを臨界多様体という. M の \tilde{f}_o に関する臨界多様体は一般に非連結になり, その連結成分の個数は $D+1$ であることが知られている. それらの連結成分の多様体を N_i ($0 \leq i \leq D$) とおく. d_i を N_i の指数とする.

定理 4.6 (K.-Okuda). M を対称 R 空間とし, S を M 内の大対蹠集合とする. 以下の記号は前までの記述に従う. このとき次が成り立つ.

- (1) $D = \text{rank } M$
- (2) $m_1 = \text{rank } G$
- (3) M は既約コンパクトエルミート対称空間とし, さらに M は simply laced (つまり Label が A,D,E から始まるもの) を仮定する. このとき
 - (a) $\ell = \dim_{\mathbb{C}} M$
 - (b) $2b_i = d_i$
- (4) M は (3) を満たすものとする. M の実形 L に対して, グラフ $\Gamma_L(S)$ のデータと M の位相的データの間には以下の関係がある.
 - (a) $\ell = \dim_{\mathbb{R}} M$
 - (b) $b_i = d_i$

注意 4.7. (1) $L = \text{Gr}_k(\mathbb{H}^n)$ については, L は $\text{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n})$ の実形であり, $4b_i = d_{2i}$ が成り立つ.

(2) $M = G/K$ で G が simply laced でない場合は次が成り立つ.

- (a) $\ell < \dim_{\mathbb{C}} M$
- (b) $2b_i < d_i$

注意 4.7 (2) より次のことが予想される。「 G が simply laced でない場合の $M = G/K$ に対して、 M の大対蹠集合 S を含む定理 4.6 (3) の等式が成り立つような部分エルミート対称空間 $M' \subset M$ が存在する」。この予想について実際次のような例がある。 $M = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ について、大対蹠集合 S を含むような M の部分エルミート対称空間 M' として $M' = S^1 \times \cdots \times S^1$ (S^1 の n 回直積) が取れる。この場合 M' は既約ではないが、 $\Gamma_{M'}(S)$ と M' について定理 4.6 (3) の等式が成り立つ。

また上記の定理において、対称 R 空間の分類によらない証明ができれば、根本的なグラフデータと多様体の位相的なデータの関係性が見えるのではないかと考えている。そして、 G が simply laced でない場合の M に対して、 M' を特定したい。

参考文献

- [1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I. Association schemes*. The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1984. MR882540
- [2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 18. Springer-Verlag, Berlin, 1989. MR1002568 <https://doi.org/10.1007/978-3-642-74341-2>
- [3] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre. *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), no. 1, 273–297. MR946443 <https://doi.org/10.2307/2000963>
- [4] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.-k. Lu, and G. Roos, *Analysis and geometry on complex homogeneous domains*. Progress in Mathematics, 185. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000. MR1727259 <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1366-6>
- [5] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Graduate Studies in Mathematics, 34. Corrected reprint of the 1978 original. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR1834454 <https://doi.org/10.1090/gsm/034>
- [6] H. Kurihara and T. Okuda, Hermite 対称空間の大対蹠集合におけるアソシエーションスキーム構造. 数理解析研究所講究録 **2053** (2017), 54–63.
- [7] T. Nagano, Transformation groups on compact symmetric spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **118** (1965), 428–453. MR182937 <https://doi.org/10.2307/1993971>
- [8] C. U. Sánchez, The index number of an R -space: an extension of a result of M. Takeuchi's. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 3, 893–900. MR1343722 <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-03517-X>
- [9] M. Takeuchi, Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **12** (1965), 81–192 (1965). MR216517
- [10] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces. *Nagoya Math. J.* **115** (1989), 43–46. MR1018081 <https://doi.org/10.1017/S0027763000001513>
- [11] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type. *J. Math. Soc. Japan* **64** (2012), no. 4, 1297–1332. MR2998924 <https://doi.org/10.2969/jmsj/06441297>

- [12] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces. *Osaka J. Math.* **50** (2013), no. 1, 161–169. MR3080635 <http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1364390424>
- [13] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds. *Internat. J. Math.* **24** (2013), no. 8, 1350061, 28. MR3103877 <https://doi.org/10.1142/S0129167X13500614>
- [14] H. Tasaki, Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds. *Internat. J. Math.* **26** (2015), no. 6, 1541008, 12. MR3356879 <https://doi.org/10.1142/S0129167X15410086>