リース 2-群をデフェクト群にもつブロック・イデアルのコホモロジー環について

佐々木 洋城
信州大学 教育学部
Sasaki, Hiroki
Shinshu University, Faculty of Education

1 はじめに

k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする．G を有限群とし，その位数は k の標数 p で割りきれるものとする．

目的は群環 kG のブロック・イデアルのコホモロジー環をそのブロック・イデアルのソース多元環を通して記述したいということである．

ブロック・イデアルのコホモロジー環がそのブロック・イデアルのソース多元環から定められるデフェクト群のコホモロジー環の写像の像として表すことができると予想している．

本講演では $p = 2$ とし，デフェクト群がリース 2-群

$$\langle a, b, t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = t^2 = 1,\ ab = ba,\ tat = b \rangle,\ n \geqslant 2$$

であるブロック・イデアルについて報告する．

2 群のコホモロジー環

ブロック・イデアルのコホモロジー環の特殊性を説明するために，まず，通常のコホモロジー環について述べたい．

一般に G を有限群，k を体とする．以下で考える kG-加群はすべて kG 上有限生成であるとする．kG-加群 U, V に対して $\mathrm{Ext}^*_{kG}(U, V)$ が定義される．

定義 2.1 kG-加群 U に対して，射影的 kG-加群の完全系列

$$\mathbf{P} :\ \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0$$

が $P_0/\operatorname{im}\varphi_1 \simeq U$ をみたすとき $\mathbf{P} \xrightarrow{\varphi_0} U \longrightarrow 0$ を U の射影分解という．

定義 2.2 kG-加群 V に対して kG-加群 U の射影分解

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} U \longrightarrow 0$$

本研究は科学研究費助成事業 (課題番号 15K04777 および 19K03442) の助成を受けたものである．．

に $\mathrm{Hom}_{kG}(-, V)$ を施して双対鎖複体

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{kG}(U, V) \xrightarrow{\varphi_0^*} \mathrm{Hom}_{kG}(P_0, V) \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathrm{Hom}_{kG}(P_1, V) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow (P_{n-1}, V)_G \xrightarrow{\varphi_n^*} \mathrm{Hom}_{kG}(P_n, V) \xrightarrow{\varphi_{n+1}^*} \mathrm{Hom}_{kG}(P_{n+1}, V) \longrightarrow \cdots$$

が得られる. このコホモロジー群をエクスト群という:

$$\mathrm{Ext}_{kG}^n(U, V) = \ker \varphi_{n+1}^* / \operatorname{im} \varphi_n^*$$

$n = 0$ に対しては $\mathrm{Ext}_{kG}^0(U, V) = \mathrm{Hom}_{kG}(U, V)$ である. U が射影的ならば，$n \geqslant 1$ に対して $\mathrm{Ext}_{kG}^n(U, V) = 0$ である．従って，体 k の標数が 0 であるかまたは G の位数の素因数でなければ，どの kG-加群 U, V についても，$\mathrm{Ext}_{kG}^n(U, V) = 0$（$n \geqq 1$）．そこで，以下では体 k の標数は G の位数の素因数であると仮定し，p とおく.

$$\mathrm{Ext}_{kG}^*(U, V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ext}_{kG}^n(U, V)$$

とおく．特に，$\mathrm{Ext}_{kG}^n(k, V) = H^n(G, V)$, $\mathrm{Ext}_{kG}^*(k, V) = H^*(G, V)$ を V を係数加群とするコホモロジー群とよぶ.

詳しい定義は省略するが，エクスト群にはカップ積とよばれる積が定義される（Yoneda 積ともよばれる）．kG-加群 U, V, A, B に対して

$$\begin{aligned} \cup : \mathrm{Ext}_{kG}^r(U, A) \otimes \mathrm{Ext}_{kG}^s(V, B) &\longrightarrow \mathrm{Ext}_{kG}^{r+s}(U \otimes V, A \otimes B) \\ \alpha \otimes \beta \qquad\qquad &\longmapsto \quad \alpha \cup \beta \end{aligned}$$

$U \otimes V \simeq V \otimes U$, $A \otimes B \simeq B \otimes A$ であるが

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{rs} \beta \cup \alpha.$$

この積により，特に，$H^*(G, k) = \mathrm{Ext}_{kG}^*(k, k)$ は 次数可換線型環である．これをコホモロジー環とよぶ．コホモロジー環 $H^*(G, k)$ は Ext 群に作用する.

$$\cup : \mathrm{Ext}_{kG}^r(k, k) \otimes \mathrm{Ext}_{kG}^s(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{kG}^{r+s}(A, B)$$
$$\cup : \mathrm{Ext}_{kG}^s(A, B) \otimes \mathrm{Ext}_{kG}^r(k, k) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{kG}^{r+s}(A, B)$$

エクスト群 $\mathrm{Ext}_{kG}^*(A, B)$ はコホモロジー環 $H^*(G, k)$ 上の次数付き加群である．$\rho \in \mathrm{Ext}_{kG}^r(k, k), \alpha \in \mathrm{Ext}_{kG}^s(A, B)$ に対して $\rho \cup \alpha = \rho\alpha$, $\alpha \cup \rho = \alpha\rho$ とかく.

部分群 $H \leqslant G$，元 $g \in G$ に対して次の写像が定義される：

$$\mathrm{res}_H : H^*(G, U) \to H^*(H, U),\ \mathrm{tr}^G : H^*(H, U) \to H^*(G, U),$$
$$\mathrm{con}^g : H^*(H, U) \to H^*({}^g H, U).$$

これらの写像は次の性質をもつ：

- 部分群 $H \leqslant G$ に対して合成 $\mathrm{tr}^G \circ \mathrm{res}_H : H^*(G, U) \to H^*(G, U)$ は $|\, G \!:\! H \,|$ 倍である.

- 部分群 $H, K \leqslant G$ について次のいわゆる Mackey 分解公式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(G,U) \arrow[dr, "\mathrm{res}_K"] & \\
H^*(H,U) \arrow[ur, "\mathrm{tr}^G"] \arrow[dr, "\bigoplus_{HgK\in H\backslash G/K}\mathrm{res}_{{}^gH\cap K}\circ\mathrm{con}^g"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"] & & H^*(K,U) \\
 & \bigoplus_{HgK\in H\backslash G/K} H^*({}^gH\cap K,U) \arrow[ur, "\sum_{HgK\in H\backslash G/K}\mathrm{tr}^K"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\rho \in H^r(G,k)$, $\beta \in \mathrm{Ext}^n_{kH}(U,V)$ に対して Frobenius の相互律が成り立つ.

$$\rho(\mathrm{tr}^G \beta) = \mathrm{tr}^G((\mathrm{res}_H \rho)\beta), (\mathrm{tr}^G \beta)\rho = \mathrm{tr}^G(\beta \, \mathrm{res}_H \rho)$$

他に重要な写像としてノルム写像，膨張写像などがある．次は基本定理である．

定理 2.1 (Evens [1] , Venkov [14]) コホモロジー環 $H^*(G,k)$ は Noether 的である．

$S \leqslant G$ を Sylow p-部分群とする．指数 $|\,G:S\,|$ は p で割りきれないから k で可逆である．可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,k) \arrow[rr, "|\,G:S\,|\cdot", "\simeq"'] \arrow[dr, tail, "\mathrm{res}_S"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\circlearrowright"] & & H^*(G,k) \\
 & H^*(S,k) \arrow[ur, two heads, "\mathrm{tr}^G"'] &
\end{tikzcd}$$

が得られるから，直和分解 $H^*(S,k) = \mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}^G$ が得られる．さらに

定理 2.2 (安定元定理) $\zeta \in H^*(S,k)$ について

$$\zeta \in \mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S \Longleftrightarrow \mathrm{res}_{S\cap {}^gS}\,\zeta = \mathrm{res}_{S\cap {}^gS}\,\mathrm{con}^g\,\zeta \;\; \forall g \in G$$

が成り立つ．上の条件の右辺が成り立つ元のことを G-安定元とよぶ．さらに，これを言い換えて

(1) $\zeta \in H^*(S,k)$ が G-安定 $\Longleftrightarrow \mathrm{res}_Q\,\zeta = \mathrm{res}_Q\,\mathrm{con}^g\,\zeta \;\; \forall Q \leqslant S, \forall\, g \in N_G(Q)$

つまり，コホモロジー環 $H^*(G,k)$ は S の部分群の fusion（融合）を反映するものである．

S の部分群を対象とし，$Q, R \leqslant S$ に対して射 $\varphi : Q \to R$ は $g \in G$ で ${}^gQ = R$ となる $g \in G$ が引き起こす共役写像として，Frobenius 圏 $\mathscr{F}_S(G)$ を考え，上の右辺の条件をみたす元のことを $\mathscr{F}_S(G)$-安定元とよぶ．$\mathscr{F}_S(G)$ は fusion system とよばれることが多い．

また，Mackey 分解から得られる次は重要である．すなわち

(2) $$H^*(G,k) \simeq \mathrm{res}_S\,H^*(G,k) = \sum_{SgS\in S\backslash G/S} \mathrm{tr}^S\,\mathrm{res}_{S\cap {}^gS}\,\mathrm{con}^g\,H^*(S,k)$$

$\mathrm{Stab}_{\mathscr{F}_S(G)} H^(S,k) = \{ \zeta \in H^*(S,k) \mid \zeta$ は $\mathscr{F}_S(G)$-安定$\}$ $(= \{ \zeta \in H^*(S,k) \mid \zeta$ は G-安定$\})$ とおく．これは $\mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S \simeq H^*(G,k)$ に一致する．さらに，写像

$$t_{kG}(= \mathrm{res}_S \circ \mathrm{tr}^G) : H^*(S,k) \to H^*(S,k); \zeta \longmapsto \sum_{SgS \in S\backslash G/S} \mathrm{tr}^S \mathrm{res}_{S\cap {}^gS} \mathrm{con}^g \zeta$$

を考えると，上の等式 (2) は

$$\mathrm{Stab}_{\mathscr{F}_S(G)} H^*(S,k) = \mathrm{Im}\, t_{kG} \tag{3}$$

と言い換えられる．

3 ブロック・イデアルとそのコホモロジー環

群環 kG は直既約な両側イデアルの直和に分解される．

$$kG = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$$

それぞれの直和因子のことを kG のブロック・イデアルとよぶ．

直既約 kG-加群 U はただ一つのブロック・イデアル B_j について $B_jU = U$ となる．このとき，U はブロック・イデアル B_j に属するという．自明な kG 加群 k の属するブロック・イデアルを主ブロックとよぶ．以下では B_0 を主ブロックとする．

直既約 kG-加群 U がブロック・イデアル B_j に属するならば，U の射影分解 $\mathbf{P} \to U \to 0$ に現れる直既約射影加群はどれもブロック・イデアル B_j に属する．従って，直既約 kG-加群 V がブロック・イデアル B_j に属さなければ $\mathrm{Ext}^*_{kG}(U,V) = 0$ となる．つまり，コホモロジー環 $H^*(G,k) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$ は実は主ブロックの不変量である．

群環 kG は次の作用により $k[G\times G]$-加群である．$\alpha \in kG$, $x, y \in G$ について

$$(x,y)\alpha = x\alpha y^{-1}.$$

S を G の Sylow p-部分群とすると，$kG = k[G\times G] \otimes_{k\Delta(S)} k$ である．ここで，$\Delta S = \{ (u,u) \mid u \in S \}$．ブロック・イデアル B は $k[G\times G]$-加群 kG の直既約直和因子である．そのヴァーテックスはある p-部分群 P により，$\Delta P = \{ (u,u) \mid u \in P \}$ と表される．この p-部分群 P は B のデフェクト群とよばれる．デフェクト群は G の元で共役である．主ブロック B_0 のデフェクト群は G の Sylow p-部分群である．

さて，コホモロジー環 $H^*(G,k)$ は主ブロックの不変量であった．それでは，一般のブロック・イデアルのコホモロジーとはいかなるものであるべきか？ ブロック・イデアルにおいて有限群の p-部分群と同様の役割を果たすものは部分対（subpair）とよばれるものである．p-部分群 R と $kC_G(R)$ のブロック・イデアル b との組 (R,b) を部分対とよぶ．部分対には包含関係が定義される．かなり複雑な定義なのでここでは省略する．

部分対 (R,b) は $kC_G(R)$ のブロック・イデアル b の G への Brauer 対応 b^G が kG のブロック・イデアル B に一致するとき B-部分対とよばれる．$P \leqslant G$ がブロック・イデアル B のデ

フェクト群のとき，B-部分対 (P, b) は Sylow B-部分対とよばれる．Sylow p-部分群と同様の役割を果たす.

以下では，Sylow B-部分対を一つとって固定し，(P, b_P) と表す．部分群 $R \leqslant P$ に対して部分対 (R, c) で $(R, c) \subseteq (P, b_P)$ となるものがただ一つ存在する．この部分対を (R, b_R) と記す．さて，構造論における p-部分群に相当するのは部分対である．そこで，fusion system $\mathscr{F}_{(P,b_P)}(B)$ を次のように定義する．すなわち，対象は P の部分群であり，$Q, R \leqslant P$ に対して射 $\varphi : Q \to R$ は ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ となる $g \in G$ による共役写像である.

ブロック・イデアル B のコホモロジー環とは $H^*(P, k)$ の部分環として次のように定義される.

定義 3.1 (Linckelmann [5])

$$
\begin{aligned}
&H^*(G, B; (P, b_P)) \\
&= \{ \zeta \in H^*(P, k) \mid \operatorname{res}_Q \zeta = \operatorname{res}_Q \operatorname{con}^g \zeta \ \ \forall Q \leqslant P, \forall g \in N_G(Q, b_Q), \ (Q, b_Q) \subseteq (P, b_P) \}
\end{aligned}
$$

すなわち，$H^*(P, k)$ の $\mathscr{F}_{(P,b_P)}(B)$-安定部分環である.

もちろん，主ブロック B_0 の Linckelman の意味のコホモロジー環は Sylow p-部分群 S の $\mathscr{F}_S(G)$-安定部分環であり，G のコホモロジー環 $H^*(G, k)$ と同型である．しかしながら，残念ながら，一般のブロック・イデアルについてはそのコホモロジー環は双対複体のコホモロジーとしてはとらえられない．従って，おいそれとホモロジー代数を展開することはできないのである．これは，通常のコホモロジー環に対して定義されるような写像がブロック・イデアルのコホモロジー環の間には存在するとは限らないし，たとえ存在するとしても，その定義は全く別の考え方に基づくものとなる．部分群 H のブロック・イデアル C をとるとき，C のデフェクト群と B のデフェクト群にはそもそも関係がない．そこで，デフェクト群は共通に P としてとることにしても，Sylow B-部分対 (P, b_P) と Sylow C-部分対 (P, c_P) とをうまく関係づけてとって，さらに fusion system $\mathscr{F}_{(P,b_P)}(B)$ と $\mathscr{F}_{(P,c_P)}(C)$ との間に適切に関係をつけなければならない．これはなかなかに大変である．そこで，Kawai–Sasaki[2] では，$p = 2$ として，デフェクト群が

(1) 二面体群，準二面体群,（一般）四元数群（これらの場合，ブロック・イデアルはテイム表現型とよばれるものである）
(2) リース 2-群（この場合，ブロック・イデアルはワイルド表現型とよばれるものである）

の場合にブロックのコホモロジー環を計算してみた．そこでは，写像 $\operatorname{Tr}_P^B : H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ でその像 $\operatorname{Im} \operatorname{Tr}_P^B$ がブロック・イデアルのコホモロジー環となるものを構成することができた．この写像の意味はなにか？

この写像は，等式 (3) に相当する事実の反映なのではないのか？

ブロック・イデアル B のソース多元環とよばれる直和因子が引き起こす $H^*(P, k)$ 上の写像により，等式 (3) に相当する事実が導かれると予想している.

Kawai-Sasaki[2] の写像 $\mathrm{Tr}_P^B : H^*(P,k) \to H^*(P,k)$ ははたしてソース多元環が引き起こす写像なんだろうか？

答えはイエスであるということがようやくわかったのである．

4 ブロック・イデアルのソース多元環とコホモロジー環

以下，B を kG のブロック・イデアルとし，P をそのデフェクト群とし，(P, b_P) を Sylow B-部分対とする．

B を直既約 $k[G \times G]$-加群とみるとき $\Delta(P) = \{ (u,u) \mid u \in P \}$ は B のヴァーテックスである．そこで，B の $k[G \times P]$-加群としての直既約直和因子で $\Delta(P)$ をヴァーテックスとしてもつものがある．それを B のソース加群とよぶ．ソース加群は $B^P = \{ \alpha \in B \mid {}^u\alpha = \alpha \, \forall u \in P \}$ に属する原始的べき等元 i を用いて kGi と表される．このべき等元はソースべき等元とよばれている．$\mathrm{End}_{k[G\times P]}(kGi) \simeq ikGi$ を B のソース多元環とよぶ．ソース多元環 $ikGi$ はブロック・イデアル B と森田同値であり，多くの性質を共有するとても大事な不変量である．

$\Delta(P)$ が kGi のヴァーテックスであることは $\mathrm{Br}_P(i) \neq 0$ ということである．ここで

$$\mathrm{Br}_P : (kG)^P \ (= \{ \alpha \in kG \mid {}^u\alpha = \alpha \, \forall u \in P \} \to kC_G(P); \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g \in C_G(P)} \alpha_g g$$

は Brauer 準同型とよばれ，環の全射準同型である．$\mathrm{Br}_P(i) \in kC_G(P)$ は原始的べき等元であるから，$kC_G(P)$ のあるブロック・イデアルに属する．

定められた Sylow B-部分対 (P, b_P) に対して，$\mathrm{Br}_P(i) \in kC_G(P)$ が b_P に属するソースべき等元 $i \in B^P$ が存在する．このとき，i は (P, b_P) に属するという．

B のソース多元環 $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群である．次はブロック・イデアルのコホモロジー環の基本定理である．

定理 4.1 (Linckelmann [5], Sasaki [10]) ブロック・イデアルのソースべき等元 i が (P, b_P) に属するとき，$\zeta \in H^*(P,k)$ について

$$\zeta \in H^*(G, B; (P, b_P)) \iff \delta_P(\zeta) \in HH^*(kP) \text{ は } k[P \times P] \text{ 加群 } ikGi \text{ について安定}.$$

ここで，$HH^*(kP)$ は kP の Hochshild コホモロジー環であり，$\delta_P : H^*(P,k) \to HH^*(kP)$ は対角埋め込み写像（diagonal embedding）である．

この意味で $H^*(G, B; (P, b_P))$ は $H^*(G, B; kGi)$ とも書かれる．以下では，単に，$H^*(G, B)$ と書くことにする．

B のソース多元環の $k[P \times P]$ 加群としての構造を調べたい．次は Puig によるもので，出発点である．

定理 4.2 (例えば [13, Theorem 44.3]) $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群として次のように直和分解される．

$$ikGi \simeq \bigoplus_{v \in [N_G(P,b_P)/PC_G(P)]} k[Pv] \bigoplus Z.$$

ここで，$[N_G(P, b_P)/PC_G(P)]$ は商集合 $N_G(P, b_P)/PC_G(P)$ の（ひとつの）完全代表系を表し，$v \in [N_G(P, b_P)/PC_G(P)]$ について $k[Pv]$ の $ikGi$ における重複度は 1 である．また，Z の直既約直和因子はある $x \in G \setminus N_G(P)$ で生成される $k[P \times P]$ 加群 $k[PxP]$ に同型である．

一般に $k[P \times P]$-両側加群 $k[PxP]$ はコホモロジー環の写像

$$t_{PxP} : H^*(P, k) \to H^*(P, k); \zeta \mapsto \mathrm{tr}^P \, \mathrm{res}_{P \cap {}^xP} \, \mathrm{con}^x \, \zeta$$

を引き起こす.

ソース多元環 $ikGi$ は写像 $t_{ikGi} : H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ を導く．いま，$ikGi$ を $k[P \times P]$ 加群としての直既約加群の直和として，ある $\mathscr{X} \subset G \setminus N_G(P)$ を用いて

(直和分解*1)
$$ikGi \simeq \bigoplus_{v \in [N_G(P,b_P)/PC_G(P)]} k[Pv] \bigoplus \left(\bigoplus_{x \in \mathscr{X}} k[PxP] \right)$$

と表すと，写像 $t_{ikGi} : H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ は $\zeta \in H^*(P, k)$ を次のように写像する．

$$t_{ikGi} : \zeta \mapsto \sum_{v \in [N_G(P,b_P)/PC_G(P)]} \mathrm{con}^v \, \zeta + \sum_{x \in \mathscr{X}} \mathrm{tr}^P \, \mathrm{res}_{P \cap {}^xP} \, \mathrm{con}^x \, \zeta.$$

定理 4.1 は $\mathrm{Im}\ t_{ikGi} \subseteq H^*(G, B)$ であることを意味する．そこで，この写像の像がブロック・イデアルのコホモロジー環であると予想している．

予想

$$\mathrm{Im}\ t_{ikGi} = H^*(G, B).$$

例 4.1 $N_G(P, b_P)$ が部分対の融合を統制する場合は予想が成り立つ．例えば，次の場合が該当する．

(1) P が G の正規部分群である．
(2) P が可換である．
(3) P が位数 p^3，指数（exponent）p^2 の格別な p-群（extraspecial p-群）．
(4) P がランク 3 以上の格別な p-群（Stancu [12]）．
(5) b の超焦点部分群が巡回群である（Watanabe [15, Theorem 3]）．

$N_G(P, b_P)$ によって部分対の融合が統制されない場合ではなかなか大変である．

次は $ikGi$ の $k[P \times P]$ 加群としての直既約直和因子が部分対の融合を引き起こすことを示し，重要である．

命題 4.3 (例えば，Külshammer, Okuyama and Watanabe [3]) $k[PgP]$ が $ikGi$ の直和因子に同型であるとする．$Q = P^g \cap P$, $R = P \cap {}^gP$ とおく．$(Q, b_Q), (R, b_R) \subset (P, b_P)$ について

$${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R).$$

従って，部分対の融合を調べることにより $ikGi$ の $k[P \times P]$ 加群としての直既約直和因子の可能性を調べられる．

部分対の融合調べるためには本質的部分対（essential subpair）とよばれるものが有用であるが，定義は省略し，重要な定理を述べる．

定理 4.4 (Linckelmann [6]) $\mathscr{F} = \{ (T, b_T) \subseteq (P, b_P) \mid (T, b_T)$ は本質的$\} \cup \{ (P, b_P) \}$ は共役族である．

すなわち，B-部分対 (Q, b_Q), (R, b_R) について ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ ならば，適当な (F_1, b_{F_1}), $(F_2, b_{F_2}), \dots, (F_m, b_{F_m}) \in \mathscr{F}$（$R_j \leqslant F_j \cap F_{j+1}$）と適当な $g_j \in N_G(F_j, b_{F_j})$ により $\mathrm{con}^g : (Q, b_Q) \to (R, b_R)$ が $\mathrm{con}^g = \mathrm{con}^{g_m \cdots g_2 g_1}$ と表される：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & (F_1, b_{F_1}) & & (F_2, b_{F_2}) & & \cdots\cdots\cdots & & (F_{m-1}, b_{F_{m-1}}) & & (F_m, b_{F_m}) & \\
 & \diagup \quad \diagdown & & \diagup \quad \diagdown & \diagup & & \diagdown & \diagup \quad \diagdown & & \diagup \quad \diagdown & \\
(Q, b_Q) & \xrightarrow[g_1]{} & (R_1, b_{R_1}) & \xrightarrow[g_2]{} & (R_2, b_{R_2}) & \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \longrightarrow & (R_{m-2}, b_{R_{m-2}}) & \xrightarrow[g_{m-1}]{} & (R_{m-1}, b_{R_{m-1}}) & \xrightarrow[g_m]{} & (R, b_R)
\end{array}.
$$

次の定理は $ikGi$ のある種の直既約直和因子の存在と重複度についてのもので重要である．

定理 4.5 (Okuyama and Sasaki [8]) $(T, b_T) \subset (P, b_P)$ を本質的部分対とする．$M \leqslant N_G(T, b_T)$ を $N_P(T)C_G(T)$ を含み，$M/TC_G(T) < N_G(T, b_T)/TC_G(T)$ が 真の p 強閉部分群であるようにとる．このとき，任意の $x \in N_G(T, b_T) \setminus M$ に対して $k[PxP]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であり，その重複度は p を法として 1 に合同である．

注意 4.1 $k[PxP]$ の重複度は $x \in N_G(T, b_T) \setminus M$ のとり方によらず一定である．

これらの事実を用いて $p = 2$ でデフェクト群が二面体群，準二面体群,（一般）四元数群であるとき

- Kawai-Sasaki[2] で構成した写像はソース多元環が導く写像に一致し，従って
- $\mathrm{Im}\, t_{ikGi} = H^*(G, B)$ である．

また，$p > 2$ でデフェクト群が位数 p^3，指数 p の格別な p-群についても同様であることがわかった．

最近，さらに，詳しい説明はやはり省略するが，次が得られた．

定理 4.6 ソースべき等元 $i \in B^P$ が Sylow B-部分対 (P, b_P) に属するとする．$x \in G$ は条件「どの $c \in C_G(P \cap {}^xP)$ についても $P \cap {}^xP = P \cap {}^{cx}P$ が成り立つ」をみたすと仮定する．$Q = P^x \cap P$, $R = P \cap {}^xP$ とおく．B-部分対 (Q, b_Q), $(R, b_R) \subset (P, b_P)$ をとる．${}^x(Q, b_Q) = (R, b_R)$ が成り立っていると仮定する．このとき，さらに，以下の 3 つの条件のどれかが成り立てば $k[P \times P]$ 加群として $k[PxP]$ は B のソース多元環 $ikGi$ の直和因子に同型である．

(1) $QC_P(Q)$ は b_Q の defect 群である．

(2) $RC_P(R)$ は b_R の defect 群である．
(3) b_Q はべき零ブロックである．（このとき，b_R もべき零ブロックである）

さらに，条件「(3) と (1)」または「(3) と (2)」が成り立つとき，$k[PxP]$ の $ikGi$ の直和因子としての重複度は p を法として 1 に合同である．

5 デフェクト群がリース 2-群であるブロック・イデアル

$p=2$ とし，ブロック・イデアル B のデフェクト 群はリース 2-群

$$P = \langle a, b, t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = t^2 = 1,\ ab = ba,\ tat = b \rangle,\ n \geqslant 2$$

であるとする．

$c = ab, d = ab^{-1}$ とおく．

$$x = a^{2^{n-1}},\ y = b^{2^{n-1}},\ z = c^{2^{n-1}} = xy,$$
$$e = xt,\ f = d^{2^{n-2}} (= (ab^{-1})^{2^{n-2}})$$
$$U = \langle a, b \rangle,\ Q = \langle e, f \rangle (\simeq Q_8),\ V = \langle e, f, c \rangle (= \langle x, t, c \rangle = QZ(P)),$$

Kawai–Sasaki [2] で構成した $\mathrm{Tr}_P^B : H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ が source 多元環 $ikGi$ の導く写像と一致することが確かめられた．(定理 5.4，系 5.5)

P の自己同型群は 2-群であるから，$ikGi$ の直和分解 (直和分解*1) は

(直和分解*2)
$$ikGi \simeq kP \oplus \left(\bigoplus_{x \in \mathscr{X}} k[PxP] \right)$$

の形である．

$\mathrm{Aut}\, U \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$，$\mathrm{Out}\, V \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ である．

(P, b_P) を Sylow B-部分対とする．(U, b_U), $(V, b_V) \subset (P, b_P)$ をとる．

- $N_G(U, b_U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ のとき (U, b_U) は本質的である．$PC_G(U)/C_G(U) < N_G(U, b_U)/C_G(U)$ は強閉である．
- $N_G(V, b_V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ のとき (V, b_V) は本質的である．$N_P(V)C_G(V)/VC_G(V) < N_G(V, b_V)/VC_G(V)$ は強閉である．

そこで，以下では $N_G(U, b_U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$，$N_G(V, b_V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ であると仮定する．このとき，(P, b_P) に含まれる本質的部分対の集合は

$$\{ (U, b_U) \} \cup \{ {}^u(V, b_V) \mid u \in P \}$$

で与えられる．従って，定理 4.4 の共役族は $\mathscr{F} = \{ (U, b_U) \} \cup \{ {}^u(V, b_V) \mid u \in P \} \cup \{ (P, b_P) \}$ である．

$g_U \in N_G(U, b_U) \setminus PC_G(U)$ を U の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし，次のように作用するものとする．

$$^{g_U}a = b, \quad ^{g_U}b = a^{-1}b^{-1}.$$

$g_V \in N_G(V, b_V) \setminus N_P(V)C_G(V)$ を V の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし，次のように作用するものとする．

$$^{g_V}e = ef^{-1}, \quad ^{g_V}f = e, \quad ^{g_V}c = c.$$

$g_V \in N_G(V, b_V)$ の x, t への作用は次の通りである．

$$^{g_V}x_1 = c^{2^{n-2}}x_1 t = c^{2^{n-2}}e, \quad ^{g_V}(c^{2^{n-2}}e) = t, \quad ^{g_V}t = x_1.$$

Kawai–Sasaki [2] で定義した写像 Tr_P^B は以下のように記述される．すなわち

$$\begin{aligned}\Gamma_U : H^(P, k) \to H^(P, k); \zeta \longmapsto \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} \zeta,\\ \Gamma_V : H^(P, k) \to H^(P, k); \zeta \longmapsto \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V {}^{g_V}\zeta\end{aligned}$$

と定義すると

- $$\Gamma_U \circ \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V \circ \Gamma_U = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V$$
  が成り立ち，この写像を Tr_P^B と書く．
- $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_P^B = H^*(G, B, X)$ が成り立つ．

写像 Tr_P^B は $\zeta \in H^*(P, k)$ を次のように写像する．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_P^B : \zeta \mapsto \zeta &+ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} \zeta\\ &+ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_V g_U} \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U \cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_U g_V} \zeta\\ &+ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_V g_U}V} \mathrm{con}^{g_V g_U g_V} \zeta.\end{aligned}$$

以下ではこの写像の意味を報告する．

5.1 $\mathbf{tr}^P\, \mathbf{res}_U\, \mathbf{con}^{g_U}$, $\mathbf{tr}^P\, \mathbf{res}_V\, \mathbf{con}^{g_V}$

定理 4.5 が適用できて

命題 5.1 (1) $P \cap {}^{g_U}P = U$, $P \cap {}^{g_V}P = V$.
(2) $k[Pg_U P]$, $k[Pg_V P] \bigm| ikGi$．さらに，それぞれの重複度 m_U, m_V は奇数である．
(3) $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_U P}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_V P}$.

注意 5.1 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_U P}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_V P}$ は 0 写像ではない．

5.2 $\mathbf{tr}^P\,\mathbf{res}_{V\cap {}^{g_V}U}\,\mathbf{con}^{g_Vg_U}$, $\mathbf{tr}^P\,\mathbf{res}_{U\cap {}^{g_U}V}\,\mathbf{con}^{g_Ug_V}$

定理 4.6 の (1)，(2) に該当し，次が得られる．

命題 5.2 (1) $k[Pg_Vg_UP],\ k[Pg_Ug_VP]\ \big|\ ikGi$．さらに，それぞれの重複度 $m_{VU},\ m_{UV}$ は奇数である．

(2) $\mathrm{tr}^P\,\mathrm{res}_{V\cap {}^{g_V}U}\,\mathrm{con}^{g_Vg_U} = t_{P(g_Vg_U)P}$, $\mathrm{tr}^P\,\mathrm{res}_{U\cap {}^{g_U}V}\,\mathrm{con}^{g_Ug_V} = t_{P(g_Ug_V)P}$.

5.3 $\mathbf{tr}^P\,\mathbf{res}_{V\cap {}^{g_V}U\cap {}^{g_Vg_U}V}\,\mathbf{con}^{g_Vg_Ug_V}$

定理 4.6 の条件 (1) や (2) は満たされない．(3) に該当する．そこで，ここでは省略するがもうひとつの重複度に関する定理があって，それにより，

命題 5.3 $k[Pg_Vg_Ug_VP] = k[PwP]\ \big|\ ikGi$．さらに，その重複度 m_{VUV} は奇数である．

以上により，$k[P\times P]$ 加群

$$kP\oplus m_Uk[Pg_UP]\oplus m_Vk[Pg_VP]\oplus m_{UV}k[Pg_Ug_VP]\oplus m_{VU}k[Pg_Vg_UP]\oplus m_{VUV}k[Pg_Vg_Ug_VP]$$

は $ikGi$ の直和因子に同型であり，これが導く $H^*(P,k)$ の写像は Tr_P^B であることがわかった．

5.4 $ikGi$ の加群構造

残る課題は $ikGi$ の上の直和因子以外の直和因子の考察である．

$k[PgP]\ \big|\ ikGi$ とし，$R = P^g\cap P$, $S = P\cap {}^gP$ とおく．(R,b_R), $(S,b_S)\subseteq (P,b_P)$ をとる．このとき

$$^g(R,b_R) = (S,b_S)$$

である．共役 $^g(R,b_R) = (S,b_S)$ を本質的部分対の惰性群の元による共役の合成として次のように表すことができる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & (P,b_P) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (F_2,b_{F_2}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \cdots\cdots\cdots \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & & (F_{m-1},b_{F_{m-1}}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (P,b_P) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R,b_R) \arrow[rr, "g_1"'] & & (R_1,b_{R_1}) \arrow[rr, "g_2"'] & & (R_2,b_{R_2}) \arrow[rr] & & \cdots\cdots\cdots \arrow[rr] & & (R_{m-2},b_{R_{m-2}}) \arrow[rr, "g_{m-1}"'] & & (R_{m-1},b_{R_{m-1}}) \arrow[rr, "g_m"'] & & (S,b_S)\ .
\end{tikzcd}$$

ただし，$2\leqslant q\leqslant m-1$ については $(F_q,g_q) = (U,g_U)$ または (V,g_V)．また，g_1, $g_m\in PC_G(P)$ については，1 のこともある．

注意 5.2 本質的部分対としては (V,b_V) の P-共役も考えなければならないし，惰性群の元も g_U や g_V 以外の元もあるのだから，上のように表すことができるということは自明ではない．

写像 $t_{PgP} = \mathrm{tr}^P\,\mathrm{res}_S\,\mathrm{con}^g$ が 0 写像でないような $k[PgP]\ \big|\ ikGi$ は上で得られた

$$k[Pg_UP],\ k[Pg_VP],\ k[Pg_Ug_VP],\ k[Pg_Vg_UP],\ k[Pg_Vg_Ug_VP]$$

に同型であることを確かめたい．部分対の融合をひとつひとつ調べていく．

最初と最後の (P, b_P) と $g_1, g_m \in PC_G(P)$ は省略して考察してよい.

(1) $m = 3$ で

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_2, b_{R_2}) \end{tikzcd}$$

と表されるとき. $R \leqslant U$ である.

(a) $R_2 = U$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく $k[PgP] \simeq k[Pg_UP]$.

(b) $R_2 < U$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(2) $m = 4$ で

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_3, b_{R_3}) \end{tikzcd}$$

と表されるとき. $R_3 \leqslant V \cap {}^{g_V}U$ である.

(a) $R_3 = V \cap {}^{g_V}U$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく $k[PgP] \simeq k[Pg_Vg_UP]$.

(b) $R_3 < V \cap {}^{g_V}U$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(3) $m \geqslant 5$ で

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \arrow[dl, dash] & \\ (R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_3, b_{R_3}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_4, b_{R_4}) \arrow[rr] & & \cdots \end{tikzcd}$$

と表されるとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像である.

(4) $m = 3$ で

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2}) \end{tikzcd}$$

と表されるとき.

(a) $R_2 = V$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく, $k[PgP] \simeq k[Pg_VP]$.

(b) $R_2 < V$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(5) $m = 4$ で

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_3, b_{R_3}) \end{tikzcd}$$

と表されるとき. $R_3 \leqslant U \cap {}^{g_U}V$ である.

(a) $R_3 = U \cap {}^{g_U}V$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく, $k[PgP] \simeq k[Pg_Ug_VP]$.

(b) $R_3 < U \cap {}^{g_U}V$ のとき，$\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_R \,\mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(6) $m = 5$ で

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_3, b_{R_3}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_4, b_{R_4})
\end{tikzcd}
$$

と表されるとき．$R_4 \leqslant V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_V g_U}V$ である．

(a) $R_4 = V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_V g_U}V$ のとき，$\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_S \,\mathrm{con}^g$ は0写像でなく，$k[PgP] \simeq k[Pg_V g_U g_V P]$.

(b) $R_4 < V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_V g_U}V$ のとき，$\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_S \,\mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(7) $m \geqslant 6$ で

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \arrow[dl, dash] & \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_3, b_{R_3}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_4, b_{R_4}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_5, b_{R_5}) \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

と表されるとき，$\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_S \,\mathrm{con}^g$ は 0 写像である．

以上で場合が尽くされ

定理 5.4 $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群として次のように直和分解される．

$$
\begin{aligned}
ikGi \simeq kP \oplus m_U k[Pg_U P] \oplus m_V k[Pg_V P] \ \oplus m_{UV} k[Pg_U g_V P] \oplus m_{VU} k[Pg_V g_U P] \\
\oplus m_{VUV} k[Pg_V g_U g_V P] \oplus Z.
\end{aligned}
$$

ここで，重複度 m_U, m_V, m_{UV}, m_{VU}, m_{VUV} はいずれも奇数であり，Z のどの直既約直和因子についてもそれに同型な $k[PgP]$ については $\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_{P \cap {}^gP} \,\mathrm{con}^g$ は 0 写像である．

系 5.5 $\mathrm{Tr}_P^B = t_{ikGi}$.

参考文献

[1] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 224–239.

[2] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), no. 2, 301–321.

[3] B. Külshammer, T. Okuyama, and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras, J. Algebra **232** (2000), 299–309.

[4] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1998), 93–107.

[5] ———, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[6] M. Linckelmann, Introduction to fusion systems, Group representation theory, EPFL Press, Lausanne, 2007, pp. 79–113.

[7] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.

[8] T. Okuyama and H. Sasaki, A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups, J. Algebra **497** (2018), 92–101.

[9] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra **116** (1988), 7–129.
[10] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.
[11] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of fintie group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.
[12] R. Stancu, Control of fusion in fusion systems, J. Algebra Appl **5** (2006), 817–837.
[13] J. Thévenaz, G-algebras and modular representation theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1995.
[14] B. B. Venkov, Cohomology algebras for some classifying spaces (russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **127** (1959), 943–944.
[15] A. Watanabe, The number of irreducible Brauer characters in a p-block of a finite group with cyclic hyperfocal subgroup, J. Algebra **416** (2014), 167–183.
[16] 佐々木 洋城, ブロック・イデアルのソース多元環の加群構造, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 数理研講究録 2134, 2019, pp. 72–83.