On an integer matrix for a finite group

熊本大学大学院先端科学研究部　千吉良直紀
Naoki Chigira
Department of Mathematical Sciences,
Kumamoto University

1 Introduction

有限群 G の共役類を $C_1 = \{1\}, C_2, \cdots, C_s$, 既約指標を $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1 = 1_G, \cdots, \chi_s\}$ とする。$x_j \in C_j$ とする。$X = (\chi_i(x_j))$ を指標表の行列とし，既約指標の次数を並べた対角行列を $D = \mathrm{diag}(\chi_1(1), \cdots, \chi_s(1))$ とする。また，$C = \mathrm{diag}(|C_G(x_1)|, \cdots, |C_G(x_s)|)$ とする。指標の第 1 直交関係は

$$XC^{-1}\,{}^t\overline{X} = I_s$$

である。また，指標の第 2 直交関係より

$${}^t\overline{X}X = C$$

である。

$$M_n = {}^t\overline{X}D^nX$$

とおく。M_n の (i,j) 成分を $m_n(i,j)$ と書くことにすると

$$m_n(i,j) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(x_i^{-1})\chi(1)^n\chi(x_j)$$

である。特に，$n = 0$ のときには

$$m_0(i,j) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(x_i^{-1})\chi(x_j) = \begin{cases} |C_G(x_i)| & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので，$M_0 = C$ である。

Example 1.1. $G = S_3$ のとき，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

なので，

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2+2^{n+2} & 0 & 2-2^{n+1} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 0 & 2+2^n \end{pmatrix}$$

である。特に，

$$M_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

である。 □

Example 1.2. $G = A_5$ のとき，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & (1+\sqrt{5})/2 & (1-\sqrt{5})/2 \\ 3 & -1 & 0 & (1-\sqrt{5})/2 & (1+\sqrt{5})/2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，同様に計算してみると

$$M_1 = \begin{pmatrix} 244 & 8 & -8 & -6 & -6 \\ 8 & 12 & -4 & -2 & -2 \\ -8 & -4 & 10 & -3 & -3 \\ -6 & -2 & -3 & 14 & -1 \\ -6 & -2 & -3 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

となる。 □

Remark 1.3. $\det(M_n) = \displaystyle\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^n \prod_{j=1}^{s} |C_G(x_j)|$ である。 □

ξ を 1 の原始 $|G|$ 乗根とする。$\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ と $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi^\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ であるから，$m_n(i,j)$ は σ で不変になる。したがって次が成り立つ。

Proposition 1.4. $n \in \mathbb{Z}$ とする。

(1) $m_n(i,j) \in \mathbb{Q}$

(2) M_n は対称行列である。

(3) $n \geq 0$ のとき，M_n は整数行列である。

$n \geq 0$ のときの M_n が表題の整数行列である。このように簡単に作ることができる行列の性質や行列を用いてわかることなどについて述べる。

2 Elementary properties of M_n

まずは簡単にわかる性質について述べる。

Lemma 2.1. $v = {}^t\begin{pmatrix} \frac{|G|}{|C_G(x_1)|} & \cdots & \frac{|G|}{|C_G(x_s)|} \end{pmatrix}$, $\mathbb{1} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$Mv = |G|\mathbb{1}$ が成り立つ。

次に $M_n^{-1} = (\ell_{i,j})$ すると

$$\begin{aligned} \ell_{i,j} &= \frac{1}{|C_G(x_i)||C_G(x_j)|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x_i^{-1})\chi(1)^{-n}\chi(x_j) \\ &= \frac{1}{|C_G(x_i)||G|} \sum_{C_G(x_j)z \in C_G(x_j)\backslash G} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^{1-n}\chi(x_i^{-1}x_j^z) \end{aligned}$$

となる。ここで，最後の等式を示すには [3, p.45, (3.12)] を用いればよい。これを用いて次のことがわかる。

Lemma 2.2. $n \leq 1$ ならば，$|G|^2 M_n^{-1}$ は整数行列である。

M_1 の $s = |\mathrm{Irr}(G)|$ 個の単因子を $t_1, \cdots, t_s$ $(t_i \mid t_{i+1}$ $(i = 1, \cdots s-1))$ とすると，$|G|^2 M_1^{-1}$ の単因子は $|G|^2/t_s, \cdots, |G|^2/t_1$ となるので，次のことがわかる。

Theorem 2.3. M_1 の単因子のうち最大のものを t_s とすると，t_s は $|G|^2$ の約数である。

M_1 の $s = |\mathrm{Irr}(G)|$ 個の単因子を $t_1, \cdots, t_s$ $(t_i \mid t_{i+1}$ $(i = 1, \cdots s-1))$ とする。M_1 の行列式は $\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1) \prod_{j=1}^{s} |C_G(x_j)|$ なので

$$(1)\quad t_1 \cdots t_s = \prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1) \prod_{j=1}^{s} |C_G(x_j)|$$

また，Theorem 2.3 より

$$(2)\quad t_i \mid |G|^2$$

である。M_1 の単因子は指標の次数，元の中心化群に関係した「良い」性質を持った数たちになっているはずである。どのような数が現れるのか，またそれらの数に群論的にどのような意味があるかなど，もっと調べる価値があると思われる。

3 Brauer-Wielandt の定理の拡張

G の部分集合 S に対して，群環 $\mathbb{C}G$ の元 $\sum_{s \in S} s$ を $\overline{S}$ と書くことにする。共役類 $C_1, \cdots, C_s$ に対して，$\overline{C_1}, \cdots, \overline{C_s}$ は群環 $\mathbb{C}G$ の中心 $Z(\mathbb{C}G)$ の基底をなす。ここでいう Brauer-Wielandt の定理および Harada によるその拡張とは次の定理である。

Theorem 3.1 ([1, 2])**.** $\alpha = x_1 \cdots x_s$ とするとき，

$$\prod_{j=1}^{s} \overline{C_j} = \left(\frac{\prod_{j=1}^{s} |C_j|}{|G'|} \right) \overline{G'\alpha}$$

が成り立つ。

基底 $\{\overline{C_1}, \cdots, \overline{C_s}\}$ に関する M_n の線形写像

$$\begin{array}{cccc} f_n: & Z(\mathbb{C}G) & \longrightarrow & Z(\mathbb{C}G) \\ & \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ & \sum_{j=1}^{s} a_j \overline{C_j} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \overline{C_1} & \cdots & \overline{C_s} \end{pmatrix} M_n \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。すなわち，

$$\begin{pmatrix} f_n(\overline{C_1}) & \cdots & f_n(\overline{C_s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{C_1} & \cdots & \overline{C_s} \end{pmatrix} M_n$$

である。特に

$$f_n(\overline{C_j}) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x_i^{-1}) \chi(1)^n \chi(x_j) \right) \overline{C_i} = |G| \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^{n-1} \chi(x_j) e_\chi$$

となる。ここで $e_\chi = \dfrac{\chi(1)}{|G|} \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \chi(x_k^{-1}) \overline{C_k}$ は $Z(\mathbb{C}G)$ の原始べき等元である。

Example 3.2. $G = S_3$ とする。$\overline{C_1} = (1)$, $\overline{C_2} = (1,2) + (1,3) + (2,3)$, $\overline{C_3} = (1,2,3) + (1,3,2)$ とすると，

$$f_1(\overline{C_1}) = 10\overline{C_1} - 2\overline{C_3}, \quad f_1(\overline{C_2}) = 2\overline{C_2}, \quad f_1(\overline{C_3}) = -2\overline{C_1} + 4\overline{C_3}$$

となる。 □

Theorem 3.1 は f_n を用いて次のように拡張できる。

Theorem 3.3. $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha = x_1 \cdots x_s$ とするとき，

$$\prod_{j=1}^{s} f_n(\overline{C_j}) = \frac{|G|^s}{|G'|} \overline{G'\alpha}$$

が成り立つ。

Remark 3.4. $n = 0$ のときには

$$f_0(\overline{C_j}) = |C_G(x_j)| \overline{C_j}$$

となるので，

$$\prod_{j=1}^{s} f_0(\overline{C_j}) = \prod_{j=1}^{s} |C_G(x_j)| \overline{C_j} = \prod_{j=1}^{s} |C_G(x_j)| \prod_{j=1}^{s} \overline{C_j}$$

となる。Theorem 3.3 より，Theorem 3.1 が得られる。 □

4　二次形式

M_n が対称行列なので，M_n を用いて二次形式を考えることができる。ここではその「特殊値」を考える。

Theorem 4.1. $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \overline{C_1} & \cdots & \overline{C_s} \end{pmatrix} M_n \begin{pmatrix} \overline{C_1} \\ \vdots \\ \overline{C_s} \end{pmatrix} = |G|^2 \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \\ \chi = \overline{\chi}}} \chi(1)^{n-2} e_\chi$$

G が奇数位数の群のときには $\chi = \overline{\chi}$ となる $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ は $\chi = 1_G$ に限るので，次のことがわかる。

Corollary 4.2. $n \in \mathbb{Z}$ とする。次は同値。

(1) G は奇数位数である。

(2) $\begin{pmatrix} \overline{C_1} & \cdots & \overline{C_s} \end{pmatrix} M_n \begin{pmatrix} \overline{C_1} \\ \vdots \\ \overline{C_s} \end{pmatrix} = |G|\overline{G}$

群が奇数位数であると M_n に対してこのような不思議な性質があることがわかった。このように M_n を用いてもっと色々な面白い性質が導かれるのではないかと期待している。

References

[1] R. Brauer, On the structure of groups of finite order, Proc. Inter. Cong. Math., Amsterdam (1954), North-Holland, Amsterdam, 1957 Vol. I, 209–217.

[2] K. Harada, On a theorem of Brauer and Wielandt, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008) 3825-3829.

[3] M. I. Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press, New York (1976).