ジャンプ過程と部分的観測にもとづく費用対効果が大きい環境管理について
（On cost-effective environmental management based on jump processes and partial observations）

島根大学　吉岡秀和
Shimane University, Hidekazu Yoshioka
同志社大学　辻村元男
Doshisha University, Motoh Tsujimura
岩手大学　濱上邦彦
Iwate University, Kunihiko Hamagami
島根大学　吉岡有美
Shimane University, Yumi Yoshioka
独立研究者　八重樫優太
Independent Researcher, Yuta Yaegashi

1. はじめに

ダムや堰堤などの河川横断型の水利構造物は，利・治水の観点から現代の人間活動に必要不可欠な存在である．しかしながら，これらの水利構造物は，河川の流れに沿った物質輸送や生物移動を妨げる負の側面を持つ．とくに，ダムに焦点を絞れば，水は上流から下流に流れることが可能である一方，土砂 (掃流砂)はダムを通過することが不可能なためにダム貯水池内に堆積する．自然河川では，土砂が水とともに河道に沿い流下することで，河床環境の維持や河川生態系の形成に寄与している[1]．ダム下流の河川環境は，上流からの土砂輸送の人為的な停止に起因して，河床に作用する擾乱が少ない状態に陥る．とりわけ，通常は土砂輸送による擾乱が抑制していた緑藻類の繁茂が，ダム下流において異常な規模でみられる事例が報告されている[2].

上流からの土砂輸送の停止が改変したダム下流の河川環境を改善するために，河川の外部やダム上流から土砂を投入する「土砂還元」が試みられてきた．国内外の様々な河川で土砂還元事業が実施され，その評価に関する研究が行われている[3-5]．著者らが研究対象地とする一級河川斐伊川 (ひいかわ・島根県東部)の尾原ダム下流においても，国土交通省により，2020 年 4 月 21 日にこの河川で初めてとなる土砂還元事業が実施された (**写真** 1)．この事業では，約 100 (m^3)の土砂が数時間の間に投入された．

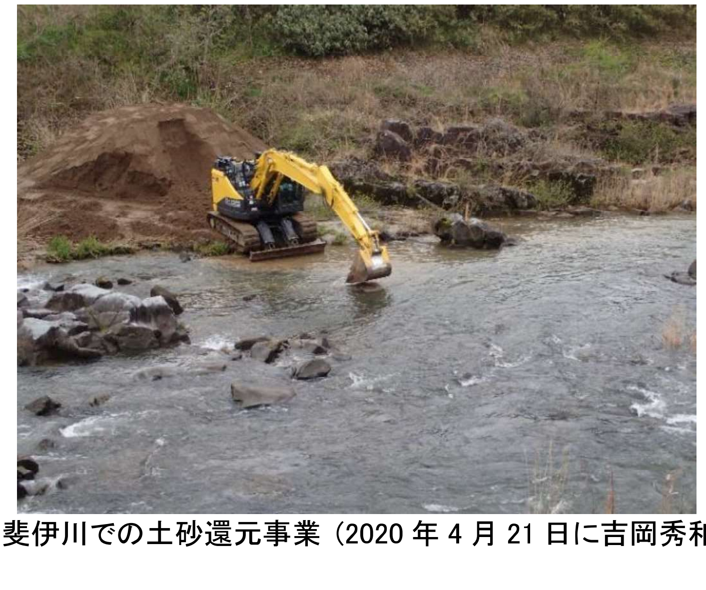

写真 1 斐伊川での土砂還元事業 (2020 年 4 月 21 日に吉岡秀和が撮影)

土砂還元事業を検討する際には，以下の 4 点①-④が重要であると考えられる．①土砂を投入するという行為自体に，人件費および土砂の輸送費や投入費を含む様々な費用を要する．②土砂の投入は，上述した斐伊川の事例にあるように，土砂輸送が生じる時間スケールと比較して短い時間スケールで行われることが多い．③ダム下流に投入した土砂は，時間が経過するとともに下流に流亡する．すなわち，土砂還元による効果は永続的なものではなく，継続的に投入の規模や量を検討していく必要がある．加えて，一般に河川流況は確率論的に変動する．④投入した土砂がどれだけ残留しているかを現地で適宜確認しながら，その後の事業のあり方を検討していく必要がある．例えば，事業関係者がタイミングを見計らい現地に赴き，状況を記録することが現実的である．実務上，常時的に確認を続けることは難しい．

先行研究では河川工学的な検討，すなわちダム下流河川の流況と土砂の投入量や流亡量に重点が置かれており，費用対効果の観点から土砂還元事業を一貫的に検討する研究は少ないようである．この状況を鑑みて，著者らはファイナンスの研究分野におけるダイナミックな最適化問題の数学ツールとして練磨されてきた確率制御理論[6]を中軸とした，土砂還元事業の数理モデル構築に従事してきている．上述した 4 つの注意点①-④により，土砂還元の最適化問題は連続時間確率過程に対する離散時間的 (部分情報的)な観測および制御の問題であるといえる．とりわけ，一時的ではなく長期的な問題を考える場合は，エルゴード制御問題としての定式化に合理性がある．

本稿では，研究集会「ファイナンスの数理とその応用」の口頭発表において講演した内容の一部を概観し，土砂還元事業の数理モデリングに関する今後の展望を述べる．

2. 数理モデル

2.1 ダイナミクス

本稿で紹介する数理モデルは Yoshioka et al. [7]に従う．時刻 t におけるダム下流河川区間に存在する土砂量を，非負かつ有界であり càdlàg な連続時間確率過程 X_t と書く．また，水の流れによる土砂の流下を正のジャンプのみを有する Levy 過程，すなわち subordinator $S=(S_t)_{t\geq 0}$ であらわす．S のジャンプ時刻を $\tau>0$，ジャンプ量 $z>0$ と書いたとき，以下の滑らかではないダイナミクスを仮定する：

$$X_\tau = X_{\tau-} - \min\{X_{\tau-}, z\}(\geq 0),\quad X_0 \geq 0. \tag{1}$$

すなわち，土砂の流亡はジャンプ的に生起すること，ならびにその流亡量は存在量より大きくなることはないことを仮定する．前者の仮定は，土砂の流亡というイベントが Levy 過程に従うという，現象の大胆な簡素化である．しかし，実際のダム下流の河川流況と土砂輸送の経験公式，そして S が Tempered stable 過程であるという設定のもとで，合理的な数理モデルが得られる[8]．後者の仮定はごく自然な物理学的要請である．ダイナミクス(1)によれば，ある程度一般的な過程のもと，確率 1 で，土砂の存在量 S_t は時刻 t が増加するとともに単調減少し有限時間のうちに 0 に到達する．

つぎに，事業主体 (以下，意思決定者と呼ぶ)による離散的な観測と制御を定式化する．土砂投入に要する時間は土砂流亡の時間スケールと比較して十分に短い，すなわちインパルス的であるという考察にもとづき，意思決定者がダイナミクス(1)を観測できる機会が強度 $\Lambda>0$ の Poisson 過程に従うと仮定する．Poisson 的観測の仮定は保険数理の分野では以前から用いられており，数理基盤が整備されてきている[9, 10]．

意思決定者は，各観測の際に土砂を投入するか否かの意思決定が可能であること，投入する場合には固定された存在量 1 まで土砂を投入できることを仮定する．この「1」という量については，ダイナミクス(1)を事前に無次元化しておけば理論上の問題がな

い．さらに，土砂投入の際には固定コスト$d>0$および投入量に比例するコスト$c(1-X_{\omega})$ ($c>0$) を要すると仮定する．ただし，ωは投入時刻である．また，初期値を$X_0\in[0,1]$と制限する．本来は観測という行為自体にもコストを要するが，問題の単純化のためにここでは考慮しない．

2.2 評価関数と最適性方程式

長期的目線の最適化問題としてエルゴード制御問題を考え，次の評価関数を定める：

$$\phi(x,\eta)=\lim_{\delta\to+0}\delta\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}e^{-\delta s}\chi_{\{X_s=0\}}\mathrm{d}s+\sum_{k\geq 1}e^{-\delta\omega_k}\left(c\eta_k+d\chi_{\{\eta_k>0\}}\right)\right]. \tag{2}$$

ただし，期待値を$\mathbb{E}$であらわし，$\chi_{\{\}}$は指示関数でありカッコ$\{\}$内の事象が真であれば1，それ以外であれば0を返す．また，$\{\omega_k\}_{k=1,2,3,\ldots}$は時刻0以降の観測時刻列で単調増加をあらわし，$\eta_k$は観測時刻$\omega_k$での土砂投入量である．定義から，$\eta_k$は0または$1-X_{\omega_k}$である．式(2)は，割引率0の極限でエルゴード制御問題の評価関数を表現する手法 (例えば文献[11])に依拠する．

さいごに，土砂投入スキーム$\eta=\{\eta_k\}_{k=1,2,3,\ldots}$をMarkov的，すなわち投入量$\eta_k$を時刻$\omega_k$で観測$X_{\omega_k}$にもとづく0または$1-X_{\omega_k}$に値をとる制御変数として決定する，以下の最適化問題を定式化する：

$$\text{Find}\quad H=\inf_{\eta}\phi(x,\eta). \tag{3}$$

最小化された評価関数H (有効ハミルトニアンと呼ばれる)，ならびにHを実現する最適制御 (η^*と書く)を求めることが本モデルのゴールである．

3. 主結果

ここでは，土砂を投入できるのは$X_{\omega_k}=0$のときに限る，というさらなる仮定のもとでの数理解析結果と数値計算結果を概観する．このとき，有効ハミルトニアンHおよび最適制御η^*を与える最適性方程式は，形式的に以下のように与えられる．ただし，$y:[0,1]\to\mathbb{R}$は$y(0)=0$を満たすポテンシャル関数である：

$$\begin{gathered}H+\mathcal{A}y(x)+\Lambda\left(y(x)-\chi_{\{x=0\}}\min_{\eta\in\{0,1-x\}}\left\{y(x+\eta)+c\eta+d\chi_{\{\eta>0\}}\right\}\right)=\chi_{\{x=0\}}\ \text{in}\ [0,1]\\ \mathcal{A}y(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ \int_0^{\infty}\left(y(x)-y(\max\{x-z,0\})\right)v(\mathrm{d}z) & (0<x\leq 1)\end{cases}\end{gathered}. \tag{4}$$

ここで，vはS_tのLevy測度である．ポテンシャルの境界条件$y(0)=0$は，右辺を他の実数で代替しても一般性を失わない．また，積分作用素$\mathcal{A}$については，右辺の積分が定まる必要がある．積分作用素の中にダイナミクスの非負性に由来する微分不可能な引数$\max\{x-z,0\}$を含むことが特徴的である．

式(4)はあくまでも形式的に得られたものであり，その解とは何か，という問題がある．これらの課題に取り組むためには，土砂流亡をあらわすLevy過程を具体化するためのさらなる仮定を置く必要がある．ここでは，S_tとして片側安定過程を仮定する：

$$\nu(\mathrm{d}z)=\frac{\lambda}{z^{1+\alpha}}\mathrm{d}z,\quad \lambda>0,\quad \alpha\in(0,1). \tag{5}$$

式(5)は，λが大きいほど高頻度または大量の土砂輸送が生じること，αが小さいほど間欠的な土砂輸送が生じることを意味する．片側安定過程は，様々なスケールの間欠性を有する河川流況をあらわす，最もシンプルなモデルであると考えられる．本稿では，定数Hと式(4)を区間$[0,1]$の各点で満足する連続関数$y\in C[0,1]$の組(H,y)を解と呼ぶ．このとき以下が成り立つ．

Proposition 1 式(4)は以下の解(H,y)を有する:

$$y(x)=-Yx^{\alpha}\quad (0\le x\le 1). \tag{6}$$

ここで，Yは一意に定まる正定数である．有効ハミルトニアンHもYから一意に求まる．さらに，十分に小さい$\max\{c,d\}$に対して，最適制御則は以下で与えられる:

$$\eta^{*}(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (0<x\le 1)\end{cases}. \tag{7}$$

この主張を証明するためには，実際に(6)のyを式(4)に代入し，HとYを求めればよい．ただし，式(4)が$x=0$では代数方程式

$$H=1+\Lambda\min_{\eta\in\{0,1\}}\left\{y(\eta)+c\eta+d\chi_{\{\eta>0\}}\right\} \tag{8}$$

となることに注意を要する．

上記の解の最適性，すなわち **Proposition 1** の解と最適性方程式(4)の正当性については，いわゆる Verification の議論に依拠して論じることができるがここでは省略する．

より現実的な応用問題では，式(4)と比較して複雑な最適性方程式を解く必要性が生じる．ここでは，式(4)の数値計算でさえ自明ではない問題であるという結果を報告する．式(4)の各項は，既存の「1 次精度」の片側差分法などを用いて離散化することができる．この片側差分法について，微分方程式の滑らかな解に対しては，l^{∞}ノルムのもとで数値計算誤差がメッシュ幅の 1 乗程度であろうというのが工学的な一般論である．これが，1 次精度といわれる所以である．しかしながら，**Proposition 1** の解を有する式(4)に関しては，yについて片側差分は高々α次精度であるという数値実験結果が得られている．$\alpha\in(0,1)$であるため，αが小さいほど (解の正則性が低いほど)，数値解の収束スピードが 1 次と比較して遅くなる．そのため，数値解の収束性に注意する必要がある．

有効ハミルトニアンHについても，メッシュを細かくするほど数値解が真の値に近づくことが数値実験的に確認されている．しかしながら，その次数はyの場合と比較して不明瞭である．理論解析により数値解のパラメータαへの依存性が明らかになれば，本モデル，ひいては土砂還元の最適化に関するより複雑なモデルの最適性方程式の数値解析に関する理解を深化できると考えられる．

4. おわりに

本稿では，土砂還元事業の数理モデルに関する結果を紹介した．今後は，モデルの適

用限界を認知しつつ拡張や改良を施していく必要がある．例えば，本稿で紹介したモデルはダム投入地点近傍での土砂輸送にしか着目しておらず，下流における土砂の輸送や堆積は考慮していない．この限界を克服するための方法としては，土砂輸送のダイナミクスを確率微分方程式ではなく確率偏微分方程式として定式化し直す，または下流の土砂輸送や堆積の状況を上手に考慮できる評価関数を定式化することが考えられる．いずれの場合も動的計画原理が理論的には適用できるが，本稿のような解析的に解けるモデルが得られる可能性は低く，数値計算が必要となる可能性が非常に高い．前者の場合はとくに数値計算規模が大きくなることが想定される．ただし，動的計画原理とある意味で等価な前進後退確率微分方程式を活用すれば，少なくとも工学的には制御問題を解くことができると考えられる[8]．しかし，本モデルの場合はダイナミクスと評価関数が不連続な係数を含むために前進後退確率微分方程式の一般論[例えば，Delong (2013), Theorem 3.1.1]が応用できず，その数学的正当化が課題である．

本稿では主に土砂還元事業の数理的側面に触れたが，土砂の流亡に加えて，土砂が河床の付着藻類に与える影響についても実験的な知見が着実に蓄積されている[13]．こうした知見を用いれば，より現実と整合しつつも適用範囲が広い数理モデルを構築できる．

さいごに，土砂還元に限らず，河川の環境管理に関係する様々な問題は，例えば土木工学，生態工学，農学のみといった，単一の学問分野の観点からの取り組みで解決できる問題ではない．著者らは，河川の環境管理は環境，生物，経済，数理などを含む融合問題であるが，最適化や最適制御の観点から統一的にアプローチすることができると考えている．数理科学が応用研究を深化させるとともに，応用研究が数理科学に新しい観点を与える，そのような関係性を育むことは意義深いと考えられる．

謝辞

本研究は文部科学省科研費 (17J09125, 18K01714, 19H03073)，クリタ水・環境科学振興財団国内研究助成 (19B018, 20K004)の支援を受けました．原稿全体を確認頂いた島根大学生物資源科学部学生の橋本紗弥氏に感謝申し上げます．

引用文献

[1] 田代喬ら (2014). 底生魚の生息場所からみたダム下流の河床のアーマー化と土砂還元による機能の回復. 土木学会論文集 B1 (水工学), 70(4), I_1321-I_1326.

[2] 浅見和弘ら (2017). 三春ダムにおける付着藻類の剥離に効果的なフラッシュ放流のタイミングの検討事例. 応用生態工学, 19(2), 203-210.

[3] 溝口裕太ら (2018). ダム下流域での土砂還元が河床細粒化と底生動物群集構造に与える効果. 土木学会論文集 B1 (水工学), 74(4), I_595-I_600.

[4] Juez, C. et al. (2016). Assessment of the performance of numerical modeling in reproducing a replenishment of sediments in a water-worked channel. Advances in Water Resources, 92, 10-22.

[5] Kondolf, G. M. et al. (2014). Sustainable sediment management in reservoirs and regulated rivers: Experiences from five continents. Earth's Future, 2(5), 256-280.

[6] Øksendal, B. K. and Sulem, A. (2005). Applied stochastic control of jump diffusions. Springer, Berlin.

[7] Yoshioka H. et al. (2020). HJB and Fokker-Planck equations for river environmental management based on stochastic impulse control with discrete and random observation. Preprint. http://arxiv.org/abs/2009.00184

[8] Yoshioka H. et al. (2021). Designing the capacity of sand replenishment under uncertain and intermittent flow environment. DCO2021. (in preparation)

[9] Albrecher, H. et al. (2016). Exit identities for Lévy processes observed at Poisson arrival times. Bernoulli, 22(3), 1364-1382.

[10] Landriault, D. et al. (2018). Poissonian potential measures for Lévy risk models. Insurance: Mathematics and Economics, 82, 152-166.

[11] Arapostathis, A. et al. (2019). Ergodic control of a class of jump diffusions with finite Lévy measures and rough kernels. SIAM Journal on Control and Optimization, 57(2), 1516-1540.

[12] Delong, Ł. (2013). Backward Stochastic Differential Equations with Jumps and Their Actuarial and Financial Applications. London: Springer, London.

[13] 濱上邦彦ら (2020). 掃流土砂による付着藻類の剥離動態に関する検討. 水利科学. (印刷中).