# 順序極小構造上のデファイナブル $C^rG$ 自明性

川上智博
和歌山大学教育学部数学教室

## 1 序文

ここでは、実閉体 $R$ の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ において、デファイナブル $C^rG$ 自明性について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{M} = (\mathbb{R},+,\cdot,<,\dots)$ に限っても、[5] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関して、[1], [2] などに性質がまとめられている。また、[6] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、順序極小構造より一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ で考えるものとする。

## 2 準備

$R$ を実閉体とする。

構造 $\mathcal{N} = (R,(f_i),(L_j),(c_k))$ とは、以下のデータで定義されるものである。

1. 集合 $R$ を $\mathcal{N}$ の underlying set または universe という。

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 03C64.
*Key Words and Phrases.* 順序極小構造, 実閉体, デファイナブリーコンパクトデファイナブル $C^r$ 群, デファイナブル $C^rG$ 多様体.

2. 関数の集合 $\{f_i|i \in I\}$、ただし $f_i : R^{n_i} \to R, n_i \geq 1$。

3. 関係の集合 $\{L_j|j \in J\}$、ただし $L_j \subset R^{m_j}, m_j \geq 1$。

4. 特別な元の集合 $\{c_k|k \in K\} \subset R$。各 $c_k$ を定数という。

添字集合 $I, J, K$ は、空集合でもかまわない。

$f$ $(L)$ が $m$ 変数関数 ($m$ 変数関係) とは、$f : R^m \to R$ $(L \subset R^m)$ となることである。

項とは、以下の 3 つの規則にしたがって得られる有限列のことである。

1. 定数は項である。

2. 変数は項である。

3. $f$ が $m$ 変数関数かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$f(t_1, \ldots, t_m)$ は項である。

論理式とは、変数、関数、関係、論理記号、括弧、コンマ、$\exists, \forall$ からなる有限列で、以下の 3 つの規則にしたがって得られるものである。

1. 任意の二つの項 $t_1, t_2$ に対して、$t_1 = t_2$ と $t_1 < t_2$ は論理式である。

2. $L$ が $m$ 変数関係かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$L(t_1, \ldots, t_m)$ は論理式である。

3. $\phi$ と $\psi$ が論理式ならば、$\neg\phi$, $\phi \vee \psi$ と $\phi \wedge \psi$ は論理式である。$\phi$ が論理式かつ $v$ が変数ならば、$(\exists v)\phi$ と $(\forall v)\phi$ は論理式である。

$R^n$ の部分集合 $X$ が $\mathcal{N}$ においてデファイナブルとは、論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ と $b_1, \ldots, b_m \in R$ が存在して、$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^n | \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ が $\mathcal{N}$ で成り立つ $\}$ となることである。このとき、 $X$ をデファイナブル集合という。

$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \cdots)$ が順序極小構造 (o-minimal structure) とは、$R$ の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、$(a, b)_R = \{x \in R | a < x < b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。$\ldots$ の部分に言語があっても、$R$ のデファイナブル集合が増えないことを意味している。

実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ は、順序極小構造であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

$R$ の位相は、開区間を開基とする位相とする。$R^n$ の位相は、積位相とする。このとき、$R^n$ はハウスドルフ空間となる。

実数係数Puiseux級数$\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体$\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg} = \{x \in \mathbb{R} | x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

**定理 2.1.** *(1)* 実閉体の標数は0である。

*(2)* 可算以上の任意の濃度$\kappa$に対して、$2^\kappa$個の同型でない実閉体で濃度$\kappa$のものが存在する。

**定義 2.2.** $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル写像とは、$f$ のグラフ $(\subset R^n \times R^m)$ がデファイナブル集合となることである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル写像 $f : (a, b)_R \to X$ に対して、極限点 $\lim_{x \to a+0} f(x), \lim_{x \to b-0} f(x)$ が $X$ 内に存在することである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリー連結とは、$X$ の二つの空でないデファイナブル開集合 $Y, Z$ で、$X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクト集合であるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクト集合とは限らない。連結デファイナブル集合は、デファイナブリー連結集合であるが、デファイナブリー連結集合は、連結集合とは限らない。たとえば、$R = \mathbb{R}_{alg}$ ならば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | 0 \leq x \leq 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブリー連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

**定理 2.3** ([4])**.** $R^n$ のデファイナブル集合 $X$ に対して、$X$ がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

**命題 2.4.** $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合、$f : X \to Y$ をデファイナブル写像とする。$X$ がデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* である。

**例 2.5.** *(1)* $\mathcal{N} = (\mathbb{R}_{alg}, +, \cdot, <)$ とする。$f : \mathbb{R}_{alg} \to \mathbb{R}_{alg}, f(x) = 2^x$ は定義されない *([7])*。

*(2)* $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ とする。$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。また、正弦関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \sin x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。

# 3 結果

$G \subset R^n$ がデファイナブル群とは、$G$ が群であって、デファイナブル集合であり、群演算 $G \times G \to G, G \to G$ がデファイナブル写像となることである。$G \subset GL(n, R)$ とならないデファイナブル群が存在することが知られている。

$G$ をデファイナブル群とする。デファイナブル $G$ 集合とは、デファイナブル集合 $X$ と $G$ 作用 $\phi : G \times X \to X$ からなる組 $(X, \phi)$ であって、$\phi$ がデファイナブル写像となるものである。ここでは、$(X, \phi)$ と書く代わりに $X$ と書く。

$X \subset R^n, Z \subset R^m$ をデファイナブル集合とし、$f : X \to Z$ をデファイナブル写像とする。$f$ がデファイナブル同相写像とは、デファイナブル写像 $h : Z \to X$ が存在して、$f \circ h = id_Z$ かつ $h \circ f = id_X$ となることである。

$U \subset R^n, V \subset R^m$ をデファイナブル開集合とし、$1 \leqq r \leqq \infty$、$f : U \to V$ をデファイナブル写像とする。$f$ がデファイナブル $C^r$ 写像とは、$f$ が $C^r$ 写像であることである。デファイナブル $C^r$ 写像 $f : U \to V$ がデファイナブル $C^r$ 微分同相写像とは、デファイナブル $C^r$ 写像 $h : V \to U$ が存在して、$f \circ h = id_V$ かつ $h \circ f = id_U$ となることである。

$X, Z$ をデファイナブル $G$ 集合とする。デファイナブル写像 $f : X \to Z$ がデファイナブル $G$ 写像とは、$f$ が $G$ 写像となることである。デファイナブル $G$ 写像 $f : X \to Z$ がデファイナブル $G$ 同相写像とは、デファイナブル $G$ 写像 $h : Z \to X$ が存在して、$f \circ h = id_Z$ かつ $h \circ f = id_X$ となることである。

**定義 3.1.** ハウスドルフ空間 $X$ が $n$ 次元デファイナブル $C^r$ 多様体とは、$X$ の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^l$、$R^n$ の有限個の開集合 $\{V_i\}_{i=1}^l$ と有限個の同相写像 $\{\phi_i : U_i \to V_i\}_{i=1}^l$ が存在して、$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ となる $i, j$ に対して、$f(U_i \cap U_j)$ がデファイナブルかつ開で、$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ がデファイナブル $C^r$ 微分同相写像であることある。これらの集合と同相写像をデファイナブル $C^r$ 座標近傍系という。

デファイナブル $C^r$ 多様体 $G$ がデファイナブル $C^r$ 群とは、$G$ が群であって、群演算 $G \times G \to G, G \to G$ がデファイナブル $C^r$ 写像となることである。

$G$ をデファイナブル $C^r$ 群とする。デファイナブル $C^r$ 多様体 $X$ と $X$ 上の群作用の組 $(X, \phi)$ が、デファイナブル $C^r G$ 多様体とは、$\phi : G \times X \to X$

がデファイナブル $C^r$ 写像であることである。以下、$(X, \phi)$ と書く代わりに、$X$ と書く。

**定義 3.2.** デファイナブル写像 $f : X \to Y$ が、デファイナブリー固有とは、$Y$ の任意のデファイナブリーコンパクト集合 $C$ に対して、$f^{-1}(C)$ がデファイナブリーコンパクトであることである。

以下の結果を得た。

**定理 3.3** ([3]). *$G$ をデファイナブリーコンパクトデファイナブル $C^r$ 群, $1 \leqq r < \infty$ とする。$X$ をアフィンデファイナブル $C^rG$ 多様体とし、$f : X \to R$ を $G$ 不変デファイナブル固有全射デファイナブル $C^r$ 沈めこみとする。このとき、デファイナブル $C^rG$ 微分同相写像 $h = (h', f) : X \to (X \cap f^{-1}(0)) \times R$ が存在する。*

# References


[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[3] T. Kawakami, *Definable $C^rG$ triviality in real closed fields*, to appear.

[4] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.

[5] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.

[6] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.

[7] R. Wencel, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 109–116.