リーチ格子の軌道深洞

宮本雅彦
台湾中央研究院数学研究所
筑波大学

1　序文

最近ランク (中心電荷)24 の正則頂点作用素代数 (VOA) の分類が、ムーンシャイン型と呼ばれるウエイト 1 の空間が無いものを除いて完成した。ただ、それら 71 個は、個別毎に既知のものから自己同型を使ったかなり複雑な軌道理論によって構成され、その一意性も個別毎に示されているので、統一的な証明を求める声がある。最近、Scheithauer と Möller が、Ekeren との共著で得た内部自己同型による軌道理論構成の次元公式を使って、Schellekens のリストに載っているムーンシャイン型以外の正則 VOA V から直接リーチ格子 VOA V_Λ が構成できることを発表した。この軌道理論構成の逆 (V_Λ のある自己同型による軌道理論構成になる) を辿れば、リーチ格子 VOA からムーンシャイン型以外の 24 次元正則 VOA がすべて構成できることになる。この事実が、すべてのニイマイヤ格子 (ランク 24 の正定値ユニモジュラー格子）がリーチ格子の deep hole を使って構成できることに類似しているとして、彼らはこの構成を”Generalized Deep Holes”と呼んだ。Deep hole というのはもともと幾何学的な概念で、例えば、格子 L の deep hole $\alpha\in\mathbb{R}L$ とは、「L との距離が最大となる $\mathbb{R}L$ の点」という幾何的な意味で与えられる。面白いのは、距離が特別な場合には単なる幾何学的な面だけでなく、代数的な側面も持つことである。例えば、リーチ格子 Λ の場合には、その距離（被覆半径）が 丁度 $\sqrt{2}$ （偶格子のルートの長さ）なので、deep hole を中心とみて、距離 $\sqrt{2}$ の Λ の点を集めると、ランク 24 のルート系が構成できる。実際、リーチ格子の deep holes は同値類が 23 個あり、それぞれから異なるニイマイヤ格子が構成できる。さらに、リーチ格子の場合には、deep hole $\hat{\alpha}$ を単なる点として理解するよりは、リーチ格子を拡大した Lorentzian 格子 $\Pi_{25,1}=\Lambda\oplus\Pi_{1,1}$ の中の isotropic 元 $p=(\hat{\alpha},1,\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2})\in\mathbb{R}(\Lambda\oplus\Pi_{1,1})$ と理解した方が面白いことがわかる。すると、求めるべきニイマイヤ格子 F は簡単に $\Pi_{25,1}\cap p^{\perp}$ (法 $\mathbb{Z}p\cap\Pi_{25,1}$) で与えられる。この構成により $\hat{\alpha}$ はニイマイヤ格子 F のワイル元をコクスター数で割ったもの α に移り、α を使った同様の逆構成で、$\hat{\alpha}$ に戻る。

Sheithauer と Möller が定義した generalized deep hole はリーチ格子頂点作用素代数の自己同型であり、幾何的な意味を持たない。そこで、この講演では、幾何的な意味を考えるために、まずホロモルフィック頂点頂点作用素代数 V に対して、deep hole に対応すべき $\mathbb{R}\Lambda$ の元 $\hat{\alpha}$ を定義する。上で説明した逆構成と同じ流れで、Lorentzian 格子 VA と V のテンソル積 $V_{\Pi_{1,1}}$ の中に、isotropic VA をワイル元の変形 α を使って定義し、軌道理論

で構成される VOA (i.e. 今回は V_Λ) を「$V\otimes V_{1,1}$ における isotropic subVA の commutant を isotropic VA を法として考えたもの」として理解し、$\hat{\alpha}$ の像として、Λ の orbifold deep hole $\hat{\alpha}$ を捉えようというわけである。即ち、ニイマイヤ格子の分類や構成をリーチ格子の deep holes を使って行ったと同様の手順が、ランク 24 のユニモジュラー正定値頂点作用素代数の分類も応用できるのではないかと期待しているわけである。

V_Λ を与える内部自己同型として、Lam が予想し、最近の研究で分かってきたことだが、リー代数 V_1 のワイルベクトルの適切なスカラー倍 α によって与えられる内部自己同型 $g=\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha(0))$ がある。ここで、$\alpha(0)$ はウエイト 1 の元 $\alpha\in V_1$ の次数を保つ作用を表している。当然、α を含むカルタン部分代数 $\mathcal{H}$ はその自己同型 g で固定され、軌道理論構成されたリーチ格子 VOA V_Λ のウエイト 1 の空間 $(V_\Lambda)_1=\mathbb{R}\Lambda$ に含まれる。

この原稿では、69 個の中心電荷 24 の正則 VOA から $\mathbb{R}\Lambda$ の元 (軌道深洞) $\hat{\alpha}$ を定義する方法を紹介する。この定義に従えば、ニイマイヤ格子 VOA の場合には、通常の Deep holes を与えている。

問題は、この $\hat{\alpha}$ を $\mathbb{R}\Lambda$ の立場から記述しなければならない。また、その元が特定できた場合、それからもとの頂点作用素代数の復元が次の問題である。結論だけ述べると、上記の $\hat{\alpha}$ を使った同様の方法だけでは、ニイマイヤ格子頂点作用素以外は V のすべてが復元出来るわけではない。ただ、もとの V のウエイト 1 の空間 V_1 のリー代数構造はわかり、復元できる部分と V_1 から生成される部分頂点作用素代数を合わせると全体が復元できると期待している。

2　準備

この原稿の大半は草津で行った講演の報告書から引用する。ただし、そこではルート系よりは頂点作用素代数に出てくるコルートを中心に扱ってしまったいるので、この原稿では少し訂正が入っている。また、いくつかの記号や記述等の誤りも訂正した。

2.1　頂点作用素代数 (略して VOA) 豆知識

VOA とは次数付きベクトル空間

$$V=\oplus_{m=0}^{\infty}V_m$$

で、いくつかの関係式を満たす無限個の線形演算 (n-積): $\times_n: V\otimes V\to V, (v,u)\mapsto v\times_n u$ を持つものである。$v\in V_n$ のことを $\mathrm{wt}(v)=n$ と表す。演算の持つ性質として、
1) 次数に関しては $\mathrm{wt}(v\times_n u)=\mathrm{wt}(v)+\mathrm{wt}(u)-n-1$ であり、
2) 交換関係式 $[v\times_n, u\times_m]=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}(v\times_k u)\times_{n+m-k}$ を満たす。（局所可換と呼ぶ）
例えば、0-積は、上記の関係式から $[v\times_0, u\times_0]w=(v\times_0 u)\times_0 w$ をみたしており、リー代数の交換関係式に近い。

ここでは CFT-型と呼ばれる標準的な VOA しか扱わない。CFT 型とは、V_0 が 1 次元であり、”真空元” と呼ばれる特別な元 $\mathbf{1}$ で張られている。この場合、ウエイト 1 の空間 $(V_1,\times_0)$ はリー代数となっており、しかも、$v,u\in V_1$ に対して、$V_0\ni v\times_1 u=(v,u)\mathbf{1}$ より、不変

内積 (v,u) も自然に定義される。以下、一般に添字が多くなるので、$v\times_n$ を $v(n)$ と表記し、その母関数 $Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v(n)z^{-n-1}$ を「v の頂点作用素」と呼ぶ。$v\in V_1$ とすると、任意の $w\in V_k$ に対して、$v(0)w\in V_k$ であり $v(0)(u(m)w)=(v(0)u)(m)w+u(m)(v(0)w)$ なので、$\exp(v(0))=1+v(0)+\frac{1}{2!}(v(0))^2+...$ は V の自己同型となる。これを「内部自己同型」と呼ぶ。この対応により、自然にリー代数 V_1 のリー群から V の自己同型群への準同型が与えられる。

重要な VOA の例として、格子 VOA がある。これは、正定値偶格子 $L=\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\alpha_r$ に対して、まず最初に内積を持つ可換リー代数 $\mathbb{C}L:=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}L$ のアフィン VOA $M(\mathbb{C}L):=M(\alpha_1,...,\alpha_r)$ を考える。これは、 $\deg(\alpha_i(-n))=n$ としたうえで、次数付きベクトル空間としては無限個の変数を持つ多項式環 $\mathbb{C}[\alpha_i(-n)\mid i=1,...,r,n\in\mathbb{Z}^{+}]$ と同型なもの $M(\alpha_1,...,\alpha_r)=\mathbb{C}[\alpha_i(-n)\mid i=1,...,r,n\in\mathbb{Z}^{+}]\mathbf{1}$ である。この空間の上に、$\mathbb{C}[\alpha_i(-n)\mid i=1,...,r,n\in\mathbb{Z}]$ が交換関係式 $[\alpha_i(n),\alpha_j(m)]=n\delta_{n+m,0}\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ と真空への作用 $\alpha_i(n)\mathbf{1}=0$ $(n\geq 0)$ の下で作用していることである。次に、それと格子 L の群環 $\mathbb{C}[L]=\oplus_{\beta\in L}\mathbb{C}e^{\beta}$ (正確には局所可換を得るために若干積を変形する) とのテンソル積

$$V_L=\oplus_{\beta\in L}M(\alpha_1,...,\alpha_r)\otimes e^{\beta}$$

を基本ベクトル空間と考え、その中に頂点作用素代数の構造を入れたものである。群環部分のウエイトは、$\mathrm{wt}(e^{\beta})=\frac{\langle\beta,\beta\rangle}{2}$ で与えられている。重要な元として、ウエイト 1 の元 $\alpha_i(-1)\mathbf{1}\in(M(\alpha_1,...,\alpha_r))_1$ が含まれている。記号を乱用して、この元も α_i で表す。利用する性質は、$\alpha_i(0)$ は $M(\alpha_1,...,\alpha_t)$ に零として作用し、$\alpha_i(0)e^{\beta}=\langle\alpha_i,\beta\rangle e^{\beta}$ である。

また、 L が正定値でなくとも、偶格子であれば同様に定義でき、V_L は格子頂点代数（VA）と呼ばれるものになる。この VA は、VOA の拡張であり、VOA の条件に、負のウエイトを許し、斉次空間の次元の有限性を無くしたものである。この原稿では、2 次元ローレンティアン格子 $\Pi_{1,1}$ から定義される格子 VA $V_{\Pi_{1,1}}$ を使う。また、アイソトロピック元 β (i.e. $\langle\beta,\beta\rangle=0$) を使って格子 VA $V_{\mathbb{Z}\beta}$ も構成できる。これをアイソトロピック VA と呼ぶ。

2.2 中心電荷 24 の正則 VOA

正則 VOA(C_2-有限であり、加群は自分自身と同型ないくつかの加群の直和だけ) の構成はユニモジュラー正定値偶格子と深い関係にある。例えば、任意のユニモジュラー正定値偶格子 L が与えられると、それから正則 VOA V_L が構成できる。また、ユニモジュラー正定値偶格子のランクが 8 の倍数であるように、正則 VOA の中心電荷（ランクに対応）も 8 の倍数である。特に、中心電荷 8, 16 の正則 VOA は、このような格子 VOA しかないことが古典的に証明されている。次の問題は、中心電荷 24 であるが、この場合には、VOA 研究の出発点ともなったムーンシャイン VOA も正則であり、これは格子 VOA ではない。これはリーチ格子 VOA V_{Λ} から位数 2 の自己同型を利用して、後で説明する軌道構成によって作られたものである。同様の方法で、他の 23 種類のニイマイヤ格子から固定点を持たない位数 2 の自己同型を使った軌道構成により、23 個構成できるが、その中で格子 VOA 以外のものが 12 個ある。中心電荷 24 の正則 VOA に関しては、1993 年に物理学者の Schellekens がアフィンリー代数の表現と VOA の指標のモジュラー不変性を利用して、

V_1 のリー代数構造が高々71 種類しかないことを示したが、当時知られていたのは 41 個ほどであった。VOA の構成は一般に難しく、しばらくは大きな進展がなかったが、10 年ほど前、長さ 48 のバイナリーコードに関係したフレイム VOA による新しい正則 VOA が構成された [1] のをきっかけに多数の研究者が構成に参加し、最終的に軌道構成を繰り返すことで Schellekens のリストにあった 71 個すべてが構成された ([9] を参照)。

2.3 軌道構成

軌道構成の簡単な説明をしておこう。

V を正則 VOA, $g \in Aut(V)$ を位数 N とし、V を g による固有空間分解を

$$V = \oplus_{m=0}^{N-1} V^m \qquad (V^m = \{v \in V \mid g(v) = e^{2\pi i m/N} v\})$$

と表示する。V^0 は g の固定点からなる部分 VOA $V^{<g>}$ である。この時、$i = 0, ..., N-1$ に対して、g^i-twisted 加群と呼ばれる $V^{<g>}$-加群 T^i が一意的に存在する。T^1 の中に整数ウエイトの元 $(\neq 0)$ がある場合が軌道構成の対象である。この時、整数ウエイトの元全体の張る空間を $T_{\mathbb{Z}}^1 \neq 0$ で表す。我々が扱っている”良い設定” では、この $T_{\mathbb{Z}}^1$ は単純カレントと呼ばれる非常に良い性質を持つ $V^{<g>}$-既約加群であり、ある種の積 (Fusion 積)$\boxtimes$ が与えられて、$\overbrace{T_{\mathbb{Z}}^1 \boxtimes .... \boxtimes T_{\mathbb{Z}}^1}^{m} \subseteq T^m$ も常に整数ウエイトの既約 $V^{<g>}$-加群となっている。特に、$\overbrace{T_{\mathbb{Z}}^1 \boxtimes .... \boxtimes T_{\mathbb{Z}}^1}^{N} = V^{<g>}$ である。

一般に、$(m, N) \neq 1$ の場合には、T^m は余分な整数部分を持つので、上の $\overbrace{T_{\mathbb{Z}}^1 \boxtimes .... \boxtimes T_{\mathbb{Z}}^1}^{m} \subseteq T^m$ だけを $T_{\mathbb{Z}}^m$ で表し、それらを合わせた

$$\tilde{V} = V^{<g>} \oplus T_{\mathbb{Z}}^1 \oplus \cdots \oplus T_{\mathbb{Z}}^{N-1}$$

を考えると、我々の良い設定の下では頂点作用素代数の構造が入るのである。構成から分かることだが、これも正則 VOA である。これが「軌道構成」である。

軌道構成の利点は、V から軌道構成で $\tilde{V}$ を得た場合、上の構成からわかるように、$T_{\mathbb{Z}}^m$ 上に $e^{2\pi i m/N}$ 倍として作用するもの $\tilde{g}$ を考えると、$\tilde{V}$ の 自己同型となっており、この自己同型を使ってもう一度 $\tilde{V}$ から軌道構成を行えば、V に戻るのである。この逆軌道構成は、Lam 達のグループによる一意性の証明に使われている。面白いことに、新しい正則 VOA を見つけ出す時には全く利用されなかった内部自己同型が、逆軌道構成においては本質的な役割を果たした点である。しかも、内部自己同型はウエイト 1 の空間 V_1 の構造だけで定義できるという利点を持っている。

2.4 Deep hole と ローレンティアン 格子 $\Pi_{25,1}$

Gram 行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる 2 次元ローレンティアン 格子 $\Pi_{1,1} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ を考える。この時、任意のニイマイヤ格子 L に対して、$L \oplus \Pi_{1,1}$ は 26 次元のユニモ

ジュラー ローレンティアン格子であり、その一意性から $L \oplus \Pi_{1,1} \cong \Lambda \oplus \Pi_{1,1} \quad (\cong \Pi_{25,1})$ となる。リーチ格子の素晴らしい点は、

$$\{(\beta, 1, \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{2} - 1) \in \Lambda \oplus \Pi_{1,1} \mid \beta \in \Lambda\}$$

が $\Pi_{25,1}$ の基本ルート系（リーチルートと呼ばれる）となることである。即ち、$\Pi_{25,1}$ の長さ $\sqrt{2}$ の元はすべてリーチルートの和（またはそのマイナス）で表せるのである。特に、$L \oplus \mathbb{Z} \oplus \{0\}$ の中のアフィンルート系の一つとして、リーチルートを使って表示することが出来、それらの和として表わしたアイソトロピック元を $(\tilde{\rho}, n, \langle \tilde{\rho}, \tilde{\rho} \rangle / 2n)$ と表示すると、$\hat{\alpha} = \tilde{\rho}/n \in \mathbb{R}\Lambda$ が L に対応する deep hole となっている。逆に、$\beta \in \Lambda$ と $\hat{\alpha}$ の距離は、$(\beta, 1, \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{2} - 1)$ と $(\hat{\alpha}, 1, \langle \hat{\alpha}, \hat{\alpha} \rangle / 2)$ との距離に等しく、$|\beta - \hat{\alpha}| = \sqrt{2}$ であることと直交関係 $\langle (\beta, 1, \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{2} - 1), (\hat{\alpha}, 1, \langle \hat{\alpha}, \hat{\alpha} \rangle / 2) \rangle = 0$ となることが必要十分なので、対応するニイマイヤ格子 F を $\xi = (n\hat{\alpha}, n, \frac{\langle \hat{\alpha}, \hat{\alpha} \rangle}{2n})$ の直交補格子 (法 $\mathbb{Z}\xi$ で考えて) として捉えることが出来る。同様に、ニイマイヤ格子 F からローレンティアン格子 $F \oplus \Pi_{1,1}$ を構成し、ニイマイヤ格子 F のワイル元 ρ のスカラー倍 α を利用してアイソトロピック元 $\rho = (\alpha, 1, \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2})$ を定義し、その直交補格子（$\mathbb{Z}\rho \cap (F \oplus \Pi_{1,1})$ を法）としてリーチ格子が構成できる。

この事から分かるように、リーチ格子の deep hole$\hat{\alpha}$ を使ってのニイマイヤ格子構成は、ローレンティアン格子 $\Lambda \oplus \Pi_{1,1}$ におけるアイソトロピック元 $\tilde{\rho}$ の直交補を通して捉える方が分かりやすい。それゆえ、リーチ格子 VOA V_Λ の deep hole(深洞) も、ローレンティアン格子 $V_\Lambda \otimes V_{\Pi_{1,1}}$ とそのアイソトロピック VA の commutant をアイソトロピック VA を法として理解するわけである。

2.5 基礎知識 1 リー代数構造

以下、V を $V_1 \neq 0$, $V \ncong V_\Lambda$ となるランク 24 の正則 VOA とする。この時、V_1 は半単純リー代数となることが知られているので、$V_1 \cong \oplus_{j=1}^{t} \mathcal{G}_{j,k_j}$ と書ける。ここで、$\mathcal{G}_{j,k_j}$ はレベル k_j のタイプ $A.B, C, D, E, F, G$-型の単純リー代数である。以下、各 $\mathcal{G}_{j,k_j}$ の基本ルートを固定して考え、dual Coxeter 数, ワイル元, ルート格子をそれぞれ、$h_j^\vee$, ρ_j, L_j と置く。ここで、ρ_j は正ルートの和の 1/2 倍である。正則 VOA に関して、重要な結果がある。

定理 1 ([13],[7], [8], [11]) *V を中心電荷 24 の共形型正則 VOA で、$V_1 \neq 0$ かつ $V \ncong V_\Lambda$ とすると、上の分解に対して、常に*

$$\frac{\dim V_1 - 24}{24} = \frac{h_j^\vee}{k_j} \quad \forall j = 1, ..., t$$

が成り立つ。

知られているように、ニイマイヤ格子ではすべてのレベル k_j が 1 であり、dual Coxeter 数も同じであった。正則 VOA では、レベルは一定とは限らないが、それでも dual Coxeter 数との比は一定である。

命題 2 ([7]) *中心電荷 24 の正則 VOA V に対して、次のことが古典的に知られている。*
(1) $\dim V_1 = 0$ または $\dim V_1 \geq 24$ であり、$\dim V_1 = 24$ なら $V \cong V_\Lambda$.
(2) $V_1 = 0$ または $\mathrm{rank}(V_1) \leq 24$ で、もし $\mathrm{rank}(V_1) = 24$ なら V は格子 *VOA* である。

また、一般の有限次半単純リー代数 $\mathcal{G}$ とそのワイル元 ρ に対して、次の結果が知られている。

定理 3 *(Strange formula of Freudenthal and De Vries)*

$$\frac{1}{24}\dim \mathcal{G} = (\rho,\rho),\ \text{ここで } (\cdot,\cdot) \text{ は } \textit{Killing} \text{ 形式}$$

Remark 1 *VOA* の 1-積を利用して定義した V_1 の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表記すると、各 $\mathcal{G}_{j,k_j}$ に対して、

$$\frac{h_j^\vee k_j}{12}\dim \mathcal{G}_{j,k_j} = \langle \rho_j,\rho_j\rangle$$

となる。

定義 4 $\alpha=\sum_{j=1}^t \rho_j/h_j^\vee$ と置き、内部自己同型 $g=\exp(2\pi i\alpha(0))$ を定義する。この α を変形ワイル元と呼ぶことにする。

$\alpha(0)=\sum_j \rho_j(0)/h_j^\vee$ は、ルート上で整数固有値を持たないことを注意しておく。
この時、次が成り立つ。

命題 5

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = \frac{2\dim V_1}{\dim V_1-24}, \qquad \dim V_1 = \frac{24\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle-2}, \qquad \frac{k_j}{h_j^\vee} = \frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}-1.$$

[Proof] 直接の計算から、

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\alpha\rangle = & \ \langle\textstyle\sum\frac{\rho_j}{h_j^\vee},\frac{\rho_j}{h_j^\vee}\rangle = \sum\frac{\langle\rho_j,\rho_j\rangle}{(h_j^\vee)^2} = \sum\frac{h_j^\vee k_j\dim\mathcal{G}_j}{12(h_j^\vee)^2} = \sum\frac{k_j\dim\mathcal{G}_j}{12h_j^\vee} = \sum_i\frac{24\dim\mathcal{G}_j}{12(\dim V_1-24)} \\ = & \ \tfrac{2\dim V_1}{\dim V_1-24}\end{aligned}$$

であり、それゆえ、$\dim V_1=\frac{24\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle-2}$ となり、$\frac{h_j^\vee}{k_j}=\frac{1}{24}\left(\frac{24\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle-2}-24\right)=\frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle-2}$ も得る。□

3 内部自己同型による軌道構成と逆軌道構成

3.1 Haisheng Li's Δ-operator

軌道構成にはツイスト加群が必要であるが、一般のツイスト加群の構成法は良く分かっていない。特に、モンスター単純群の元に対するムーンシャイン加群のツイスト加群の構成はそれ自体未解決の大きな問題である。しかし、内部自己同型 $g=\exp(2\pi i\alpha(0))$ の場合には、g-twisted 加群 T^1 の構成は知られており、Li が導入したデルタ作用素

$$\Delta(\alpha,z) = z^{\alpha(0)}\exp(-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(j)z^{-j}/j)$$

を使って定義できる。即ち、T^1 の基礎ベクトル空間として V 自身を取り、$v \in V$ の V 上への新しい作用を v の頂点作用素 $Y(v,z) = \sum v(n)z^{-n-1} \in \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$ を使って、$Y^1(v,z) := Y(\Delta(\alpha,z)v,z)$ と定義すれば、これが g-twisted 加群 T^1 となるのである。同様に、g^m-twisted 加群 T^m は V 上に $Y^m(v,z) := Y(\Delta(m\alpha,z)v,z)$ の作用で与えられる。

正則 VOA V に対して、この内部自己同型 $g = \exp(2\pi i\alpha(0))$ が有限位数 N を持つ場合にその軌道構成を詳しく見ていこう。注意すべきことだが、この場合、$\Delta(m\alpha,z)$ と $\Delta((m+N)\alpha,z)$ は異なるが、同型な加群を定義している。以下、$\alpha \in V_1$ に対して、リー関係式 $[\alpha(n),\alpha(m)] = n\delta_{m+n,0}\langle\alpha,\alpha\rangle$ で定義されるハイゼンベルク VOA を $M(\alpha)$ で表す。これは格子 VOA の構成で説明したものと同じであり、前に述べたように $\alpha(0)M(\alpha) = 0$ である。まず、$M(\alpha)$ の V における commutant $X := \mathrm{Comm}(M(\alpha),V) = \{v \in V \mid \alpha(n)v = 0, n \geq 0\}$ の元に対しては、$Y(\Delta(\alpha,z)v,z) = Y(v,z)$ なので、ツイスト加群と見ても V への作用に変更がない。それゆえ、X の更なる commutant $X^c := \mathrm{Comm}(X,V) = \{v \in V \mid u(n)v = 0^{\forall}n \geq 0, u \in X\}$ とその加群の表現を中心に考えて良いことになる。$|g| = N$ という仮定により、$\alpha(0)$ の V における固有値は $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$ の元しか出てこない。V が正則であることにより、X の commutant X^c は $M(\alpha)$ を真に含む中心電荷 1 の VOA なので、格子 VOA $V_{\mathbb{Z}N\alpha}$ である。$K = \frac{N\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}$ と置く。$M(\alpha)$-加群として、

$$V_{\mathbb{Z}N\alpha} = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} M(\alpha) \otimes e^{mN\alpha} \subseteq X^c$$

である。V を $M(\alpha)$-加群とみて、$\langle\alpha, \frac{s\alpha}{2K}\rangle = \frac{s}{N}$ なので、

$$V = \oplus_{s\in\mathbb{Z}} M(\alpha) \otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}} \otimes X(s)$$

と表示できる。ここで、 $X(s)$ は $M(\alpha)$-既約加群 $M(\alpha) \otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}}$ の重複度であり、X-加群とみることが出来る。特に、

$$V^{<g>} = \oplus_{s\in\mathbb{Z}} M(\alpha) \otimes e^{\frac{sN\alpha}{2K}} \otimes X(sN)$$

である。性質として、$n \geq 1$ に対して、$\alpha(n)(e^{\frac{s\alpha}{2K}} \otimes X(s)) = 0$ である。

3.2 ツイスト加群のローレンティアン型構成

T^m への次数作用素 $L^m(0)$ による固有値分解を調べてみると、$\alpha(0)\omega = 0$, $\alpha(1)\omega = \alpha$, $\alpha(2)\omega = 0$, $\alpha(3)\omega = 0$ より、

$$\Delta(m\alpha,z)\omega = z^0(\omega - m\alpha z^{-1} + \frac{m^2}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle z^{-2})$$

となるので、V を g^m-ツイスト加群 T^m として見た場合には、次数作用素は $M(\alpha) \otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}} \otimes X(s)$ 上で $L(0) - \frac{m(s-mK)}{N}$ として作用している。特に、$m = 1$ の場合には、次数が $M(\alpha) \otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}} \otimes X(s)$ 上で $\frac{-s+K}{N}$ だけずれている。$(r,r) = (q,q) = 0, (r,q) = (q,r) = -1$ で与えられるローレンティアン空間 $\mathbb{C}\Pi_{1,1} = \mathbb{C}r + \mathbb{C}q$ の形式群環の元 $e^{(1,\frac{s-K}{N})}$ を利用すると、V 上で定義された T^1 (および T^m) をそれぞれ

$$Z^1 := \oplus_{s\in\mathbb{Z}} M(\alpha) \otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}} \otimes X(s) \otimes e^{(1,\frac{s-K}{N})}$$
$$Z^m := \oplus_{s\in\mathbb{Z}} M(\alpha) \otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}} \otimes X(s) \otimes e^{(m,\frac{s-mK}{N})}$$

と表示すると、次数空間としては通常の格子 VA における次数と一致する。次数以外の作用も調べておこう。$X=\mathrm{Comm}(M(\alpha),V)$ の元 u に対しては、$\Delta(\alpha,z)u=u$ なので、V 上への作用と同じであり、T^m と Z^m は X-加群として同型である。$\Delta(m\alpha,z)\alpha=\alpha-m\frac{2K}{N}\mathbf{1}z^{-1}$ なので、$Y^m(\alpha,z)=Y(\alpha,z)-m\frac{2K}{N}\mathbf{1}z^{-1}$ であり、0 次の作用以外に変更は無い。$\alpha(0)$ の作用は $T^m=V$ において、$\alpha(0)-m\frac{2K}{N}$ として作用している。これは、すべての m に対して、Z^m における $\alpha(0)+\frac{2K}{N}q(0)$ の作用 と同じであることを示している。以下、記号を簡略化するために、格子 $L:=\mathbb{Z}N\alpha+\mathbb{Z}r+\mathbb{Z}q$ を考え、

$$\hat{\alpha}=(\alpha,0,\frac{2K}{N})\in\mathbb{C}L$$

と置くと、$\alpha(n)$ の T^m における作用は、 $\hat{\alpha}$ の Z^m への作用と一致する。(m に依存しない。) さらに、$e^{a\alpha}e^{(m,n)}$ を $e^{(a\alpha,m,n)}$ と記す。この記号を利用すると、

$$Z^m_{\mathbb{Z}}=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}M(\alpha)\otimes X(mK+nN)\otimes e^{(\frac{(mK+nN)\alpha}{2K},m,n)}$$

と書ける。また、$\Delta(m\alpha,z)e^{k\alpha}=e^{k\alpha}z^{mk\frac{2K}{N}}$ なので、$M(\alpha)\otimes e^{(ms\alpha,2mK,\frac{2m(s-K)K}{N})}\otimes X(ms)$ 上に、

$$Y(\Delta(m\alpha,z)e^{k\alpha},z)=\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\alpha(-n)z^{-n}}{-n})\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\alpha(n)z^{n}}{n})e^{k\alpha}z^{mk\frac{2K}{N}}$$

として作用しており、次数以外の変更がない。それゆえ、$e^{k\alpha}$ の T^m 上での作用 $Y^m(e^{k\alpha},z)$ は Z^m 上での作用

$$Y(e^{k\hat{\alpha}},z)$$

と一致する。これまでの結果を整理しておこう。
$M(\alpha)\otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}}\otimes X(s)$ 上で

$$\begin{cases} L^{T^m}(0)=L(0)-\frac{m(s-mK)}{N},\\ \alpha^{T^m}(n)=\alpha(n)-m\frac{2K}{N}\delta_{n,0},\\ u\in\mathrm{Comm}(M(\alpha),V)\text{ に対しては、}u^{T^m}(n)=u(n),\\ (e^{k\alpha})^{T^m}(n)=e^{\alpha}(n)z^{mk\frac{2K}{N}}.\end{cases}$$

それゆえ、$M(\alpha)$ の Z^m 上での作用に関しては、

$$\alpha(n)\mapsto\hat{\alpha}(n)=\alpha(n)+\delta_{n,0}\frac{2K}{N}q(n)$$

で作用を定義すると、T^m と Z^m が同型となる。この $\hat{\alpha}$ で生成されるハイゼンベルク VOA を $M(\hat{\alpha})$ で表す。加群を考えない (即ち、$\hat{\alpha}(0)$ を考えない) 限り、$M(\alpha)$ と $M(\hat{\alpha})$ は同型である。

固定点を見てみよう。$|g|=N$ なので、 g^N-ツイスト加群は V と同型である。実際、Z^N での次数を保つ α の作用は、$\alpha(0)-2K$ なので、V における $\alpha(0)$ の固有値 $\frac{s}{N}$ の空間 $M(\alpha)\otimes e^{\frac{s\alpha}{2K}}\otimes X(s)$ には $\frac{s-2KN}{N}$ として作用している。

3.3 アイソトロピック VA の Commutant

Z^1 の中で整数ウエイトとなるのは、$s = K + nN$ $(n \in \mathbb{Z})$ の部分であり、

$$Z^1_{\mathbb{Z}} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M(\alpha) \otimes e^{\frac{(K+nN)\alpha}{2K}} \otimes X(K+nN) \otimes e^{(1,n)}$$

である。$\langle(\frac{(mK+nN)\alpha}{2K}, m, n), (\alpha, 1, K/N)\rangle = 0$ なので、$p = (\alpha, 1, K/N) \in \mathbb{C}L \subseteq \Omega_1$ と置くと、次が成り立つ。

補題 6 $Z^m_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathrm{Ker}(p(0))$

$\mathrm{Ker}(p(0))$ は部分 VA なので、$Z^1_{\mathbb{Z}}$ で生成された部分 VA(即ち、$\oplus_{m\in\mathbb{Z}} Z^m_{\mathbb{Z}}$ で、これを $\mathrm{VA}(Z^1_{\mathbb{Z}})$ で表す) も当然 $\mathrm{Ker}(p(0))$ に含まれる。簡単に

$$\mathrm{Ker}(p(0)) = \oplus_{m,n\in\mathbb{Z}} M(\alpha, r, q) X(mK+nN) \otimes e^{(\frac{(mK+nN)\alpha}{2K}, m, n)}$$

であることが確認できる。しかも、$< Z^m_{\mathbb{Z}} : m \in \mathbb{Z} >$ で生成した部分 VA を考えると、$e^{(\frac{(mK+nN)\alpha}{2}, m, n)}$ と $e^{(\frac{(-mK-nN)\alpha}{2}, -m, -n)}$ から $M(\frac{K\alpha}{2}+r, \frac{N\alpha}{2}+p)$ も生成できるので、$\mathrm{Ker}(p(0))$ と $\mathrm{VA}(Z^1_{\mathbb{Z}})$ とは一致する。一方、$n \geq 1$ に対して、$p(n)(X(s) \otimes e^{\mathbb{Z}r+\mathbb{Z}q}) = 0$ であり、$p^{\perp} = < p, \hat{\alpha} >$ なので、 次を得る。

補題 7

$$\mathrm{Comm}(M(p), \Omega) = \oplus_{m,n\in\mathbb{Z}} M(p, \hat{\alpha}) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{(\frac{(mK+nN)\alpha}{2K}, m, n)}$$

$(\frac{(mK+nN)\alpha}{2K}, m, n) = mp + (\frac{-mK+nN}{2K})\hat{\alpha}$ である。$R = \mathrm{GCD}(N, K)$ とし、$N = RN_0$, $K = K_0R$ と置くと、格子 VA

$$V_{\mathbb{Z}N_0p} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M(\alpha) \otimes X(2nK_0N_0R) \otimes e^{n(RK_0N_0, N_0, K_0)}$$

も $\mathrm{Comm}(M(p), \Omega)$ のラディカルに含まれており、その剰余

$$\tilde{V} := \oplus_{m,n\in\mathbb{Z}} M(\hat{\alpha}, p) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{(\frac{m\alpha}{2}+\frac{nN\alpha}{2K}, m, n)} / V_{\mathbb{Z}N_0p}$$

は VA であり、V から軌道構成された VOA $\tilde{V}$ になっていることが分かる。

この剰余 VOA を取り出すために、ラディカルに含まれる アイソトロピック元 p の形式元 $e^{\mathbb{Z}p} = e^{\mathbb{Z}(\alpha, 1, K/N)}$ を利用して、第 2 成分をゼロにすると、

$$\begin{aligned}\tilde{V} \cong\ & \oplus_{m,n\in\mathbb{Z}} M(\hat{\alpha}) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{(-\frac{m\alpha}{2}+\frac{nN\alpha}{2K}, 0, n-\frac{mK}{N})} \\ =\ & \oplus_{m,n\in\mathbb{Z}} M(\hat{\alpha}) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{((\frac{-mK+nN}{2K})\hat{\alpha})}\end{aligned}$$

と表記することが出来る。 ここで、$\hat{\alpha} = (\alpha, 0, \frac{2K}{N})$ である。

このようにして、ニイマイヤ格子から アイソトロピック元を利用してリーチ格子を構成したように、正則 VOA V から内部自己同型による軌道構成で得られる頂点作用素代数は、$\Omega := V \otimes V_{\Pi_{1,1}}$ の isotroic VA の Ω における commutant (法 アイソトロピック VA で考える) として構成できるわけである。しかも、軌道構成で変化する部分 $e^{\frac{(mK+nN)\alpha}{2K}} \to e^{\frac{(-mK+nN)\alpha}{2K}}$ は一目瞭然となる。ただし、一般に、$V \otimes V_{\Pi_{1,1}}$ のテンソル因子として出てくるわけでは

ない。

特に、Lam が予想した変形ワイル元 $\alpha = \sum_j \rho_j/h_j^\vee$ を利用した内部自己同型 $g = \exp(2\pi i\alpha(0))$ の場合には、次が成り立っている。

予想

$$V_\Lambda \cong \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} M(\hat{\alpha}) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{(\frac{(-mK+nN)}{2K}\hat{\alpha})} \tag{1}$$

定義 8 上記の $\hat{\alpha} := (\alpha, 0, 2K/N) \in \tilde{V}_1 = (V_\Lambda)_1$ をリーチ格子の軌道深洞 *(orbifold deep hole)* と呼ぶ。$\langle\alpha,\alpha\rangle = \langle\hat{\alpha},\hat{\alpha}\rangle$ である。 $\alpha \in V^{<g>} \cong T^0 \subseteq V_\Lambda$ と見て、α と $\hat{\alpha}$ を同一視することが出来る。

この $\hat{\alpha}$ のリーチ格子における特徴付けが正則 VOA の構成にとって非常に重要な問題であり、最後の節で述べる。

3.4 復元

次に、上で求めた軌道深洞 $\hat{\alpha} \in (V_\Lambda)_1$ を使って V の復元を考える。一番簡易な方法は、(1) の表示に従って、もう一度 $\hat{\alpha}$ による操作を行ってみると、

$$V_\Lambda \cong \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} M(\hat{\alpha}) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{(\frac{(mK+nN)}{2K}\hat{\alpha})}$$

となり、$X(mK+nN) \otimes e^{(\frac{(mK+nN)}{2K}\hat{\alpha})} \subseteq V$ であることから、重複（R 回）はあるが、基本的に V の部分頂点作用素代数に戻っている。基本に戻って、構成をしてみよう。

$$V_\Lambda \cong \oplus_{m,n\in\mathbb{Z}} M((\alpha,0,2K/N)) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{(\frac{-m\alpha}{2}+\frac{nN\alpha}{2K},0,n-mK/N)}$$

には $(\alpha,1,K/N)(0) = p(0)$, $q(0) = (0,0,1)(0)$ はゼロとして作用する。それゆえ、$V_{\Pi_{1,1}} = M(p,q) \otimes e^{\mathbb{Z}p+\mathbb{Z}q}$ を加えたローレンティアン 格子 VA

$$V_\Lambda \otimes V_{\Pi_{1,1}} = \oplus_{m,n,a,b\in\mathbb{Z}} M(\hat{\alpha},p,q) \otimes X(mK+nK) \otimes e^{(\frac{-m\alpha}{2}+\frac{nN\alpha}{2K}+a\alpha,a,b+n+(a-m)K/N)}$$

を考える。以下、$V \otimes V_{\Pi_{1,1}}$ での表記と区別するために、$a\hat{\alpha}+bp+cq \in \mathbb{C}\hat{\alpha}+\mathbb{C}p+\mathbb{C}q$ を $[a\hat{\alpha},b,c]$ で表す。この時、 アイソトロピック元 $\hat{p} := [\hat{\alpha},-1,-K/N]$ は

$$(\alpha,0,2K/N)-(\alpha,1,K/N)-(0,0,K/N) = (0,-1,0)$$

と一致する。それゆえ、$M(\hat{\alpha})$ の Commutant は

$$\oplus_{\{m,n,a,b\in\mathbb{Z}|N(b+n)+K(a-m)=0\}} M(\hat{\alpha},\alpha) \otimes X(mK+nK) \otimes e^{(\frac{-m\alpha}{2}+\frac{nN\alpha}{2K}+a\alpha,a,0)}$$

である。これをラディカル $V_{\mathbb{Z}N\hat{p}}$ で剰余すると頂点作用素代数

$$\oplus_{m,n\in\mathbb{Z}} M((\alpha,0,0)) \otimes X(mK+nN) \otimes e^{((\frac{-m}{2}+\frac{nN}{2K})\alpha,0,0)}$$

を得る。$mK+nN = m'K+n'N, -mK+nN = -m'K+n'N$ なら、$m=m', n=n'$ となるので結論として、次を得る。

命題 9 $R=GCD(K,N)$ と置くと、$\oplus_{s\in\mathbb{Z}}M(\alpha)\otimes e^{\frac{sR\alpha}{2K}}\otimes X(sR)$ は V_Λ と $\hat{\alpha}$ から *Lorentzian* 格子 *VA* を使った構成によって復元できる部分である。

このように、$\alpha(0)$ の V における固有値 $\mathbb{Z}/N$ のうち、 $\frac{\mathbb{Z}R}{N}$ の部分は V_Λ からのローレンティアン格子構成で復元できる。

3.5 変形ワイル元による内部自己同型

半単純リー代数 $V_1=\oplus_{j=1}^t\mathcal{G}_{j,k_j}$ に対して, $\mathcal{G}_{j,k_j}$ のカルタン部分代数 $\mathcal{H}_j$ とその正ルートを固定して考える。ρ_j を $\mathcal{G}_{j,k_j}$ のワイル元とし、$\alpha=\sum_{j=1}^t\rho_j/h_j^\vee r_j$ と置く。内部自己同型 $g=\exp(2\pi i\alpha(0))$ の V_1 における位数は $r_jh_j^\vee$ である。

補題 10 任意の $\mathcal{G}_{j,k_j}$ の任意の基本ルート e_s^j に対して、

$$\langle\alpha,e_s^j\rangle=\frac{r_s^j}{r_j}(\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}-1)=\frac{r_s^j}{r_j}\times\frac{K-N}{N}$$

である。ここで、r_s^j は e_s^j が長ルートの場合 r_j と同じであり、短ルートの場合 1 である。特に、ルート格子におけるすべての基本長ルート e_s^j は

$$e_j\in M(\alpha)\otimes e^{\frac{K-N}{2K}\alpha}\otimes X(K-N)$$

であり、復元可能である。基本短ルート e_s^j の場合は、

$$r_je_j\in M(\alpha)\otimes e^{\frac{K-N}{2K}\alpha}\otimes X(K-N)$$

が復元可能である。

[Proof] 実際、$\langle\alpha,e_s^j\rangle=\langle\frac{\rho_j}{r_ih_i^\vee},e_s^j\rangle=\frac{r_s^jk_j}{r_jh_j^\vee}=\frac{r_s^j}{r_j}\times(\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}-1)$ である。 □

4 リーチ格子の軌道深洞と予想

上の考察から、中心電荷２４の正則 VOA V から変形ワイル元 α で定義される内部自己同型を使って軌道構成を行い、リーチ格子 VOA V_Λ を作成した場合、α の V_Λ における像 $\hat{\alpha}$ は次の条件を満たしている。

Conj 1 $\tau\in Co.0$ で、$R=|\tau|$ と置く。$\hat{\alpha}\in\mathbb{Q}\Lambda$ をある $\mathbb{Q}$ 上の正則頂点作用素代数 V の変形ワイル元の軌道構成による $(V_\Lambda)_1=\mathbb{Q}\Lambda$ への像とする。GCD$(N_0,K_0)=1$ なる自然数 N_0,K_0 を使って、$\langle\hat{\alpha},\hat{\alpha}\rangle=\frac{2K_0}{N_0}$ と表示する。このとき、$\hat{\alpha}$ は $\mathbb{Q}\Lambda$ の元として次の性質を満たす。
(1) $N_0\alpha\in\Lambda^{<\tau>}$ であり、N_0 はこれを満たす最小の自然数である。
(2) $\mathbb{C}\Lambda$ のある基底 $\{b_1,...,b_{24}\}$ があって、τ は $\{b_1,...,b_{24}\}$ 上の置換として作用する。し

かも、すべての i に関して $\langle b_i, \alpha\rangle \neq 0$ である。
(3) $K_0 - N_0$ について、
(3.1) もし、τ が置換として固定点を持つなら $K_0 - N_0 = 1$
(3.2) もし、τ が置換として固定点を持たないなら $K_0 - N_0 = 2$ *(e.g* $2C = 2^{12}$*)*
(4) ニイマイヤ格子 $\{(\Lambda \oplus \Pi_{1,1}) \cap (N_0\hat{\alpha}, N_0, K_0)^{\perp}\}/\mathbb{Z}(N_0\hat{\alpha}, N_0, K_0)$ の構造
(4.1) $N_0 \neq 1$ なら、リーチ格子ではない。
(4.2) If $N_0 = 1$ なら、リーチ格子
(5) $\Lambda = \mathbb{Z}N_0\alpha + \sum_{m\in\mathbb{Z}} S^{\tau}_{(m)}$. ここで、$S^{\tau}_{(m)} = \{v \in \Lambda^{<\tau>} \mid \langle N_0\hat{\alpha}, v\rangle = m(K_0 - N_0)\}$
(6) 次の条件を満たすランク $\dim \mathbb{C}\Lambda^{<\tau>}$ のリー代数 $\mathcal{G} = \oplus \mathcal{G}_{j,k_j}$ が存在する。*(*k_j はレベル）
(6.1) $\frac{k_j}{h_j^{\vee}} = \frac{K_0 - N_0}{N_0}$
(6.2) $\mathcal{G}_{j,k_j}$ の基本ルート系 $\{x_1^j, ..., x_{n_j}^j\}$ があって、$\Phi(S^{\tau}_{(-1)})$ はすべての基本長ルート系と基本短ルート x_s^j の r_j 倍 $r_j x_s^j$ を含む。
(6.3) $\sum \dim \mathcal{G}_{j,k_j} = \frac{24K_0}{K_0 - N_0}$,
ここで、写像 $Phi : \sum_m \Lambda^{<\tau>}_{(m)} \to \mathbb{Q}\Lambda$ は $\Phi(\beta) = \beta - \langle \beta, \frac{N_0\hat{\alpha}}{K_0 - N_0}\rangle\hat{\alpha}$ で与えられている。

上記の予想の大半は証明できているが、まだ完全ではない。

定義 11 上の条件を満たす $\hat{\alpha} \in \mathbb{Q}\Lambda$ を τ-軌道深洞と呼ぶ。

Conj 2 $\Phi(\Lambda^{<\tau>})_{(-1)}$ のウエイトが小さい順番から、内積が非正で一時独立なものを選んでいくと、基本ルート系がすべて出てくる。

Conj 3 リーチ格子の軌道深洞の同値類は *(*共役類を除いて）*69* である。

上記の予想がすべて正しければ、ニイマイヤ格子の deep hole による分類と同じように、正則頂点作用素代数の一意性の証明や Scheliking's list に載っているもの以外の非存在の証明が出来たことになる。

5 Appendix

Rank 24　すべてのニイマイヤ格子 VOAs $(N,K)=1$

ランク 16 はすべて $(N,K)=2$

dim	48	72	96	96	120	120
$\langle\alpha,\alpha\rangle$	4	3	8/3	8/3	5/2	5/2
type	$A_{1,2}^{16}$	$A_{3,2}^4A_{1,1}^4$	$D_{4,2}^2C_{2,1}^4$	$A_{5,2}^2C_{2,1}A_{2,1}^2$	$D_{5,2}^2A_{3,1}^2$	$A_{7,2}C_{3,1}^2A_{3,1}$
$2K/N$	$2\cdot 4/2$	$2\cdot 6/4$	$2\cdot 8/6$	$2\cdot 8/6$	$2\cdot 10/8$	$2\cdot 10/8$
dim	144	144	144	168	192	192
$\langle\alpha,\alpha\rangle$	12/5	12/5	12/5	7/3	16/7	16/7
type	$C_{4,1}^4$	$D_{6,2}C_{4,1}B_{3,1}^2$	$A_{9,2}A_{4,1}B_3$	$E_{6,2}C_{5,1}A_{5,1}$	$D_{8,2}B_{4,1}^2$	$C_{6,1}^2B_{4,1}$
$2K/N$	$2\cdot 12/10$	$2\cdot 12/10$	$2\cdot 12/10$	$2\cdot 14/12$	$2\cdot 16/14$	$2\cdot 16/14$
dim	216	240	240	288	384	
$\langle\alpha,\alpha\rangle$	9/4	20/9	20/9	24/11	32/15	
type	$D_{9,2}A_{7,1}$	$C_{8,1}F_{4,1}^2$	$E_{7,2}B_{5,1}F_{4,1}$	$C_{10,1}B_{6,1}$	$E_{8,2}B_{8,1}$	
$2K/N$	$2\cdot 18/16$	$2\cdot 20/18$	$2\cdot 20/18$	$2\cdot 24/22$	$2\cdot 32/30$	

ランク 12 で $(N,K)=2$

dim	36	60	60	84	84
$\langle\alpha,\alpha\rangle$	6	10/3	10/3	14/5	14/5
type	$A_{1,4}^{12}$	$C_{2,2}^6$	$D_{4,4}A_{2,2}^4$	$C_{4,2}A_{4,2}^2$	$B_{3,2}^4$
$2K/N$	$2\cdot 6/2$	$2\cdot 10/6$	$2\cdot 10/6$	$2\cdot 14/10$	$2\cdot 14/10$
dim	108	132	156	300	
$\langle\alpha,\alpha\rangle$	18/7	22/9	26/11	50/23	
type	$B_{4,2}^3$	$A_{8,2}F_{4,2}$	$B_{6,2}^2$	$B_{12,2}$	
$2K/N$	$2\dot{1}8/14$	$2\cdot 22/18$	$2\cdot 26/22$	$2\cdot 50/46$	

ランク 12 で $(N,K)=3$

dim	48	72	96	120	120	168
$\langle\alpha,\alpha\rangle$	4	3	8/3	5/2	5/2	7/3
type	$A_{2,3}^6$	$A_{5,3}D_{4,3}A_{1,1}^3$	$A_{8,3}A_{2,1}^2$	$E_{6,3}G_{2,1}^3$	$D_{7,3}A_{3,1}G_{2,1}$	$E_{7,3}A_{5,1}$
$2K/N$	$2\cdot 6/3$	$2\cdot 9/6$	$2\cdot 12/9$	$2\cdot 15/12$	$2\cdot 15/12$	$2\cdot 21/18$

ランク 10 $(N,K)=4$

dim	48	72	72	96	120
$\langle\alpha,\alpha\rangle$	4	3	3	8/3	5/2
type	$A_{3,4}^3A_{1,2}$	$A_{7,4}A_{1,1}^3$	$D_{5,4}C_{3,2}A_{1,1}^2$	$E_{6,4}C_{2,1}A_{2,1}$	$C_{7,2}A_{3,1}$
$2K/N$	$2\cdot 8/4$	$2\cdot 12/8$	$2\cdot 12/8$	$2\cdot 16/12$	$2\cdot 20/16$

ニイマイヤ以外と上記以外のリストと GCD$(N,K)=(n)$ と $g\in Co.0$ の位数が一致するもの

rk	dim	$\langle\alpha,\alpha\rangle$	$type$	$r_ih_i^\vee$	$2K/N$	$Co.0$	$lattice$
$24-(1)$	12					1_A	Leech lattice
$16-(2)$	48	4	$A_{1,2}^{16}$	2	$4=\frac{2\times4}{2}$	2_A	Barnes-Wall
$12-(2)$	36	6	$A_{1,4}^{12}$	2	$6=\frac{2\times6}{2}$	2_C	D_{12}^2
$12-(3)$	48	4	$A_{2,3}^{6}$	3	$4=\frac{2\times6}{3}$	3_B	Coxeter-Todd
$10-(4)$	48	4	$(A_{3,4})^3A_{1,2}$	$4,2$	$4=\frac{2\times8}{4}$	4_C	
$8-(5)$	48	4	$(A_{4,5})^2$	5	$4=\frac{2\times10}{5}$	5_B	
	72	3	$D_{6,5}A_{1,1}^2$	$10,2$	$3=\frac{2\cdot15}{10}$		
$8-(6)$	48	4	$A_{5,6}C_{2,3}A_{1,2}$	$6,6,2$	$4=\frac{2\times12}{6}$	6_E	
	72	3	$C_{5,2}G_{2,2}A_{1,1}$	$12,12,2$	$3=\frac{2\cdot18}{12}$		
$6-(6)$	36	6	$D_{4,12}A_{2,6}$	$6,3$	$6=\frac{2\times18}{6}$	6_G	
	60	$10/3$	$F_{4,6}A_{2,2}$	$18,2$	$\frac{10}{3}=\frac{2\cdot30}{18}$		
$6-(7)$	48	4	$A_{6,7}$	7	$4=\frac{2\times14}{7}$	7_B	
$6-(8)$	48	4	$D_{5,8}A_{1,2}$	$8,2$	$4=\frac{2\times18}{8}$	8_E	
$4-(10)$	36	6	$C_{4,10}$	10	$6=\frac{2\times30}{10}$	10_F	

参考文献

[1] K. Betsumiya, A. Munemasa, On triply even binary codes, J. Lond. Math. Soc. 86 (2012), 1-16.

[2] R.E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 83 (1986), 3068–3071.

[3] S. Carnahan, M. Miyamoto, *Rationality of fixed-point vertex operator algebras.* arXiv:1603.05645.

[4] J.H. Conway, A characterisation of Leech's lattice, Invent. Math., 7 (1969), 137–142.

[5] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups. Third edition* Springer-Verlag, New York, 1999.

[6] C. Dong, X. Jiao, F. Xu, Mirror Extensions of Vertex Operator Algebras, Comm. Math. Phys., 329, (2014), 263–294

[7] C. Dong, G. Mason. Rational vertex operator algebras and the effective central charge. Int. Math. Res. Not., 2004(56):2989–3008, 2004. (arXiv:math/0201318v1 [math.QA]).

[8] C. Dong, G. Mason. Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, Pacific J. Math. 213 (2004) No.2 253–266.

[9] C.H. Lam, H. Shimakura, 71 holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 14 (2019), no. 1, 87–118.

[10] H. Li, Local systems of twisted vertex operators, vertex operator superalgebras and twisted modules, in Moonshine, the Monster, and related topics, 203–236, Contemp. Math. 193, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[11] S. Möller, N.R.Scheithauer, Dimension Formulae and Generalised Deep Holes of the Leech Lattice Vertex Operator Algebra, arXiv:1910.04947

[12] H.V. Niemeier, Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1, J. Number Theory, 5 (1973), 142–178.

[13] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, Comm. Math. Phys., 153 (1993), 159–185.