On V-internal intertwining operators

安部　利之（愛媛大学）[1]

1　序

頂点作用素代数の表現論において, 既約加群の分類と既約加群の間の fusion 則を決定することは基本的な課題である. その結果として, 既約加群の同型類が有限個になることと既約加群の圏が完全可約になることがあり, そのような頂点作用素代数は C_2-余有限性と有理性と呼ばれる二つの性質を併せ持つことが多い. これらの性質は, 当初同値なものと考えられていたが, 近年では C_2-余有限性が加群の圏の性質を比較的に良いものにしており, その圏が半単純になるという性質が有理性に対応するものととらえられることもある. 実際, C_2-余有限性を持ち非有理的な頂点作用素代数が存在するが, 逆に有理的であるが C_2-余有限性を持たない頂点作用素代数は現在まで見つかっていない.

頂点作用素代数から, 新しい頂点作用素代数を構成する代表的な方法として, オービフォールド模型を構成する方法とコミュタントを構成する方法の 2 種類がある. オービフォールド模型は頂点作用素代数 V の有限自己同型群 G の固定点を取って得られる部分頂点作用素代数 V^G であり, コミュタントは頂点作用素代数 V の部分頂点作用素代数 U に対し, その作用が U の作用と可換になる極大部分頂点作用素代数 U^c をとって得られるものである. そして, 予想として, V やその部分頂点作用素代数 U が C_2-余有限性や有理性をもてば, V^G や U^c もその性質をもつというものがある. この予想に関して, G が有限可解群のとき, V^G の C_2-余有限性が宮本氏 ([[7]) によって証明されており, また, 有限群 G に対し, V^G が C_2-余有限ならば有理的であることが Carnahan 氏と宮本氏によって解決されている ([1], cf. [6]). コミュタントについては, まだ一般論的な予想の解決はされていないが, 本研究成果は, コミュタントの場合に C_2-余有限性に関しての予想の解決に向けた研究の過程で得られた成果の一つである.

C_2-余有限性は V が内包する性質であり, V の $a_{(-2)}b,\ a, b \in V$ で張られる部分空間が V において有限余次元を持つという性質である. 宮本氏はその研究において, V が C_2-余有限性をもつ単純頂点作用素代数の場合, その部分頂点作用素代数 W で V が有限個の既約 W-加群に分解するようなものについて, W の C_2-余有限性は V に現れる一つの既約 W-加群 M とその制限双対の C_2-余有限から導かれることを示した. そして, M の C_2-余有限性は, V の頂点作用素から得られる V に現れる既約加群達の間の intertwining operator について調べることで, それを証明するための情報が得られると考えた. この考えは, [7] の根底で用いられているものであり, G が巡回群の場合 V^G の C_2-余有限性の証明に成功している. 今回はこの, V の頂点作用素から得られる intertwining operator を V-internal intertwining operator と呼び, その定義やいくつかの性

---

[1] 本研究は科研費基盤研究 (C) 19K03403 の助成を受けたものである.

質を紹介する. 特に W がオービフォールド模型と有理的 C_2-余有限な部分頂点作用素代数 U のコミュタント U^c の場合を統一的に扱いながら述べる.

本研究成果は Ching Hung Lam 氏, 宮本雅彦氏との共同研究に基づくものである. また講演の機会を与えて頂いた研究代表の野崎寛氏にはこの場を借りて感謝いたします.

2 コミュタントとオービフォールド模型

頂点作用素代数は $(V, Y, \mathbf{1}, \omega^V)$ の四つ組で定義される可算無限個の積を持つ代数系である. V は $\mathbb{C}$ 上の (無限次元) ベクトル空間で, Y は

$$Y(a,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}x^{-n-1}\in \mathrm{End}\,(V)[[x,x^{-1}]]$$

で得られる V から $\mathrm{End}\,(V)[[x,x^{-1}]]$ への線形写像で頂点作用素写像と呼ばれる. 整数 $n\in\mathbb{Z}$ に対し, $a_{(n)}$ は V に積 $a_{(n)}b:=a_{(n)}(b)$ を定める. 実際には, $Y(a,x)$ は場条件という物を満たしていて, $a_{(n)}b=0$, $n\gg 0$ を満たしていると仮定する. その仮定の下で, 可算無限個の積 $\cdot_{(n)}\cdot$ は, Borcherds 恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\infty}\binom{q}{i}(a_{(p+i)}b)_{(q+r-i)}c\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(-1)^i\left(a_{(p-i)}b_{(q+r+i)}c-b_{(p+r-i)}a_{(q+i)}c\right),\end{aligned} \tag{2.1}$$

$a,b,c\in V$, $p,q,r\in\mathbb{Z}$ を満たしていると仮定する.

$\mathbf{1}$ は**真空元**と呼ばれており, $Y(\mathbf{1},x)=\mathrm{id}_V$ を満たしている. ω^V は **Virasoro 元**と呼ばれており, $L^V_n=\omega^V_{(n+1)}$ と定めたとき, 中心電荷 c_V の Virasoro 代数の交換関係が成立する:

$$[L^V_m, L^V_n]=(m-n)L^V_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}c_V\delta_{m+n,0}\mathrm{id}_V,\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

更に $Y(L^V_{-1}a,x)=\frac{d}{dx}Y(a,x)$ が成り立ち, V は L^V_0 の**ウェイト** と呼ばれる非負整数固有値 n の有限次元固有空間 V_n の直和に分解している.

頂点作用素代数は部分空間 $\langle a_{(-2)}b | a,b\in V\rangle$ が V において有限余次元であるとき **C_2-余有限性**をもつと呼ぶ.

頂点作用素代数の**弱加群** (M,Y) は $Y : V \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)[[x,x^{-1}]], a \mapsto Y(a,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}x^{-n-1}$ が与えられ, 場条件 $a_{(n)}u=0$, $n\gg 0$ と $a,b\in V$, $c\in M$ のとき Borcherds 恒等式 (2.1) が成り立つようなベクトル空間 M のことである. 頂点作用素代数の加群は $L^V_n=\omega^V_{(n+1)}$ と定めることにより中心電荷 c_V の Virasoro 代数の加群となる. しかし一般には L^V_0 は半単純ではなく, M 上 L^V_0 が半単純でその固有空間が有限次元となるとき, M は **V-加群**と呼ばれる. 一方弱加群 M は非負整数 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の次数付け $M=\oplus_{d=0}^{\infty}M(d)$ が与えられ,

$a \in V_k$ と $u \in M(d)$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $a_{(n)}u \in M(k+d-n-1)$ が成り立つとき, **許容加群**と呼ばれる. 任意の許容加群が既約許容加群の直和に分解されるとき, V は**有理的**であるという. V が C_2-余有限性をもつとき, 任意の弱加群は許容加群となり, 従って有理的であれば, 任意の弱加群は既約 V-加群の直和になる.

任意の V-加群に対し, その双対空間 M^* には,

$$\langle Y(a,x)f, u\rangle = \langle f, Y(e^{xL_1^V}(-x^{-2})^{L_0}a, x^{-1})u\rangle$$

によって, V の作用, つまり頂点作用素 $Y(a,x)$, $a \in V$ が定義できる. しかし, 場条件が成立しないので, V-加群にはならない. M は L_0^V の固有空間に分解しているが, L_0^V-固有空間の双対空間の直和 M' を**制限双対**と呼ぶ. 制限双対の元上では V の作用は場条件を満たすので, 制限双対 M' は V-加群となる.

3 つの弱 V-加群 M^1, M^2, M^3 に対し, 線形写像

$$\mathcal{Y} : M^1 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M^2, M^3)\{x\}, \quad u \mapsto \mathcal{Y}(u,x) = \sum_{n\in\mathbb{C}} u_{(n)}x^{-n-1}$$

は, 場条件; 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$, $u_{(\lambda+n)}v = 0$, $\mathrm{Re}(n) \gg 0$ 及び Borchreds 恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty}\binom{q}{i}(a_{(p+i)}u)_{(q+r-i)}v \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(-1)^i\left(a_{(p-i)}u_{(q+r+i)}v - u_{(p+r-i)}a_{(q+i)}v\right),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$a \in V$, $u \in M^1$, $v \in M^2$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{C}$ を満たし, 更に

$$\mathcal{Y}(L_{-1}^V u, x) = \frac{d}{dx}\mathcal{Y}(u,x)$$

を満たすとき, $\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ 型の **intertwining operator** と呼ぶ. $\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ 型の intertwining operator 全体のなすベクトル空間を $I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ と表し, その次元を **fusion 則**と呼ぶ. 次は共形場理論における, 共形ブロックに相当するものを与える補題である.

補題 2.1. *M^1, M^2, M^3 を V-加群とする. このとき, 任意の $\mathcal{Y} \in I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ と, $u^1 \in M^1$, $u^2 \in M^2$, $u^3 \in (M^3)'$ に対し,*

$$\langle u^3, x^{-L_0^V}\mathcal{Y}(x^{L_0^V}u^1, x)x^{-L_0^V}u^2\rangle$$

は x に依存しないスカラーである.

この補題により, 単射線形写像 $\phi_V : I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2} \to (M^1 \otimes M^2 \otimes (M^3)')^*$ が

$$\phi_V(\mathcal{Y})(u^1 \otimes u^2 \otimes u^3) := \langle u^3, x^{-L_0^V}\mathcal{Y}(x^{L_0^V}u^1, x)x^{-L_0^V}u^2\rangle$$

によって得られる.

頂点作用素代数 V に対し, その部分空間 U は V の n-積 $\cdot_{(n)}\cdot$ で閉じており, $\mathbf{1}\in U$ で, あるベクトル ω^U が存在し, $(U,Y,\mathbf{1},\omega^U)$ が頂点作用素代数となるとき, **部分頂点作用素代数**と呼ぶ. $\omega^U=\omega^V$ を満たすとき, U は**充満**であるという. 部分頂点作用素代数 U に対し,

$$U^c=\{v\in V|u_{(i)}v=0,\, i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

は $\omega^{U^c}=\omega^V-\omega^U$ とおくことで, 部分頂点作用素代数となることが知られている ([3]). この部分頂点作用素代数 U^c を U の V における**コミュタント**とよぶ.

部分頂点作用素代数 U が C_2-余有限性をもち, 有理的な場合, V は U-加群として完全可約となるので, $\{U_i\}_{i\in\Delta}$ を V に現れるすべての非同値な既約 U-加群の集合とすれば,

$$V=\oplus_{i\in\Delta}U^i\otimes W^i \tag{2.3}$$

と表されることがわかる. ここで

$$W^i=\mathrm{Hom}_U(U^i,V)$$

である. 今 $0\in\Delta$ とし $U^0=U$ とすると, $W:=W^0=\mathrm{Hom}_U(U,V)\cong U^c$ となることがわかる. 実際 $f\in W$ は $f(\mathbf{1})\in U^c$ と同一視できる. 従って, $U\otimes U^c$ は V の部分頂点作用素代数で $\omega^V=\omega^U+\omega^W$ となるため, 充満であることもわかる. 更に, $(Y(f^1,x)f^2)(u)=Y(f_1(\mathbf{1}),x)f^2(u)$, $f^1\in W$, $f^2\in W^i$, $u\in U^i$ により, W^i は W-加群としての構造をもつこともわかる. このように V は $U\otimes W$ を充満部分頂点作用素代数としてもち, $U\otimes W$-加群として, (2.3) の形に分解される.

ここで注意することは U^i は既約であるが W^i は既約となるかどうかは今のところ未解決であるということと, U^i 達は非同値であるが, W^i 達は非同値とは限らないことである. 既約性に関してはおそらく成り立つと思われるが, 非同値性に関しては反例が知られている.

頂点作用素代数 V に対し, $g\in\mathrm{GL}(V)$ が $g(a_{(n)}b)=g(a)_{(n)}g(b)$, $g(\omega^V)=\omega^V$, $a,b\in V$, $n\in\mathbb{Z}$ を満たすとき, V の**自己同型**と呼び, 全自己同型のなす群を $\mathrm{Aut}\,(V)$ と表す. 有限自己同型群 $G\subset\mathrm{Aut}\,(V)$ に対し, $V^G=\{v\in V|g(v)=v, g\in G\}$ を V の G による**オービフォールド模型**とよぶ. V^G は充満部分頂点作用素代数となり, V は V^G の加群となる.

V^G-加群として V は次の様に分解する. まず $\mathrm{Irr}\,(G)$ を G の複素既約指標全体の集合とし, M_χ を既約指標 χ をもつ $\mathbb{C}G$-加群とする. このとき,

$$V_\chi=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M_\chi,V)$$

と定めると,

$$V=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)}V_\chi\otimes M_\chi. \tag{2.4}$$

更に, V_χ は $(Y(a,x)f)(u)=Y(a,x)f(u)$, $a\in V^G$, $f\in V_\chi$, $u\in M_\chi$ により, 自然に V^G-加群の構造をもつ. このとき次の定理が基本的である.

定理 2.2. ([2]) V を頂点作用素代数, G をその有限自己同型群とし, 分解 (2.4) を考える. このとき, 任意の $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$ に対し, $V_\chi\neq 0$ で, V^G-加群として既約である. 更に χ, $\mu\in\mathrm{Irr}\,(G)$ が非同値であれば $V_\chi\not\cong V_\mu$ である.

今, $\mathrm{Irr}\,(G)=\{\chi_i|i\in\Delta\}$ とおき, $0\in\Delta$ とし χ_0 を自明指標とする. この設定の元で, $U^i=M_{\chi_i}$, $W^i=V_{\chi_i}$ とおけば, V は (2.3) の形に分解することがわかる.

V が $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ (この性質をもつとき CFT-型であるという) を満たし, $L_1^VV_1=0$ を仮定する. このとき, $a_{(k+l-1)}b=\langle a,b\rangle\mathbf{1}$, $a\in V_k$, $b\in V_l$ により, 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が得られる. この内積は

$$\langle Y(a,x)b,c\rangle=\langle b,Y(e^{xL_1^V}(-x^{-2})^{L_0^V}a,x^{-1})c\rangle,\quad a,b,c\in V$$

を満たす. この性質を保つ内積を不変内積とよぶ. V が単純であれば, この内積は非退化となる. 非退化な不変内積をもつことは V とその制限双対が同型であることと同値であり, このとき V は**自己双対**であるという. 分解 (2.3) に関し, $i\in\Delta$ に対し, ある $\bar{i}\in\Delta$ が存在し,

$$\langle U^i\otimes W^i,U^j\otimes W^j\rangle=0,\quad \text{if } i\neq\bar{j}$$

で, $(U^i\otimes W^i)\times(U^{\bar{i}}\otimes W^{\bar{i}})$ 上非退化となることがわかる. またこのことより $(U^i)'\cong U^{\bar{i}}$, $(W^i)'\cong W^{\bar{i}}$ がわかる.

3 V-intertwining operators

V-intertwining operator を定義する. その設定として, V は自己双対, CFT-型の単純頂点作用素代数で, 部分頂点作用素代数の加群としてまたはオービフォールド模型の加群として V は (2.3) の形に分解される状況を考えている. ここで $0\in\Delta$ であり, コミュタントの場合は $U^0=U$ が C_2-余有限性を持つ有理的部分頂点作用素代数であり, オービオフォールドの場合は, 考えている有限自己同型群 G に対し, $U=U^0$ は G の自明加群 $\mathbb{C}$ である. 説明を統一するために, オービフォールドの場合 $U=\mathbb{C}$ は $\omega^U=0$ の頂点 (作用素) 代数とみなし, $L_n^U=0$, $n\in\mathbb{Z}$ と考える.

定義 3.1. 自己双対, CFT-型の単純頂点作用素代数 V が分解 (2.3) をもつとする. このとき, $i,j,k\in\Delta$ と, $u^1\in U^i$, $u^2\in U^j$, $u^3\in(U^k)'$ に対し,

$$\langle w^3,\mathcal{I}_{u^1,u^2}^{u^3}(w^1,x)w^2\rangle=\langle u^3\otimes w^3,x^{-L_0^U}Y(x^{L_0^U}u^1\otimes w^1,x)x^{L_0^U}u^2\otimes w^2\rangle$$

$w^1\in W^i$, $w^2\in W^j$, $w^3\in W^{\bar{k}}$ によって, $\mathcal{I}_{u^1,u^2}^{u^3}$ を定める. ベクトル空間

$$\mathcal{I}_W^V\binom{W^k}{W^i\ W^j}=\langle\mathcal{I}_{u^1,u^2}^{u^3}\,|\,u^1\in U^i,u^2\in U^j,u^k\in U^{\bar{k}}\rangle_{\mathbb{C}}$$

を考え, この空間の元を $\binom{W^k}{W^i\,W^j}$ 型の V**-internal intertwining operator** と呼ぶ.

直接計算によって, 任意の $u^1 \in U^i$, $u^2 \in U^j$, $u^k \in U^{\bar{k}}$ に対し, $\mathcal{I}^{u^3}_{u^1,u^2} \in I_W\binom{W^k}{W^i\,W^j}$ であることが確認できる. 従って, $I^V_W\binom{W^k}{W^i\,W^j} \subset I_W\binom{W^k}{W^i\,W^j}$ となることがわかる.

同様に, U に関しても, $\binom{U^k}{U^i\,U^j}$ 型の V-internal intertwining operator とそれらのなすベクトル空間 $I^V_U\binom{U^k}{U^i\,U^j}$ が定義できる. 定義より, V の頂点作用素 Y を経由して得られる intertwining operator なので V-internal intertwining operator と読んでいる.

4 The space of V-internal intertwining operators

ここでも V は (2.3) の形に分解されおり, V-internal intertwining operator を考える. まずオービフォールドの場合について考えて見よう. この場合 $U^0 = \mathbb{C}$ で $W = W^0 = V^G$ であった. $i, j, k \in \Delta$ とする. 任意の $w^1 \in W^i$, $w^2 \in W^j$, $w^3 \in W^{\bar{k}}$, $u^1 \in U^i$, $u^2 \in U^j$, $u^3 \in U^{\bar{k}}$ に対し,

$$\langle u^3, \mathcal{I}^{w^3}_{w^1,w^2}(u^1,x)u^2\rangle = \langle u^3 \otimes w^3, x^{-L^W_0} Y(x^{L^W_0} u^1 \otimes w^2, x) x^{L^W_0} u^2 \otimes w^2\rangle$$

である. ここで $\omega^W = \omega^V$ に注意すると, 補題 2.1 より, $\langle u^3, \mathcal{I}^{w^3}_{w^1,w^2}(u^1,x)u^2\rangle$ がスカラーであることがわかる. 従って, $f(u^1 \otimes u^2) = \mathcal{I}^{w^3}_{w^1,w^2}(u^1,x)u^2$ は実際には x に依存せず, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U^i \otimes U^j, U^k)$ の元 f を与えることがわかる. 更に, G の元は ω^V を固定するので,

$$g(f(u^1 \otimes u^2)) = f(g(u^1) \otimes g(u^2)), \quad u^1 \in U^i, \quad u^2 \in U^j, \quad g \in G$$

が成り立つことがわかる. このことより, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U^i \otimes U^j, U^k)$ である. 特に, $I^V_U\binom{U^k}{U^i\,U^j}$ から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U^i \otimes U^j, U^k)$ へ単射線形写像が得られ, 実際に, 単純頂点作用素代数の非退化性 ([5]) を用いて, 次の命題が得られる.

命題 4.1. V は V^G-加群として分解 (2.4) を持つとする. 任意の $i, j, k \in \Delta$ に対し, $I^V_U\binom{M_{\chi_k}}{M_{\chi_i}\,M_{\chi_j}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M_{\chi_i} \otimes M_{\chi_j}, M_{\chi_k})$ が成り立つ.

この命題のように, オービフォールドの場合はある意味自然に V-internal intertwining operator が現れていて, その空間の有限次元性も得られている. ただこの場合は部分頂点作用素代数 V^G の視点から見ると, U-加群というより, $U(=\mathbb{C})$ を含む代数で V^G の作用と可換となる代数 $\mathbb{C}G$ の加群として V を考えており, $\mathbb{C}G$ は V^G の作用から自然に得られるという訳ではない点で, コミュタントの場合より恣意的なものに見える (強引に $U = \mathbb{C}$ のコミュタントを考えると V であり, 意味がないことがわかる). 別の補足として, 部分頂点作用素代数 W があるオービフォールド模型 V^G を含むことを仮定すると, 量子ガロ

ア対応 ([2], [4]) により, $W = V^H$ となる部分群 $H \subset G$ がとれるので, W に関してオービフォールド模型の場合の議論が走ることがわかる.

コミュタントの場合についても考えて見る. $U = U^0$ が有理的で, C_2-余有限性をもつ場合, 既約 U-加群達の間の fusion 則は有限になることが知られている. 従って, 任意の $i, j, k \in \Delta$ に対し, $I_U\binom{U^k}{U^i\ U^j}$ は有限次元であり, 従ってその部分空間 $I_U^V\binom{U^k}{U^i\ U^j}$ も有限次元となることがわかる. よって, U に関する V-internal intertwining operators の空間の次元は有限となる.

一方で, オービフォールドの場合もコミュタントの場合も W については, 今のところその C_2-余有限性や有理性は未解決問題であり, その既約加群の分類や fusion 則の有限性についてはまだ完全に解決しているわけではない. 本報告の主結果は, W に関する V-internal intertwining operator のなす空間は U に関する V-intertnal intertwining operator のなす空間と同型であるという主張であり, 特にその有限次元性が導かれる.

定理 4.2. *V を自己双対, CFT 型の単純頂点作用素代数とし, G を有限自己同型群, U を V の C_2-余有限性をもち有理的な部分頂点作用素代数とする. G によるオービフォールド模型または U によるコミュタントそれぞれについて, 分解 (2.3) を考えたとき, 任意の $i, j, k \in \Delta$ に対し,*

$$I_U^V\begin{pmatrix} U^k \\ U^i\ U^j \end{pmatrix} \cong I_W^V\begin{pmatrix} W^k \\ W^i\ W^j \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

ここで左辺は有限次元であることに注意する. 任意の $i, j, k \in \Delta$ に対し, $\{\mathcal{I}^a | a \in B_{ij}^k\}$ を $I_U^V\binom{U^k}{U^i\ U^j}$ の基底とすると, B_{ij}^k は有限集合である. 定理の証明には次の命題を示せばよい.

命題 4.3. *$I_U^V\binom{U^k}{U^i\ U^j}$ の基底 $\{\mathcal{I}^a | a \in B_{ij}^k\}$ に対し, $I_W^V\binom{W^k}{W^i\ W^j}$ の基底 $\{\mathcal{J}^a | a \in B_{ij}^k\}$ が存在し,*

$$\langle u^3 \otimes v^3, Y(u^1 \otimes v^1, x)u^2 \otimes v^2\rangle = \langle u^3 \otimes v^3, \sum_{a \in B_{ij}^k} \mathcal{I}^a(u^1, x)u^2 \otimes \mathcal{J}^a(v^1, x)v^2\rangle$$

$u^1 \in U^i$, $u^2 \in U^j$, $u^3 \in U^{\bar{k}}$, $w^1 \in W^i$, $w^2 \in W^j$, $w^3 \in W^{\bar{k}}$ が成り立つ.

以下, $\mathcal{I}^a$, $a \in B_{ij}^k$ に対し, $\mathcal{J}^a$, $a \in B_{ij}^k$ の構成方法を解説する. 任意の $w^1 \in W^i$, $w^2 \in W^j$, $w^3 \in W^{\bar{k}}$ に対し, $\mathcal{I}_{w^1,w^2}^{w^3} \in I_U^V\binom{U^k}{U^i\ U^j}$ は, スカラー $\lambda_a(w^1, w^2, w^3) \in \mathbb{C}$, $a \in B_{ij}^k$ が一意的に存在し,

$$\mathcal{I}_{w^1,w^2}^{w^3}(u^1, x)u^2 = \sum_{a \in B_{ij}^k} \lambda_a(w^1, w^2, w^3)\mathcal{I}^a(u^1, x)u^2$$

と表される. 定義より, $\lambda_a \in (W^i \times W^j \times W^{\bar{k}})^*$ である. このとき, $\mathcal{J}^a$, $a \in B_{ij}^k$ を, L_0^W-固有ベクトル $w^1 \in W_{d_1}^i$, $w^2 \in W_{d_2}^j$, $w^3 \in W_{d_3}^{\bar{k}}$ (d_i は L_0^W-ウェイト) に対し,

$$\langle w^3, \mathcal{J}^a(w^1, x)w^2\rangle = x^{-d_1-d_2+d_3}\lambda_a(w^1, w^2, w^3)$$

によって定め, $W^i \times W^j$ 上に線形に拡張する. このとき, $\mathcal{J}^a \in I_U\binom{W^k}{W^i\,W^j}$ であることがわかるが, 構成方法より, L_0^W-固有ベクトル w^1, w^2, w^3 に対し,

$$
\begin{aligned}
&\langle u^3 \otimes v^3, \sum_{a \in B_{ij}^k} \mathcal{I}^a(u^1, x)u^2 \otimes \mathcal{J}^a(v^1, x)v^2\rangle \\
&= \sum_{a \in B_{ij}^k} \langle u^3, \mathcal{I}^a(u^1, x)u^2\rangle\langle w^3, \mathcal{J}^a(w^1, x)w^2\rangle \\
&= \sum_{a \in B_{ij}^k} x^{-d_1-d_2+d_3}\lambda_a(w^1, w^2, w^3)\langle u^3, \mathcal{I}^a(u^1, x)u^2\rangle \\
&= x^{-d_1-d_2+d_3}\langle u^3, \mathcal{I}_{w^1,w^2}^{w^3}(u^1, x)u^2\rangle \\
&= x^{-d_1-d_2+d_3}\langle u^3 \otimes w^3, x^{-L_0^W} Y(x^{L_0^W} u^1 \otimes w^1, x)x^{L_0^W} u^2 \otimes w^2\rangle \\
&= \langle u^3 \otimes w^3, Y(u^1 \otimes w^1, x)u^2 \otimes w^2\rangle
\end{aligned}
$$

が得られる. この式は一般の w^1, w^2, w^3 に対しても成立する. 更に, この式からは,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a \in B_{ij}^k} \phi_U(\mathcal{I}^a)(u^1 \otimes u^2 \otimes u^3)\langle w^3, \mathcal{J}^a(w^1, x)w^2\rangle \\
&= \sum_{a \in B_{ij}^k} \langle u^3, x^{-L_0^U}\mathcal{I}^a(x^{L_0^U} u^1, x)x^{L_0^U} u^2\rangle\langle w^3, \mathcal{J}^a(w^1, x)w^2\rangle \\
&= \langle u^3 \otimes w^3, x^{-L_0^U} Y(x^{L_0^U} u^1 \otimes w^1, x)x^{L_0^U} u^2 \otimes w^2\rangle \\
&= \langle w^3, \mathcal{I}_{u^1,u^2}^{u^3}(w^1, x)w^2\rangle
\end{aligned}
$$

が得られる. ここで $\{\phi_U(\mathcal{I}^a)\}_{a \in B_{ij}^k}$ は $(U^i \otimes U^j \otimes U^{\bar{k}})^*$ において一次独立なので,

$$
u^b = \sum_t u_t^{1,b} \otimes u_t^{2,b} \otimes u_t^{3,b} \in U^i \otimes U^j \otimes U^{\bar{k}}, \quad b \in B_{ij}^k
$$

が存在して, $\phi(\mathcal{I}^a)(u^b) = \delta_{a,b}$ が成り立つ. したがって,

$$
\langle w^3, \mathcal{J}^a(w^1, x)w^2\rangle = \sum_t \langle w^3, \mathcal{I}_{u_t^{1,a}, u_t^{2,a}}^{u_t^{3,a}}(w^1, x)w^2\rangle
$$

が得られる. 特に, $\mathcal{J}^a$ が W に関する V-internal intertwining operator であることがわかる. $\{\mathcal{J}^a\}_{a \in B_{ij}^k}$ が実際に基底になることについては, $\{\mathcal{J}^a\}_{a \in B_{ij}^k}$ から出発して, $I_U^V\binom{U^k}{U^i\,U^j}$ の一次独立な集合が作られることから示されるが, 議論の詳細は省略する.

定理 4.2 より, 任意の $\chi, \mu, \nu \in \mathrm{Irr}\,(G)$ に対し,

$$
I_{V^G}^V\begin{pmatrix} V_\nu \\ V_\chi\ V_\mu \end{pmatrix} \cong \mathrm{Hom}_{\,\mathbb{C}G}(M_\chi \otimes M_\mu, M_\nu)
$$

が成り立つこともわかる.

5　今後の展望

今回は V-internal intertwining operator の導入とその空間の対応について解説したが, 結合法則についても成立することがわかっている. つまり V-internal intertwining operator を用いて, fusion 積 $U^i \boxtimes_U^V U^j$ (V-internal fusion product) を構成しすることで

$$(U^i \boxtimes_U U^j) \boxtimes_U^V U^k \cong U^i \boxtimes_U (U^j \boxtimes_U^V U^k),$$
$$(W^i \boxtimes_W W^j) \boxtimes_W^V W^k \cong W^i \boxtimes_W (W^j \boxtimes_W^V W^k),$$

$(i, j, k \in \Delta)$ が成り立つことがわかる. ただその構成は, 具体的であり, テンソル積の持つ普遍性を用いた抽象的な定義を用いていない. その理由としては, W-加群として W^i 達は一般に同値なもの現れるので, 単に W -加群の圏での普遍性を考えると望む fusion 積が得られないからである. その問題の解消には, W^i が「V における U^i の相棒」としての情報も加味した W-加群の圏を考える必要があると考えられるが, その議論も今後の課題の一つである.

また現在は V 内での分解を見ているが, (twisted な) V-加群内でも同様の定義は可能であると思われる. これは V に関する intertwining operator から得られる U や W に関する internal intertwining operator と考えられるものであるが, こちらについてはその応用も含めさらに考察を深める必要がある.

References

[1] S. Carnahan and M. Miyamoto, *Regularity of fixed-point vertex operator subalgebras*, arXiv:1603.05645.

[2] C. Dong and G. Mason, *On quantum Galois theory*, Duke Math. J. 86 (1997), no.2, 305-321.

[3] I. Frenkel, Y.-C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66**, 123–168, (1992).

[4] A. Hanaki, M. Miyamoto, D. Tambara, *Quantum Galois theory for finite groups*, Duke Math. J. 97 (1999), no.3, 541-544.

[5] H.-S. Li, *Simple vertex operator algebras are nondegenerate*, J. Algebra. 267 (2003), no. 1, 199-211.

[6] R. MacRae, *Twisted modules and G-equivariantization in logarithmic conformal field theory*, arXiv:1910.13226.

[7] M. Miyamoto, *A C_2-cofiniteness of cyclic orbifold models*, Comm. Math. Phys. 335 no.3 (2015), 1279-1286.