Tight relative t-designs on two shells in hypercubes, and Hahn and Hermite polynomials

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
田中 太初

Hajime Tanaka
Research Center for Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Information Sciences
Tohoku University

本稿の内容は坂内英一氏、坂内悦子氏、及び Yan Zhu 氏との共同研究に基づく。

$(X, \mathscr{R})$, $\mathscr{R} = \{R_0, R_1, \ldots, R_n\}$, を対称アソシエーションスキームとし、$A_0, A_1, \ldots, A_n$ を隣接行列、$E_0, E_1, \ldots, E_n$ を原始べき等元とする (アソシエーションスキームの定義やその基本的な性質等については [8, 20] 等を参照されたい)。以下、$E_0, E_1, \ldots, E_n$ は Q-多項式順序だとする。行と列が X で添え字付けられた複素正方行列全体のなす $\mathbb{C}$-代数を $M_X(\mathbb{C})$ とする。A_i や E_i 達は $M_X(\mathbb{C})$ の元である。また、X で成分が添え字付けられた複素縦ベクトル全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $V = \mathbb{C}^X$ とし、通常のエルミート内積を入れる。

(Y, ω) を X の重み付き部分集合とする。すなわち、$Y \subset X$ かつ $\omega : Y \to (0, \infty)$ である。ただし本稿では $\omega(y) = 0$ $(y \in X \backslash Y)$ として ω の定義域を X 全体に拡張し、さらに X 上の関数を自然に V の元と同一視する。従って $\omega \in V$ は非負ベクトルであり、かつ $Y = \operatorname{supp} \omega$ となる。次の定義は Delsarte [9] による：

Definition 1. A weighted subset (Y, ω) of X is called a *t-design* in $(X, \mathscr{R})$ if $E_i \omega = 0$ for $1 \leqslant i \leqslant t$.

この定義は代数的であるが、Delsarte [9, 10] は Johnson スキームと Hamming スキームの場合に、t-デザインの概念が (重みを許した) 組合せ t-(v, k, λ) デザイン及び強さ t の直交配列とそれぞれ同値であることを示した。他のいくつかの古典的なアソシエーションスキームの系列について、この概念の同様な組合せ的特徴付けが知られている ([10, 12, 21, 25])。

X の部分集合 Y の特性ベクトルを $\hat{Y} \in V$ とする。1 点集合 $\{y\}$ の場合は単に $\hat{y}$ と書くことにする。以下、「基点」$x \in X$ を固定する。Delsarte [11] は t-デザインの概念を次のように拡張した：

Definition 2. A weighted subset (Y, ω) of X is called a *relative t-design* in $(X, \mathscr{R})$ (with respect to x) if $E_i \omega \in \operatorname{span}\{E_i \hat{x}\}$ for $1 \leqslant i \leqslant t$.

Delsarte [11] はこの相対 t-デザインに対しても、古典的な系列に関して組合せ的特徴付けを与えている。本稿では n 次元超立方体 $\mathcal{Q}_n (= 2$ 進 Hamming スキーム $H(n, 2))$ に注目するが、この場合は頂点集合 $X = \{0, 1\}^n$ を自然に $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合全体の集合と同一視し、$x = (0, 0, \ldots, 0)$ とすると、相対 t-デザインは重みを許した所謂正則 t-均衡デザ

インと同値である。すなわち、$\{1,2,\ldots,n\}$ の任意の i 点部分集合 (ただし $i \leqslant t$) に対し、それを含むブロックの重みの和が i だけで決まる定数である。

Delsarte による Q-多項式スキーム上の t-デザインの理論は、Delsarte–Goethals–Seidel [13] により実単位球面を近似する球 t-デザインの理論に移植され、これはさらに Neumaier–Seidel [22] (cf. [14]) により複数の同心球面上のユークリッド t-デザインに拡張されたが、ユークリッド t-デザインはユークリッド空間に於ける相対 t-デザインの類似とみなせる。この点については坂内–坂内 [3] が論じている。基点 x に関するシェル $X_0, X_1, \ldots, X_n$ を

$$X_i = \{y \in X : (x,y) \in R_i\} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

と定める。また、重み付き部分集合 (Y,ω) に対して

$$L = L_Y = \{\ell : Y \cap X_\ell \neq \emptyset\}$$

とおき、(Y,ω) は $\bigsqcup_{\ell \in L} X_\ell$ でサポートされる、ということにする。このとき、次が成り立つ：

Proposition 3 (cf. [3, Theorem 4.5]). *Let (Y,ω) be a weighted subset supported on $\bigsqcup_{\ell \in L} X_\ell$. Then, (Y,ω) is a relative t-design if and only if*

$$\langle \omega, v \rangle = \sum_{\ell \in L} \frac{\langle \omega, \hat{X}_\ell \rangle}{|X_\ell|} \langle \hat{X}_\ell, v \rangle$$

for every $v \in \sum_{i=0}^{t} E_i V$.

この結果は実際、Terwilliger 代数の基本的な事項を用いて容易に示される。各 $0 \leqslant i \leqslant n$ に対し、対角行列 $E_i^* = E_i^*(x) \in M_X(\mathbb{C})$ を

$$(E_i^*)_{y,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in X_i, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad (y \in X)$$

により定める。行列 E_i^* 達は $(X,\mathscr{R})$ の双対べき等元と呼ばれる。$(X,\mathscr{R})$ の Terwilliger 代数 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(x)$ とは、隣接行列 $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (或いは原始べき等元 $E_0, E_1, \ldots, E_n$) 及び双対べき等元 $E_0^*, E_1^*, \ldots, E_n^*$ 達で生成される $M_X(\mathbb{C})$ の部分代数である [27]。Delsarte 理論では隣接行列達で生成される可換代数である Bose–Mesner 代数が主要な役割を果たしたが、相対 t-デザインの研究は非可換代数である Terwilliger 代数の理論と相性が良い (cf. [6])。シェル達に関して

$$\hat{X}_i = E_i^* \hat{X} = A_i \hat{x} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

という等式が成り立つことから、$\boldsymbol{T}$-加群 $\boldsymbol{T}\hat{x}$ について

$$\boldsymbol{T}\hat{x} = \mathrm{span}\{\hat{X}_i : 0 \leqslant i \leqslant n\} = \mathrm{span}\{E_i \hat{x} : 0 \leqslant i \leqslant n\}$$

となることが分かる。$\boldsymbol{T}\hat{x}$ は $n+1$ 次元既約 $\boldsymbol{T}$-加群であることもすぐ確かめられ (cf. [27, Lemma 3.6])、しばしば主 $\boldsymbol{T}$-加群と呼ばれる。命題 3 を示すには、$\sum_{i=0}^{t} E_i \omega \in V$ の $\boldsymbol{T}\hat{x}$ への射影を二通りに検討すれば良い。

本稿の研究の出発点は次の結果であった：

Theorem 4. *Let (Y, ω) be a relative t-design supported on $\bigsqcup_{\ell \in L} X_\ell$. Then $(Y \cap X_\ell, E_\ell^* \omega)$ is a relative $(t - |L| + 1)$-design for every $\ell \in L$.*

証明は実際、Delsarte [11, Theorem 8.4] による Assmus–Mattson 型定理の筆者による別証明 [26, Theorem 4.3] が全くそのまま有効であるが、この結果は坂内–坂内–Zhu [7, Theorem 3.3] の結果の亜種とみなせ、さらに後者は景山 [17, Proposition 1] の結果を一般化したものである。

坂内–坂内 [3, Theorem 4.8] は相対 t-デザインのサイズの Fisher 型不等式を示した：

Theorem 5. *Let (Y, ω) be a relative $2e$-design $(e \in \mathbb{N})$ supported on $\bigsqcup_{\ell \in L} X_\ell$. Then*

$$|Y| \geqslant \dim \left(\sum_{\ell \in L} E_\ell^* \right) \left(\sum_{i=0}^{e} E_i V \right).$$

Definition 6. A relative $2e$-design (Y, ω) is called *tight* if equality holds above.

Xiang [28] は n 次元超立方体 $\mathcal{Q}_n$ について、全ての $\ell \in L$ が $e \leqslant \ell \leqslant n - e$ を満たす場合に Fisher 型不等式の右辺を計算した：

$$\dim \left(\sum_{\ell \in L} E_\ell^* \right) \left(\sum_{i=0}^{e} E_i V \right) = \sum_{i=0}^{\min\{|L|-1, e\}} \binom{n}{e-i}$$

Xiang の結果の Terwilliger 代数を用いた別証明は [6, Theorem 2.7, Example 2.9] を参照されたい。

以後、本稿では $\mathcal{Q}_n$ 上のタイトな相対 $2e$-デザインを考察する。$|L| = 1$ の場合は通常のタイトな組合せ $2e$-デザインであり、Delsarte 理論 [9] によってクラス e の Q-多項式スキームを誘導する。また $L = \{k\}$ とすると、次の e 次多項式の零点が全て整数でなければならないことも示される：

$$\psi_e^k(\xi) = {}_3F_2 \left(\left. \begin{matrix} -\xi, -e, e-n \\ k-n+1, 1-k \end{matrix} \right| 1 \right) \in \mathbb{R}[\xi]$$

なお、多項式 $\psi_e^k(\xi)$ は、超幾何直交多項式の階層である Askey スキーム [18, 19] に属する Hahn 多項式 [19, §1.5] の一種である。坂内 [1] はこの強力な判定条件を用いて、各 $e \geqslant 5$ に対して非自明なタイト組合せ $2e$-デザインが高々有限個しか存在しないことを証明した (cf. [15, 23, 29])。本稿の目的はこれらの結果を $|L| = 2$ の場合に拡張することであり、次の設定で議論を進める：

Assumption 7. For the rest of this report, let (Y, ω) be a tight relative $2e$-design $(e \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{Q}_n$ supported on two shells $X_\ell \sqcup X_m$, where

$$e \leqslant \ell < m \leqslant n - \ell \,(\leqslant n - e).$$

この設定は弱く、また一般性を失うものではないことに注意する。実際、定理 4 より二つのシェルへの制限 $(Y \cap X_\ell, E_\ell^* \omega)$ 及び $(Y \cap X_m, E_m^* \omega)$ はそれぞれ組合せ $(2e-1)$-デザイ

ンになるので、例えばもし $\ell < e$ か $\ell > n-e$ ならば前者は自明なデザインとなり、従って後者は組合せ $2e$-デザインになっている。すなわち、これは本質的に $|L|=1$ の場合である。$m<e$ か $m>n-e$ のときも同様である。また、各ブロックの補集合を取ることにより、ℓ と m がそれぞれ $n-\ell$ と $n-m$ に変わるので、必要に応じてこの変換を行って上の設定に帰着できるのである。

本稿の一つ目の主結果は次である：

Theorem 8. *Recall Assumption 7. The following hold:*

(i) *Y induces a coherent configuration of type* $\left[\begin{smallmatrix} e+1 & e \\ e & e+1 \end{smallmatrix}\right]$.

(ii) *The zeros of the polynomial*

$$\psi_e^{\ell,m}(\xi) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -\xi, -e, e-n-1 \\ m-n, -\ell \end{matrix}\middle| 1\right) \in \mathbb{R}[\xi]$$

of degree e are integral.

定理中の多項式 $\psi_e^{\ell,m}(\xi)$ もやはり Hahn 多項式の一種である。証明では $\mathcal{Q}_n$ の Terwilliger 代数の表現論を駆使する (cf. [16], [20, §10])。なお、$e=1$ の場合は坂内–坂内–坂内 [5] が取り扱っている。$e=2$ の場合について以下に述べる。

Example 9. $e=2$ のとき

$$\begin{aligned}\psi_2^{\ell,m}(\xi) &= 1 + \frac{(-\xi)(-2)(1-n)}{(m-n)(-\ell)} + \frac{(-\xi)(1-\xi)(-2)(-1)(1-n)(2-n)}{(m-n)(m-n+1)(-\ell)(1-\ell)2} \\ &= 1 - \frac{2(n-1)\xi}{(n-m)\ell} + \frac{(n-1)(n-2)\xi(\xi-1)}{(n-m)(n-m-1)\ell(\ell-1)}\end{aligned}$$

となる。坂内–坂内–Zhu [7] が次のパラメータのタイト相対 4-デザインを挙げている：

n	ℓ	m	ξ
22	6	7	$3,5$
22	6	15	$1,3$

右端の列に示した零点は確かに整数である。一方、同じ論文 [7, §6] で、次のパラメータのタイト相対 4-デザインの存在・非存在が未解決となっていた：

n	ℓ	m	ξ
37	9	16	$\frac{1}{14}(71 \pm \sqrt{337})$
37	9	21	$\frac{1}{14}(55 \pm \sqrt{337})$
41	15	16	$\frac{1}{26}(237 \pm \sqrt{1569})$
41	15	25	$\frac{1}{26}(153 \pm \sqrt{1569})$

しかしながら零点は整数ではなく、非存在が直ちに結論される。

次に、坂内 [1] の結果の $|L|=2$ の場合への拡張を考える。本稿では詳細は議論しないが、Hahn 多項式の極限として Hermite 多項式が得られることは良く知られており (cf. [18, 19])、坂内は Hermite 多項式の零点の対称性を用いて次のような議論を行った：

Step 1: ある固定した $e \geqslant 5$ に対して非自明なタイト組合せ $2e$-(n,k,λ) デザイン (ここで $n \geqslant 2k$) が無限個存在すると仮定し、これらに対応する分数 $k/n \in [0,1]$ の集合の集積点が $1/2$ のみであり、有限個の例外を除いて $n=2k+1$ となることを示す。

Step 2: $\psi_e^k(\xi)=\sum_{i=0}^{e} a_i \xi^{e-i}$ と表すと、零点が全て整数であることより $a_i/a_0 \in \mathbb{Z}$ $(0 \leqslant i \leqslant e)$ となるが、Schur [24, Satz I] による次の定理を用いて、$n=2k+1$ ならばこれが不可能であることを示す：

Theorem 10. *Let $\mathfrak{a}, \mathfrak{k} \in \mathbb{N}$ $(\mathfrak{a} > \mathfrak{k})$. Then the product of $\mathfrak{k}$ consecutive odd integers*

$$\mathfrak{s} = (2\mathfrak{a}+1)(2\mathfrak{a}+3)\cdots(2\mathfrak{a}+2\mathfrak{k}-1)$$

has a prime factor greater than $2\mathfrak{k}+1$, except for the following cases: (i) $\mathfrak{k}=2$ and $\mathfrak{s}=25\cdot 27$; (ii) $\mathfrak{k}=1$ and $\mathfrak{s}=3^i$ $(i \geqslant 2)$.

以上の議論を仮定 7 の状況の下で $|L|=2$ の場合に拡張したいのであるが、種々の難点があった。例えば、十分大きな e についてやはりタイトな相対 $2e$-デザインが無限個あると仮定して、対応する xy-平面上の点 $(\ell/n, m/n) \in [0,1]^2$ の集積点を考えると、y 成分が $1/2$ となることは示せるのであるが、x 成分については何も言えない (と思われる)。また、上記の Schur の定理を $\psi_e^{\ell,m}(\xi)$ に適用しようとしても、ℓ の挙動が分からないので、運良く整数性が満たされてしまう可能性が除外できない。満足の行く結果とは言い難いが、現段階では ℓ に条件を付けることで、次の定理を証明した：

Theorem 11. *For any $\delta \in (0,1/2)$, there exists $e_0 = e_0(\delta) > 0$ with the property that, for every given integer $e \geqslant e_0$ and each constant $c>0$, there are only finitely many tight relative $2e$-designs (Y,ω) (up to scalar multiples of ω) supported on two shells $X_\ell \sqcup X_m$ in $\mathcal{Q}_n$ satisfying Assumption 7 such that*

$$\ell < c \cdot n^{\delta}.$$

なお、Schur の定理はそのままでは使えないので、証明の手法を援用して次の命題を準備し、定理 11 の証明に於いて代用した：

Proposition 12. *For any $\vartheta > 0$ and $\delta \in (0, 1/\vartheta)$, there exists $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0(\vartheta,\delta) > 0$ such that the following holds for every given integer $\mathfrak{k} \geqslant \mathfrak{k}_0$ and each constant $c>0$: for all but finitely many pairs $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ of positive integers with*

$$\mathfrak{b} < c \cdot \mathfrak{a}^{\delta},$$

the product of $\mathfrak{k}$ consecutive odd integers

$$(2\mathfrak{a}+1)(2\mathfrak{a}+3)\cdots(2\mathfrak{a}+2\mathfrak{k}-1)$$

has a prime factor which is greater than $2\mathfrak{k}+1$ and whose exponent in this product is greater than that in

$$(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{b}+2)\cdots(\mathfrak{b}+\lfloor \vartheta \mathfrak{k} \rfloor).$$

坂内–坂内 [2, 4] は二つの同心球面上のタイトなユークリッド t-デザインに関する種々の結果を得たが、本稿の結果は彼らの結果 (の一部) の $\mathcal{Q}_n$ に於ける類似ともみなせる。

参考文献

[1] E. Bannai, On tight designs, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 28 (1977) 433–448.

[2] E. Bannai and E. Bannai, Euclidean designs and coherent configurations, in: R. A. Brualdi et al. (Eds.), Combinatorics and graphs, Contemporary Mathematics, vol. 531, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, pp. 59–93; arXiv:0905.2143.

[3] E. Bannai and E. Bannai, Remarks on the concepts of t-designs, J. Appl. Math. Comput. 40 (2012) 195–207.

[4] E. Bannai and E. Bannai, Tight t-designs on two concentric spheres, Mosc. J. Comb. Number Theory 4 (2014) 52–77.

[5] E. Bannai, E. Bannai, and H. Bannai, On the existence of tight relative 2-designs on binary Hamming association schemes, Discrete Math. 314 (2014) 17–37; arXiv:1304.5760.

[6] E. Bannai, E. Bannai, S. Suda, and H. Tanaka, On relative t-designs in polynomial association schemes, Electron. J. Combin. 22 (2015) #P4.47; arXiv:1303.7163.

[7] E. Bannai, E. Bannai, and Y. Zhu, Relative t-designs in binary Hamming association scheme $H(n, 2)$, Des. Codes Cryptogr. 84 (2017) 23–53; arXiv:1512.01726.

[8] E. Bannai and T. Ito, Algebraic combinatorics I: Association schemes, Benjamin/Cummings Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[9] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Rep. Suppl. No. 10 (1973).

[10] P. Delsarte, Association schemes and t-designs in regular semilattices, J. Combin. Theory Ser. A 20 (1976) 230–243.

[11] P. Delsarte, Pairs of vectors in the space of an association scheme, Philips Res. Rep. 32 (1977) 373–411.

[12] P. Delsarte, Hahn polynomials, discrete harmonics, and t-designs, SIAM J. Appl. Math. 34 (1978) 157–166.

[13] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geometriae Dedicata 6 (1977) 363–388.

[14] P. Delsarte and J. J. Seidel, Fisher type inequalities for Euclidean t-designs, Linear Algebra Appl. 114/115 (1989) 213–230.

[15] P. Dukes and J. Short-Gershman, Nonexistence results for tight block designs, J. Algebraic Combin. 38 (2013) 103–119; arXiv:1110.3463.

[16] J. T. Go, The Terwilliger algebra of the hypercube, European J. Combin. 23 (2002) 399–429.

[17] S. Kageyama, A property of T-wise balanced designs, Ars Combin. 31 (1991) 237–238.

[18] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw, Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[19] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analog, report 98-17, Delft University of Technology, 1998. Available at `http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html`

[20] W. J. Martin and H. Tanaka, Commutative association schemes, European J. Combin. 30 (2009) 1497–1525; arXiv:0811.2475.

[21] A. Munemasa, An analogue of t-designs in the association schemes of alternating bilinear forms, Graphs Combin. 2 (1986) 259–267.

[22] A. Neumaier and J. J. Seidel, Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 50 (1988) 321–334.

[23] C. Peterson, On tight 6-designs, Osaka J. Math. 14 (1977) 417–435.

[24] I. Schur, Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen II, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1929 (Gesammelte Abhandlungen, Vol. III, pp. 152–173).

[25] D. Stanton, t-designs in classical association schemes, Graphs Combin. 2 (1986) 283–286.

[26] H. Tanaka, New proofs of the Assmus–Mattson theorem based on the Terwilliger algebra, European J. Combin. 30 (2009) 736–746; arXiv:math/0612740.

[27] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme I, J. Algebraic Combin. 1 (1992) 363–388.

[28] Z. Xiang, A Fisher type inequality for weighted regular t-wise balanced designs, J. Combin. Theory Ser. A 119 (2012) 1523–1527.

[29] Z. Xiang, Nonexistence of nontrivial tight 8-designs, J. Algebraic Combin. 47 (2018) 301–318.