Support τ-tilting module over blocks of finite groups

東京理科大学 (Tokyo University of Science)
小塩遼太郎 (Ryotaro KOSHIO)
東京理科大学 (Tokyo University of Science)
小境雄太 (Yuta KOZAKAI)

1 導入

[AIR14] において提唱された τ-tilting theory は、tilting module の一般化である τ-tilting module に関する理論である。有限群のブロックなどの有限次元対称多元環においては、tilting module が Morita theory における progenerator と一致してしまうため、tilting theory が意味をなさなかった。しかし、そのような多元環に対しても、τ-tilting module に関する議論は、progenerator 以外の考察が可能である。一方で、有限群のブロックに関する τ-tilting theory の結果はほとんどなく、関連する研究も、ほとんどが環論的な手法によるものである。そこで、τ-tilting theory を有限群のブロックの理論に適用し、特定の条件を満たすブロックたちに関して、それらの上の support τ-tilting module 全体の間に 1 対 1 対応があることを示した。さらに、この 1 対 1 対応は、有限群の表現論においては基本的な、誘導関手とよばれる関手により引き起こされ、support τ-tilting module の間の半順序構造もこの対応により保たれる。本稿では、その概要を報告する。

2 導来同値と tilting complex

代数的閉体上 k の有限次元対称多元環 Λ 及び Γ に対して、Λ と Γ が導来同値であるとは、それぞれの有限生成 左 module の complex からなる有界導来圏 $D^b(\Lambda\text{-}\mathsf{mod})$ と $D^b(\Gamma\text{-}\mathsf{mod})$ が三角圏として同値であるときをいう。多元環の導来同値に関する考察は、適切な tilting complex をみつけることに帰着されることが Rickard によって示された [Ric89]。tilting complex の定義は以下で与えられる。

Definition 2.1 ([Ric89])**.** Λ 上の射影 左 module の complex からなるホモトピー圏における complex $T \in K^b(\Lambda\text{-}\mathsf{proj})$ が tilting complex であるとは、T に関する以下の 2 つの条件が成り立つことをいう。

- 任意の 0 でない整数 n に対して $\mathrm{Hom}_{K^b(\Lambda\text{-}\mathsf{proj})}(T, T[n]) = 0$ が成り立つ。
- T の直和因子の有限直和全体の成す $K^b(\Lambda\text{-}\mathsf{proj})$ の部分圏 $\mathsf{add}\, T$ が、三角圏として

$K^b(\Lambda\text{-}\mathsf{proj})$ を生成する。

Theorem 2.2 ([Ric89])**.** 代数的閉体 k 上の有限次元対称多元環 Λ 及び Γ に対して、以下の 2 条件は同値である。

- Λ と Γ が導来同値である。
- Λ 上の tilting complex $T \in K^b(\Lambda\text{-}\mathsf{proj})$ が存在して、その自己準同型多元環 $\mathrm{End}_{K^b(\Lambda\text{-}\mathsf{proj})}(T)$ が Γ^{op} と同型となる。

有限次元多元環 Λ 上の tilting complex T 及び T' に対して、$\mathsf{add}\, T = \mathsf{add}\, T'$ となるとき $T \sim T'$ と書く。この同値関係で Λ 上の tilting complex 全体を類別して得られる集合を $\mathsf{tilt}\,\Lambda$ で表す。$\mathsf{tilt}\,\Lambda$ を決定すると、多元環 Λ と導来同値である基本的多元環がすべて決定される。また、$\mathsf{tilt}\,\Lambda$ には、以下で定義される半順序構造が定まる。

Definition–Theorem 2.3 ([AI12])**.** $T, T' \in \mathsf{tilt}\,\Lambda$ に対して、関係 $T \geq T'$ を以下の条件が成り立つこととして定める:

$$\mathrm{Hom}_{K^b(\Lambda\text{-}\mathsf{proj})}(T, T'[n]) = 0 \quad (n > 0)$$

この関係は $\mathsf{tilt}\,\Lambda$ 上の半順序構造を与える。

[AI12] において、上の順序は tilting complex たちの間の関係性を調べる上で有用であることが示されている。実際、$T_1 \lneq T_2$ となる $T_1, T_2 \in \mathsf{tilt}\,\Lambda$ に対して、$T_1 \lneq T' \lneq T_2$ となる $T' \in \mathsf{tilt}\,\Lambda$ が存在しないことと、T_1 が T_2 の既約変異になることが同値である。そこで、半順序集合 $\mathsf{tilt}\,\Lambda$ について考察したいのだが、直接調べることはとても難しい。そこで、特別な形の 2-term tilting complex について限定して考察するという方針が立てられる。

Definition 2.4. 有限次元多元環 Λ 上の tilting complex $T = [\cdots \to T^{-2} \to T^{-1} \to T^0 \to T^1 \to \cdots]$ に対して、 T^0, T^{-1} 以外の項がすべて 0 であるとき、T は 2-term tilting complex であるという。

Λ 上の 2-term tilting complex 全体を、$\mathsf{tilt}\,\Lambda$ の構成と同じ同値関係 $\sim$ で類別して得られる集合を $2\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ と表す。$2\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は自然に $\mathsf{tilt}\,\Lambda$ の部分集合とみなせて、同じ半順序構造をもつ。2-term tilting complex 全体は、有限次元対称多元環の導来同値の計算において重要である Okuyama–Rickard tilting complex [Oku97] をすべて含んでいる。このため、2-term に限定した考察も十分に有用である。そのうえ、2-term tilting complex に関する考察は、2-term でない tilting complex に対する考察の手掛かりとなることも期待される [AM17] 。そして、$2\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は次の節にて定義される support τ-tilting Λ-module 全体から得られる半順序集合 $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ と同型になる。さらに、support τ-tilting module の変異も定義され、上で述べた tilting complex の既約変異と対応する。すなわち、2-term tilting complex に関する考察が、support τ-tilting module に関する考察へと置き換えられる。

3 有限次元対称多元環の τ-tilting theory

引き続き、Λ を有限次元対称多元環とする。τ は Auslander–Reiten transrate とする。Λ-module M に対して、$|M|$ で M の直既約な直和因子の同型類の個数を表すこととする。$|\Lambda|$ は、左 Λ-module としての Λ の非同型な直既約直和因子の個数を表し、これは単純 Λ-module の同型類の個数と一致する。

Definition 3.1 ([AIR14])**.** M を Λ-module とする。

- M が τ-tilting Λ-module であるとは、$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$ と $|M| = |\Lambda|$ が成り立つことをいう。
- M が support τ-tilting Λ-module であるとは、ある Λ のべき等元 e が存在して、M が τ-tilting $\Lambda/\Lambda e\Lambda$-module となることをいう。

Remark 3.2. 定義から以下が直ちにしたがう。

- 左 Λ-module Λ は τ-tilting Λ-module である。
- support τ-tilting Λ-module は τ-tilting Λ-module である。
- 0 は support τ-tilting Λ-module である。

support τ-tilting Λ-module M, M' に対して $\mathsf{add}\, M = \mathsf{add}\, M$ となるとき $M \sim M'$ と書く。この同値関係で support τ-tilting Λ-module 全体を類別して得られる集合を $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ で表す。$\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ には次で定義される半順序構造が定まる。

Definition–Theorem 3.3 ([AIR14])**.** $M, M' \in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ に対して、関係 $M \geq M'$ を次の条件が成り立つこととして定める: ある非負整数 r と全射準同型 $M^{\oplus r} \to M'$ が存在する。この関係は $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ 上の半順序構造を与える。

Remark 3.4. 定義から、Λ と 0 はそれぞれ半順序集合 $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ の最大元、最小元となる。

Theorem 3.5 ([AIR14])**.** 半順序集合としての同型

$$\mathsf{2\text{-}tilt}\,\Lambda \to \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$$

が次のように与えられる: $\mathsf{2\text{-}tilt}\,\Lambda \ni T \mapsto H^0(T) \in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$. ただし $H^0(T)$ は T の 0 次の homology を表す。

上の同型から、半順序集合 $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ に関する考察は $\mathsf{2\text{-}tilt}\,\Lambda$ に置き換えることが可能である。そこで、$\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ について記述する際に、$\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$ のハッセ図 $\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$ を考えることは有用である。$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$ は、次のようなグラフ理論的な性質を有している。

Proposition 3.6 ([AIR14])**.** $\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$ に対して、以下の 2 条件が成り立つ。

- $\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$ は $|\Lambda|$ 正則グラフとなる。
- もし、$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$ が有限個の頂点からなる連結成分 $\mathcal{C}$ をもつならば、$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$ は $\mathcal{C}$ と一致する。

Remark 3.7. 上の性質を用いることで、Λ が単純多元環、もしくは局所多元環のときの $\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$ が、$|\Lambda| = 1$ であることから、次のように計算される。

$$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda): \begin{array}{c}\Lambda \\ \Big| \\ 0\end{array}$$

4 群環のブロックと τ-tilting theory

3 節にて説明した τ-tilting theory は、有限群の群環やそのブロックに対しても適用できる。G を有限群、k を標数 p の代数的閉体として、kG で k 上の G の群環を表すものとする。群環 kG には、多元環としての一意的な直既約直積分解 $kG = B_1 \times \cdots \times B_l$ が存在する。この分解を kG のブロック分解といい、各 B_i を群環 kG のブロックという。群環 kG のブロック分解は加群圏の直積分解 $kG\text{-}\mathsf{mod} = B_1\text{-}\mathsf{mod} \times \cdots \times B_l\text{-}\mathsf{mod}$ も導く。このため、有限群の表現論に関する考察はそれぞれのブロックに対する考察に帰着される。次の命題は群環 kG のブロックが扱いやすいものとなるための十分条件を与えるものである。

Proposition 4.1 ([Alp86, Chapter 5])**.** B を群環 kG のブロックとする。

1. 有限群 G が巡回シロー p 部分群をもつならば、ブロック B は有限表現型となる。すなわち、直既約 B-module の同型類の個数は有限個となる。
2. ブロック B が有限表現型のとき、B は単純多元環、もしくは Brauer tree 多元環となる。

ブロック B が単純多元環である場合の $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,B$ は、Remark 3.7 にて計算した。B が Brauer tree 多元環である場合の、その上の support τ-tilting module に関しては、 多元環の表現論的な多くの先行研究がある ([Ada16]、[Aok18]、[AAC18]、[AMN20] 等)。

群環のブロックは、一般には有限表現型でない。そして、そのような場合、無限表現型に対する τ-tilting theory については、tame 表現型である場合をのぞいて、ほとんど分かっていない (tame 表現型である場合の support τ-tilting については [EJR18] にて決定されている)。 tame 表現型でない無限表現型 (つまり wild 表現型) のブロックに対しては、その加群圏の構造がとても複雑となるため、多元環論の表現論的な考察が困難であり、先行研究がほとんどない。しかし、その上の support τ-tilting module に関する考察が、有限表現型の場合に帰着できることがある。[EJR18] にて示された次の命題がその一例である。

Proposition 4.2 ([EJR18])**.** B を群環 kG のブロック、Q を有限 p 群とする。$B \otimes_k kQ$ は群環 $k[G \times Q]$ のブロックとなるが、このとき $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,B$ と $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}(B \otimes_k kQ)$ は半順序集合として同型と

なる。

この結果は、有限群 G と p 群 Q との直積で得られる有限群 $\widetilde{G} = G \times P$ に対しては、その群環 $k\widetilde{G}$ のブロックの support τ-tilting module の計算が、より小さく考えやすい群環 kG のブロックに対するそれの計算に帰着されることを示している。このブロックに対する主張も、その証明は多元環論的な手法によるものである。我々は、モジュラー表現論的な手法を用いることで、上の結果を部分的に含むような結果を得た。

5 主結果

群 G を正規部分群として含むような有限群 $\widetilde{G}$ について考える。B と $\widetilde{B}$ をそれぞれ群環 kG、$k\widetilde{G}$ のブロックとする。

Theorem 5.1. G が巡回シロー p 部分群をもち、剰余群 $\widetilde{G}/G$ が p-group であるとする。また、ブロック $\widetilde{B}$ はブロック B を被覆するとする (すなわち、B と $\widetilde{B}$ の多元環としての単位元 $1_B, 1_{\widetilde{B}}$ の積が 0 にならないとする)。このとき、半順序集合としての同型 $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, B \cong \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, \widetilde{B}$ が、誘導関手 $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}} := k\widetilde{G} \otimes_{kG} -$ によって与えられる。

群環 $k\widetilde{G}$ のブロックは、ある kG のブロックを被覆する。そのため、この結果から、群環 $k\widetilde{G}$ のブロック $\widetilde{B}$ に対する support τ-tilting module の計算は、それが無限表現型のブロックであったとしても、単純多元環か Brauer tree 多元環かのいずれかとなる、kG の有限表現型のブロックに対する support τ-tilting module の計算に帰着されるということがわかる。先にも述べたように、Brauer tree 多元環の support τ-tilting module に関しては多くの先行研究があるため、これらの結果を適用できる。さらに、この同型を通して、次のような 2-term の tilting complex たちの間の対応も得られる。

Corollary 5.2. Theorem 5.1 と同じ記号、仮定のもとで、次の図式を可換とするような半順序集合としての同型 $\textsf{2-tilt}\, B \cong \textsf{2-tilt}\, \widetilde{B}$ が誘導関手 $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}$ によって与えられる。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, B \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, \widetilde{B} \\ \textsf{2-tilt}\, B \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\sim"'] & \textsf{2-tilt}\, \widetilde{B} \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

ただし、縦の 2 つの同型は Theorem 3.5 にて与えられたものである。

6　具体例

p を奇素数、$D_{p^n} \cong C_{p^n} \rtimes C_2$ を位数が $2p^2$ であるような二面体群とする。群環 kG は多元環として直既約、すなわち自分自身がブロックとなり、$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, kG)$ は次のように計算される。

$$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, kG):\quad
\begin{tikzcd}
 & kG \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P(k_G) \oplus k_G \arrow[d] & & P(s_G) \oplus s_G \arrow[d] \\
k_G \arrow[dr] & & s_G \arrow[dl] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ただし、k_G と s_G はそれぞれ自明表現、符号表現に対応する単純 kG-module であり、$P(k_G)$ と $P(s_G)$ はそれぞれ k_G と s_G の射影被覆である。群 G の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G) \cong C_{p^n} \rtimes (C_{p^{n-1}} \times C_{p-1})$ の非自明な p 部分群 Q をとり、$\widetilde{G} := G \rtimes Q$ とおく。群環 $k\widetilde{G}$ も多元環として直既約で、$k\widetilde{G}$ はブロック kG を被覆するブロックとなる。$k\widetilde{G}$ は wild 表現型のブロックであるが、主結果の仮定をすべて満たしているので、誘導関手 $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}$ により同型 $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, kG \cong \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\widetilde{G}$ が与えられ、$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\widetilde{G})$ は次のようになる。

$$\mathcal{H}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\widetilde{G}):\quad
\begin{tikzcd}
 & k\widetilde{G} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P(k_{\widetilde{G}}) \oplus \mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}} k_G \arrow[d] & & P(s_{\widetilde{G}}) \oplus \mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}} s_G \arrow[d] \\
\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}} k_G \arrow[dr] & & \mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}} s_G \arrow[dl] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

参考文献

[AAC18] T. Adachi, T. Aihara, and A. Chan, *Classification of two-term tilting complexes over Brauer graph algebras*, Math. Z. **290** (2018), no. 1-2, 1–36.

[Ada16] T. Adachi, *The classification of τ-tilting modules over Nakayama algebras*, J. Algebra **452** (2016), 227–262.

[AI12] T. Aihara and O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. (2) **85** (2012), no. 3, 633–668.

[AIR14] T. Adachi, O. Iyama, and I. Reiten, *τ-tilting theory*, Compos. Math. **150** (2014), no. 3, 415–452.

[Alp86] J. L. Alperin, *Local representation theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[AM17] T. Aihara and Y. Mizuno, *Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type*, Algebra Number Theory **11** (2017), no. 6, 1287–1315.

[AMN20] H. Asashiba, Y. Mizuno, and K. Nakashima, *Simplicial complexes and tilting theory for brauer tree algebras*, Journal of Algebra **551** (2020), 119 – 153.

[Aok18] T. Aoki, *Classifying torsion classes for algebras with radical square zero via sign decomposition*, arXiv preprint arXiv:1803.03795v2 (2018).

[EJR18] F. Eisele, G. Janssens, and T. Raedschelders, *A reduction theorem for τ-rigid modules*, Math. Z. **290** (2018), no. 3-4, 1377–1413.

[Oku97] T. Okuyama, *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups*, preprint (1997).

[Ric89] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456.