Centrally large subgroups of finite groups

熊本大学・自然科学教育部 松本 恭平
Kyohei Matsumoto,
Graduated School of Science and Technology,
Kumamoto University

1 Introduction and Definition

2006 年に論文 [3] にて Glauberman が Centrally large subroups (CL-部分群) というものを p-群に導入した。

Definition 1.1 ([3], p. 482 and [2], p. 262)**.** S を p-群とする。

$$\begin{aligned} f_1(S) &= max\{\,|Q||C_S(Q)| \mid Q \leqslant S\,\}, \\ \mathscr{F}_1(S) &= \{\,Q \leqslant S \mid |Q||C_S(Q)| = f_1(S)\}, \\ f(S) &= max\{\,|Q||Z(Q)| \mid Q \leqslant S\,\}, \\ \mathscr{F}(S) &= \{\,Q \leqslant S \mid |Q||Z(Q)| = f(S)\}. \end{aligned}$$

とそれぞれ定義し、$\mathscr{F}(S)$ に属する部分群を S の *centrally large subgroup*（*CL-subgroup*）、さらに包含関係に関して極小な $\mathscr{F}(S)$ の元を S の *minimal CL-subgroup* という。

この定義は有限 p-群にだけではなく、一般の有限群 G にも $f_1(G)$, $\mathscr{F}_1(G)$, $f(G)$, $\mathscr{F}(G)$ と定義できる。以下、CL-subgroups を一般の有限群に定義し、Glauberman が [3] で示したいくつかの結果が一般の有限群でも証明出来ることを解説する。また本稿では特に断りがない限り p を任意の素数、S を有限 p-群、そして G を一般の有限群とする。

2 Some basic results

まず、[3] で与えられている証明方法がそのまま一般の有限群の場合の証明に適用できる結果をいくつか述べる。以下は $\mathscr{F}_1(S)$ の性質で基本的なものである。

Theorem 2.1 (cf. [3], Theorem 2.1)**.** A, B を $\mathscr{F}_1(S)$ に属する部分群とする。このとき以下が成り立つ。

(a) $AB = BA \in \mathscr{F}_1(S)$, $A \cap B \in \mathscr{F}_1(S)$,

(b) $C_S(A \cap B) = C_S(A)C_S(B)$.

Theorem 2.2 (cf. [3], Proposition 2.3.)**.** Q を $\mathscr{F}_1(S)$ に属する部分群とすると以下が成り立つ。

(a) $C_S(C_S(Q)) = Q$,

(b) $C_S(Q) \in \mathscr{F}_1(S)$.

Theorem 2.1 から $\mathscr{F}_1(S)$ は lattice になっていることが分かる。

Corollary 2.3 (cf. [3], Collorary 2.2.)**.** $\mathscr{F}_1(S)$ は包含関係に関して唯一最大元と最小元を持っている。

以下の定理は $\mathscr{F}_1(S)$ と $\mathscr{F}(S)$ に関して重要な結果である。

Theorem 2.4 ([3], Proposition 2.4.)**.** Q を $\mathscr{F}_1(S)$ に属する部分群とする。このとき以下が成り立つ。

(a) $f_1(S) = f(S)$,

(b) $\mathscr{F}(S) \subseteq \mathcal{F}_1(S)$,

(c) Q が $\mathscr{F}(S)$ に属することと $C_S(Q) \subseteq Q$ が成り立つことは同値である。

Theorem 2.5 (cf. [3], Corollary 2.6.)**.** Q を $\mathscr{F}(S)$ に属する部分群とすると $Z(Q) = C_S(Q)$ が成り立つ。

[3] と同じ証明方法を用いると Theorem 2.1, Theorem 2.2, Corollary 2.3, Theorem 2.4, Theorem 2.5 はそれぞれ一般の有限群においても同じ結果が得られる。

次に、Zuccari, Russo, Scoppola が証明した $\mathscr{F}_1(G)$ の最大元と最小元に関する結果を述べる。

Theorem 2.6 ([6], Lemma 2.1)**.** 以下が成り立つ。

(a) R_0 を $\mathscr{F}_1(S)$ の最大元とする。このとき $C_S(R_0) = Z(R_0)$ であり、$C_S(R_0)$ は $\mathscr{F}_1(S)$ の最小元となる。

(b) Q_0 を $\mathscr{F}_1(S)$ の最小元とする。このとき $C_S(Q_0)$ は $\mathscr{F}_1(S)$ の最大元となる。

この定理も [6] で使われている証明法をそのまま適用することにより一般の有限群の場合も成り立つことが保証される。

3 Subnormality of the subgroups in $\mathscr{F}_1(G)$

この章では以下の定理が一般の有限群で成り立つことを示すアウトラインを解説する。

Theorem 3.1 ([3], Lemma 2.9.)**.** $Z(S)$ を真に含むような S の正規アーベル部分群 A を任意にとると $|A||C_S(A)| < |S||Z(S)|$ を満たしているとき、G の *CL-subgroup* は G 自身のみになる。

この定理の証明には「極大部分群は全て正規部分群になる」という p-群（べき零群）の性質が使われているので [3] の証明方法をそのまま一般の有限群の場合で適用することは出来ない。そこで $\mathscr{F}_1(G)$ に属する部分群は G の subnormal subgroup であることをまず示し、それを使って Theorem 3.1 を一般の有限群の場合で証明する。

$\mathscr{F}_1(G)$ に属する部分群が subnormal であることは [1] で Brewster と Wilcox が既に証明しているが以下の補題を用いればその証明を遥かに短く簡単にすることが出来る。

Lemma 3.2 ([5], Theorem 2.8.)**.** H を G の部分群とする。$HH^x = H^xH$ が任意の $x \in G$ で成り立っているとき、H は G の *subnormal subgroup* である。

Lemma 3.3. $Q \in \mathscr{F}_1(G)$ とすると Q は G の *subnormal subgroup* である。特に Q が真部分群であるとき、Q を含む G の真正規部分群が取れる。

Proof. x を G の任意の元とする。このとき $Q^x \in \mathscr{F}_1(G)$ であるので Theorem 2.1 より $QQ^x = Q^xQ$ が成り立つ。よって Lemma 3.2 より Q は G の subnormal subgroup である。 □

Corollary 3.4. Q を $\mathscr{F}_1(G)$ に属する真部分群とする。このとき $\langle Q^G \rangle$ も G の真部分群である。

また [3] の Lemma 2.9 の証明を用いると以下が成り立つ。

Lemma 3.5. *T を proper な G の CL-subgroup とする。このとき $Z(G) \subsetneq Z(\langle T^G \rangle)$ である。*

以上で述べた Lemma 3.5 を使うと Theorem 3.1 が一般の有限群の場合で証明出来る。

また Theorem 3.1 は逆も示すことが出来、そのためには以下の定理が必要になる。

Theorem 3.6. $\mathscr{F}(G) = \{\ C_G(A) \mid A \in \mathscr{F}_1(G) : abelian\}$.

Proof. Q を G の CL-subgroup とする。このとき Theorem 2.2 より $Q = C_G(C_G(Q))$ と $C_G(Q) \in \mathscr{F}_1(G)$ が成り立つ。また Theorem 2.5 より $Z(Q) = C_G(Q)$ が成り立つので $Q = C_S(Z(Q))$ となる。

逆に A を $\mathscr{F}_1(G)$ に属するアーベル部分群とすると、Theorem 2.2 より $C_G(A) \in \mathscr{F}_1(G)$ である。また Theorem 2.2 より

$$C_G(C_G(A)) = A \subseteq C_G(A).$$

Theorem 2.4 (c) を再度使うことにより $C_G(A) \in \mathscr{F}(G)$ が得られる。 □

以上で得られた結果を使うと Theorem 3.1 を更に一般化した定理が手に入る。

Theorem 3.7. 以下は同値である。

(1) *G の CL-subgroup は G のみである。*

(2) $Z(S)$ を真に含むような S の正規アーベル部分群 A を任意にとると $|A||C_S(A)| < |S||Z(S)|$ を満たしている。

Theorem 3.8. 以下は同値である。

(1) $G \in \mathscr{F}(G)$,

(2) $Z(S)$ を真に含むような S の正規アーベル部分群 A を任意にとると $|A||C_S(A)| \leqq |S||Z(S)|$ を満たしている。

参考文献

[1] B. Brewster, E. Wilcox, Some groups with computable chermak-delgado lattices, Bull. Aust. Math. Soc., 86 (2012), pp. 29-40.

[2] A. Chermak, A. Delgado, A measuring argument for finite groups, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989) 907-914.

[3] G. Glauberman, Centrally large subgroups of finite p-groups, J. Algebra 300 (2006) 480-508.

[4] G. Glauberman, A pair of characteristic subgroups for pushing-up II, Proc. Edinb., 56 (2013), pp. 71-133

[5] M. Isaacs, Finite Group Theory (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 92), American Mathematical Society, (2008)

[6] A.M. Zuccari, V. Russo, C.M. Scoppola, The Chermak-Delgado measure in finite p-groups, J. Algebra 502 (2018) 262-276.