連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価

大阪大学・大学院生命機能研究科　　松本　敏幸
MATSUMOTO Toshiyuki
Graduate School of Frontier Biosciences, Osaka University
大阪大学・大学院経済学研究科　　大西　匡光
数理・データ科学教育研究センター
OHNISHI Masamitsu
Graduate School of Economics & Center for Mathematical Modeling and Data Science, Osaka University
EY 新日本有限責任監査法人　　田中　寧々
TANAKA Nene
Ernst & Young ShinNihon LLC

要旨

本研究の目的は，連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価モデルを提案し，そのもとでの価格式を導出することである．近年，成長企業を中心にリストリクティッド・ストック（譲渡制限付き株式）とともに，ストック・オプションへの関心は高まりつつあるが，売上げや利益などの業績に条件を付したストック・オプションを評価する標準的な方法はなく，各企業が独自の判断で価値評価しており，公正とは言えない状況にある．そこで，通常のオプションの価格評価のためのブラック＝ショールズ・モデルに業績条件を組み込む形で，業績条件付きストック・オプションのための新たな価値評価モデルの構築を試みる．

１．はじめに

本研究は，近年成長企業を中心に関心が高まっている業績条件付きストック・オプション（新株予約権を含む）の価値評価モデルを構築することを目的とする．

ストック・オプションとは，あらかじめ決められた価格（＝権利行使価格）で株式を購入することができる権利のことで，損失を被るリスクを負わずに株式を取得する権利を得られるという取得者側のメリットと，それによって資本の増加を見込める企業側のメリットがある．その資金調達における有用性から，ストック・オプション制度開始以降，次第に関心が高まって来ており，導入企業の数は１０年前と比較して２倍近く（2017 年時点で 600 社ほど）になっている（ウイリス・タワーズワトソン，三菱 UFJ 信託銀行 [1]）．

ストック・オプションには株式報酬型や有償型などの種類があるが，最近の企業の事例を見ると，売上げや利益などの業績に条件を付した，いわゆる業績条件付きのストック・オプションを発行している場合が多い．ここでいう業績条件とは，例えば，ある年度の営業利益が所定の額以上のとき，権利行使が可能になるといったようなものである．ストック・オプションは，執行役員や従業員に付与されるため，このような業績条件を付すことで，執行役員の経営努力や従業員の労働へのインセンティブを，より直接的に向上させることに繋がるというメリットがある．実際に，業績条件付きストック・オプションの発行によって業績の向上（つまり利益の上昇）に繋がっている企業の事例があることからも，業績条件付きストック・オプションに対する関心の高まりが窺える．

ここで問題になるのが，ストック・オプションの発行価格（いわゆる払込価額）である．ストック・オプションは，あらかじめ決められた価格で株式を購入できる権利であるため，発行価格によっては，ストック・オプション所有者が特に有利な金額で株式を購入できる場合があり，既存の株主の利益を害する可能性がある．そのため，発行価格を如何に設定するかが重要な問題となる．

オプションの評価モデルとしては，金融工学での標準として，ブラック＝ショールズ・モデルがある（例えば, Cvitanić and Zapatero [7], Hull [8]）．これは，ヨーロピアン・オプション（権利行使期間の最終日にのみ，権利行使可能なオプション）を，リスク中立確率測度のもとで，株価，行使価格，無リスク利子率，分散（ボラティリティ），期間，という 5 つのパラメータを用いて評価する，単純で明確なモデルである．このブラック＝ショールズ・モデルは，使いやすく，公正さや認知度からみても非常に有用なため，実務でも広く使われている．しかし，業績条件付きストック・オプションは，通常のストック・オプションと比較して権利行使可能性に制限がかかり，その分オプション価値にも影響を与えるものと考えられる．また，ブラック＝ショールズ公式を適用したとしても，業績条件については多くの仮定や前提を必要とするため，評価者によって評価額に幅が存在する．したがって，業績条件付きストック・オプションの評価にブラック＝ショールズ公式を適用するのは，会計的にも不適切である．それにもかかわらず，業績条件付きストック・オプションを発行している企業がその価値評価の方法として採用しているのは，ブラック＝ショールズ公式である．それは業績条件付きストック・オプションの一般的で標準的な評価モデルが存在しないことに起因する．ここに，ブラック＝ショールズ・モデルとは異なる，新しい業績条件付きストック・オプションの価値評価方法の必要性を確認することができる．

このような業績条件付きストック・オプションの価値評価についての研究は，著者らの知る限り，中村［4］以外にほとんど見当たらない[1]．そこでは，著者の中村慎二氏は，業績条件付きストック・オプションの価値評価に伴う困難について，以下のように言及している．

[1] その後，Fujimoto (藤本) [17, 18］は，非完備市場における条件付き請求権に対する限界効用基準のもとでの価格付けによるアプローチを取る研究を発表している．

業績条件付きストック・オプションの価値評価を行うためには，将来の業績の分布または，業績達成確率を仮定しなければならない．しかし，業績の分布をモデル化するにあたっては，以下のような困難を伴う．

(1) 利益のデータが連続的なものではないこと

(2) 利益のデータはマイナス値を取り得ること

(3) 利益と株価の相関をモデル化することが困難であること

このうち（3）について，株価と業績が相関をもつとすると，株価収益率（PER）が一定または少なくとも利益の水準で説明できるものであることを認めることになる．しかし，これまでの実証研究では，PER についてそのような性質は確認されていない．したがって，株価と業績に相関があるという結論を得るのが難しい．また，相関関係があることを相当に強い証拠を持って示すことができなければ，無相関の推定を覆すことができない．さらに，相関係数に関する統計上の検定によって相関係数が有意にプラスであるというコンセンサスがまだ得られていないのであれば，株価と業績が無相関であるという推定を批判する十分な理由にはならない．

以上の理由から，中村慎二氏は，主として，株価と業績とが無相関であることを前提とした新しい評価モデルを提案し，業績条件付きストック・オプションの価値の解析・評価を試みている．

しかしながら，株価と利益が無相関であるならば，業績の向上が株価の上昇に繋がらず，業績条件の達成を従業員等の株式取得のインセンティブに繋げる強い要因にはならない．したがって，従業員等に業績向上のインセンティブを与えるという，業績条件付きストック・オプションの発行目的に適さず，業績条件付きストック・オプションを発行する趣旨にそぐわない．また，無相関を覆せるような証拠は無いかもしれないが，他方，相関を持つモデルを否定することができる研究やデータも無い．市場全体で見ると，株価と一株当たり当期純利益（EPS）は正の相関を持つという実証研究もあり，どちらかと言えば，株価と業績には正の相関（より正確には正の確率的依存性・関連性）があるという説の方が会計学者の間では有力でさえある．そこで我々は，株価と業績には相関があるものとして，中村慎二氏が挙げる上記の（1)～(3）の困難を克服するようなモデル構築を試みる．

本稿の構成は以下のようになっている．まず，第２節で確率モデルを導入し，第３節において業績条件付きストック・オプションの価格式を導出する．第４節では，ストック・オプションの価格の株価と業績との相関への依存性についての数理解析を行う．第５節では，第３節で導出した価格式の計算に必要なパラメータの統計的推定法を提案する．第６節では，実際の企業のデータを用いた数値例を紹介しする．最後に，第５節において，今後の課題を述べる．

２．業績条件付きストック・オプションの評価モデル

評価モデルを構築するに当たり，

(a) ブラック＝ショールズ・モデルのように，実務関係者に広く使われるよう，できる限り単純なものにすること，

(b) 業績条件には標準となり得るものを設定すること，

(c) 業績と株価は相関（確率的依存性・関連性）を持ち得ると仮定すること，

(d) 現実の業績の時間変動を描写する確率モデルを目指すこと，

(e) モデルに現れるパラータの同定が容易であること，

の５点を主たる目標とする．

さて，リスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ が導入された適当な確率空間の上で，下記の確率モデルを考える：[2]

連続時間 $\mathbb{R}_+ \coloneqq [0,\infty)$ 上で企業活動がなされ，離散時間 $\mathbb{Z}_+ \coloneqq \{0,1,\dots\} \subset \mathbb{R}_+$ において会計・財務上の報告・開示がなされるものとする．ただし，簡単のため，単位時間（期間長）を 1（年）として，時点 $n-1$ から時点 n までの時間区間 $(n-1,n]$ を第 n 期（間）と呼ぶ．ストック・オプションが付与される時刻を時点 0 とする．

2.1 株価モデル $(S_t, t \geq 0)$

ブラック＝ショールズ・モデルと同様，株価は幾何ブラウン運動に従うと仮定する：時点 $t \geq 0$における株価をS_tとして，

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S\right\} = S_0 e^{X_t}, \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

あるいは，対数株価$X_t = \ln S_t$ は

$$X_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S = \mu_X t + \sigma_S W_t^S, \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

ここで $(W_t^S, t \geq 0)$は標準ブラウン運動，$r \geq 0$は連続複利での無リスク利子率，$\sigma_S > 0$はボラティリティ・パラメータであり，$\mu_X \coloneqq r - \frac{\sigma_S^2}{2}$としている．このとき，$W_t^S \sim N(0,t)$により，$X_t \sim N(\mu_X t, \sigma_S^2 t)$となる．

[2] 本稿中，期待値や分散・共分散の記号において，確率測度 $\mathbb{Q}$ への依存性を強調したい場合にのみ，添え字として付して，そのことを明記する．

2.2 業績モデル（$C_n, n = 1, 2, \ldots$）

企業の業績は，通常，年度ごとや四半期ごとに開示される（企業によっては非開示用に月ごとの業績も作成される）．この離散時間的な業績変動を連続時間モデルによって表現するために，つぎのような工夫を行う．まず，日々の業績よりもさらに小さい微小時間区間ごとに定まる“業績強度［率］過程”を考える．時点 $s \geq 0$での業績強度を Y_sとし，負の値も取り得るので，本研究では，ドリフト付きブラウン運動を用いて，以下のように定義する：

$$Y_s = Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y, \qquad s \geq 0 \tag{3}$$

ただし，$(W_s^Y,\ s \geq 0)$ は標準ブラウン運動，Y_0，μ_Y，σ_Yはパラメータである．このとき，$W_s^Y \sim N(0, s)$より，$Y_s \sim N(Y_0 + \mu_Y s, \sigma_Y^2 s)$となる．また 2 つの標準ブラウン運動 $(W_t^S, t \geq 0), (W_s^Y, s \geq 0)$ の相関を$\rho_{SY} \in [-1,1]$とする，すなわち，$\mathrm{d}W_t^S \cdot \mathrm{d}W_t^Y = \rho_{SY}\mathrm{d}t$と仮定する．

つぎに，この業績強度 Y_sを使って，第 n 期の業績 C_nを以下のように定義する：

$$C_n = \int_{n-1}^{n} Y_s\, ds = \int_{n-1}^{n} (Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y)\, ds\,, \qquad n \geq 1 \tag{4}$$

すなわち，業績強度 Y_s の期間中での累積がその期の業績 C_nであると考える．

このとき業績評価期間の第 T期の業績 C_Tは正規分布 $N(\mu_C, \sigma_C^2)$に従う，ただし，

$$\mu_C \coloneqq \mu_C(T) \coloneqq \mathbb{E}[C_T];\ \sigma_C^2 \coloneqq \sigma_C^2(T) \coloneqq \mathrm{Var}[C_T]$$

は所与の諸パラメータからつぎのように導出される：

一般的に，$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} \coloneqq \{1, 2, \ldots\}$ に対して，

$$\mu_C(n) := \mathbb{E}[C_n] = \mathbb{E}\left[\int_{n-1}^{n} Y_s ds\right] = \int_{n-1}^{n} \mathbb{E}[Y_s] ds = \int_{n-1}^{n} (Y_0 + \mu_Y s) ds = Y_0 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mu_Y;$$

$$\sigma_C^2(n) := \mathrm{Var}[C_n] = \mathrm{Var}\left[\int_{n-1}^{n} Y_s ds\right] = \sigma_Y^2 \mathrm{Var}\left[\int_{n-1}^{n} W_s^Y ds\right] = \sigma_Y^2\ \mathbb{E}\left[\left(\int_{n-1}^{n} W_s^Y ds\right)^2\right]$$

$$= \sigma_Y^2\ \mathbb{E}\left[\left(\int_{n-1}^{n} W_s^Y ds\right)\left(\int_{n-1}^{n} W_t^Y dt\right)\right] = \sigma_Y^2\ \mathbb{E}\left[\int_{s=n-1}^{n}\int_{t=n-1}^{n} W_s^Y W_t^Y ds\, dt\right]$$

$$= \sigma_Y^2 \int_{s=n-1}^{n}\int_{t=n-1}^{n} \mathbb{E}[W_s^Y W_t^Y]\, ds\, dt = \sigma_Y^2 \int_{s=n-1}^{n}\int_{t=n-1}^{n} \min\{s, t\}\, ds\, dt = \left(n - \frac{2}{3}\right)\sigma_Y^2.$$

また，一般的に，$m, n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++},\ m \neq n\ (n - 1 \geq m)$とすると，$C_n$と$C_m$の共分散は，

$$\sigma_C(n, m) := \mathrm{Cov}[C_n, C_m] = \mathrm{Cov}\left[\int_{n-1}^{n} Y_t dt\,, \int_{m-1}^{m} Y_u du\right] = \mathrm{Cov}\left[\int_{n-1}^{n} \sigma_Y W_t^Y dt\,, \int_{m-1}^{m} \sigma_Y W_u^Y du\right]$$

$$= \sigma_Y^2 \mathbb{E}\left[\int_{n-1}^{n} W_t^Y dt \int_{m-1}^{m} W_u^Y du\right] = \sigma_Y^2 \int_{t=n-1}^{n}\int_{u=m-1}^{m} \mathbb{E}[W_t^Y W_u^Y]\, dt\, du$$

$$= \sigma_Y^2 \int_{t=n-1}^{n}\int_{u=m-1}^{m} \min\{t, u\}\, dt\, du = \sigma_Y^2\left(m - \frac{1}{2}\right) = \sigma_Y^2\left(\min\{m, n\} - \frac{1}{2}\right).$$

したがって，下記を得る：

$$\mu_C = \mu_C(T) = \mathbb{E}[C_T] = Y_0 + \left(T - \frac{1}{2}\right)\mu_Y;$$

$$\sigma_C^2 = \sigma_C^2(T) = \mathrm{Var}[C_T] = \mathrm{Cov}[C_T, C_T] = \sigma_C(T,T) = \left(T - \frac{2}{3}\right)\sigma_Y^2.$$

さらに，一般的に，$m, n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++}$とすると，$X_n$と$C_m$の共分散は，$n \geq m$のとき，

$$\sigma_{XC}(n,m) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_n, C_m] = \mathrm{Cov}\left[X_n, \int_{m-1}^{m} Y_u du\right] = \mathrm{Cov}\left[\sigma_S W_n^S, \int_{m-1}^{m} \sigma_Y W_u^Y du\right]$$

$$= \sigma_S\sigma_Y \mathbb{E}\left[W_n^S \int_{m-1}^{m} W_u^Y du\right] = \sigma_S\sigma_Y \int_{m-1}^{m} \mathbb{E}\,[W_n^S W_u^Y]\, du = \sigma_S\sigma_Y \int_{m-1}^{m} \rho_{SY} \min\{n,u\}\, du$$

$$= \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y \int_{m-1}^{m} u\, du = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y \left(m - \frac{1}{2}\right),$$

$n \leq m-1$のとき，下記のように計算される：

$$\sigma_{XC}(n,m) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_n, C_m] = \mathrm{Cov}\left[X_n, \int_{m-1}^{m} Y_u du\right] = \mathrm{Cov}\left[\sigma_S W_n^S, \int_{m-1}^{m} \sigma_Y W_u^Y du\right]$$

$$= \sigma_S\sigma_Y \mathbb{E}\left[W_n^S \int_{m-1}^{m} W_u^Y du\right] = \sigma_S\sigma_Y \int_{m-1}^{m} \mathbb{E}\,[W_n^S W_u^Y]\, du = \sigma_S\sigma_Y \int_{m-1}^{m} \rho_{SY} \min\{n,u\}\, du$$

$$= \sigma_S\sigma_Y \int_{m-1}^{m} \rho_{SY}\, n\, du = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y n.$$

2.3 リスク中立オプション評価 $P_T, T \geq 1$

まず，満期（行使日）$T \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} \coloneqq \{1,2,\ldots\} \subset \mathbb{R}_{++} \coloneqq \left(0, \infty\right)$を持ち，業績 C_T に下限の条件の付けられたストック・オプションの価格 P_T は，リスク中立評価公式により下記の通りに計算される．

$$P_T \coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+; C_T > L], \tag{5}$$

ただし，

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X; A]$：事象 A 上に制限された確率変数 X の確率測度$\mathbb{Q}$による部分期待値,

r：連続複利での無リスク利子率,

T：満期,

S_T：時点 Tにおける株価,

K：権利行使価格,

C_T：第 T期における業績,

L：ストック・オプション行使のための業績の下限,

e^{-rT}：現在価値への割引率.

3．業績条件付きストック・オプションの価格式の導出

第 2 節でのモデルのもとでは，満期T における対数株価 X_Tと業績 C_Tとは 2 変量正規分布に従うことに注意する：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ C_T \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \sigma_{XC} \\ \sigma_{XC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] = N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} \\ \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right],$$

ただし，

$$\sigma_{XC} \coloneqq \sigma_{XC}(T,T) = \mathrm{Cov}[X_T, C_T];\ \rho_{XC} \coloneqq \rho_{XC}(T,T) = \rho[X_T, C_T]$$

は所与の諸パラメータから，つぎのように導出される：

$$\sigma_{XC} = \sigma_{XC}(T,T) = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y\left(T - \frac{1}{2}\right);$$

$$\rho_{XC} = \frac{\sigma_{XC}}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_T]}\sqrt{\mathrm{Var}[C_T]}} = \frac{\left(T - \frac{1}{2}\right)\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{\sqrt{T}\sigma_S\cdot\sigma_C} = \frac{\left(T - \frac{1}{2}\right)\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{\sqrt{T}\sigma_S\cdot\sqrt{\left(T - \frac{1}{3}\right)\sigma_Y^2}} = \left(T - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(T - \frac{1}{3}\right)T}}\cdot\rho_{SY}.$$

ここで，式 (5) を以下のように書き換える．

$$\begin{aligned} P_T &\coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+; C_T > L] \\ &= S_0\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{X_T - rT}; X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right] - Ke^{-rT}\mathbb{Q}\left(X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right). \end{aligned} \tag{6}$$

式 (6) の最右辺を業績 C_T について条件付け，標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(\cdot)$を用いて表現すれば,

$$\begin{aligned} P_T = \int_{c_T=L}^{\infty}\Bigg\{ & S_0\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 + \mu_X + \rho_{XC}\frac{\sigma_S}{\sigma_C}(c_T - \mu_C)}{\sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2}}\right) \\ & \times \exp\left(\frac{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2}{2} + \mu_X + \rho_{XC}\frac{\sigma_S}{\sigma_C}(c_T - \mu_C) - rT\right) \\ & - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X + \rho_{XC}\frac{\sigma_S}{\sigma_C}(c_T - \mu_C)}{\sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2}}\right)\Bigg\} f_{C_T}(c_T)\, dc_T \end{aligned}$$

となる．

さらに，ブラック＝ショールズ・モデルによるオプション価格式と対比的に，上記価格式を書き換えれば：

$$P_T \quad = \int_{c_T=L}^{\infty} \{S_0 \Phi(d_1') \exp(D) - K e^{-rT} \Phi(d_2')\} f_{C_T}(c_T)\, dc_T, \tag{7}$$

$$d_1' \coloneqq \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T + \mu_X T + \rho_{XC} \frac{\sigma_S \sqrt{T}}{\sigma_C}(c_T - \mu_C)}{\sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}}, \tag{8}$$

$$d_2' \coloneqq d_1' - \sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}, \tag{9}$$

$$D \coloneqq \frac{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}{2} + \mu_X T + \rho_{XC} \frac{\sigma_S \sqrt{T}}{\sigma_C}(c_T - \mu_C) - rT, \tag{10}$$

$$f_{C_T}(c_T) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_C^2}} \exp\left\{-\frac{(c_T-\mu_C)^2}{2\sigma_C^2}\right\} \tag{11}$$

と表現される．[3]

4．ストック・オプション価格 P_T の相関係数 ρ_{SY} への依存性

業績条件付きストック・オプションの価格式を，株価過程と業績強度過程それぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 $\rho_{SY} \in [-1, 1]$ と業績条件の下限 L への依存性を陽に（明示的）に示すため，

$$\begin{aligned} P_T(L{:}\,\rho_{SY}) \quad &\coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+; C_T > L] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}[S_T - K]_+ 1_{\{C_T > L\}}\right] \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[[S_0 e^{X_T} - K]_+ 1_{\{C_T > L\}}\right] \end{aligned} \tag{12}$$

と表す，ただし，

$$X_t \coloneqq \ln S_t - \ln S_0\,, \quad 0 \le t \le T$$

とおいた．

満期 T での対数株価と業績の組（X_T, C_T）が 2 変量正規分布に従うこと，また

$$g(x_T) \coloneqq [S_0 e^{x_T} - K]_+;$$

$$h(c_T) \coloneqq 1_{\{c_T > L\}}$$

とおけば，$g, h{:}\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ はともに，非負値の単調非減少関数であることに注意する．

[3] 吉羽要直氏（東京都立大学教授）より，相関を持つ２変量正規分布の累積分布関数を用いた，積分を含まない，より簡潔な表現が可能であることを御教示頂いた．ここに記して感謝の意を表します．

下記の**共分散不等式**は良く知られている（例えば，Ross [13]）．

補題 4.1［共分散不等式］

X を実数値確率変数とし，$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を単調非減少関数，$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を単調非減少（非増加）関数とする．このとき，

$$\mathrm{Cov}\,[g(X), h(X)] \geq (\leq)\, 0,$$

すなわち，

$$\mathbb{E}[g(X)\, h(X)] \geq (\leq)\, \mathbb{E}[g(X)]\, \mathbb{E}[h(X)]$$

が成り立つ，ただし，上記のすべての期待値は存在するものと仮定する．

上記の補題から直接的に下記の系を得る．

系 4.1

確率ベクトル (X, Y) が相関 $\rho_{XY} \in [-1,1]$ を持つ 2 変量の正規分布:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right]$$

に従うものとし，g, $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$を単調非減少関数とすると

$$\rho_{XY} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \quad \text{のとき} \quad \mathbb{E}[g(X)\, h(Y)] \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} \mathbb{E}[g(X)]\, \mathbb{E}[h(Y)]$$

が成り立つ［複号同順］．

証明：標準化

$$X' = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X};\ Y' = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

を行えば，

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & 1 \end{pmatrix}\right],$$

すなわち，確率ベクトル (X', Y') は相関 ρ_{XY} を持つ 2 変量の標準正規分布に従う．そこで，確率ベクトル (U, V)を無相関な 2 変量の標準正規分布：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

に従うものとすれば，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} =_d \begin{pmatrix} \sigma_X U + \mu_X \\ \sigma_Y \left\{\rho_{XY} U + \sqrt{1 - \rho_{XY}^2}\, V\right\} + \mu_Y \end{pmatrix}$$

が成り立つ．したがって，$\rho_{XY}\begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)\cdot h(Y)] &= \mathbb{E}\left[g(\sigma_X U+\mu_X)\cdot h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[g(\sigma_X U+\mu_X)\cdot h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&\begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)|V]\cdot\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)]\cdot\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&= \mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)]\cdot\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&= \mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)]\cdot\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\right] = \mathbb{E}[g(X)]\cdot\mathbb{E}[h(Y)].
\end{aligned}$$

ただし，第３の等号（不等号）［複号同順］は補題 4.1［共分散不等式］から成り立つ．

□

上記の系から，満期 T における対数株価 X_T と業績 C_Tとが確率的に独立［無相関］であるとした際のストック・オプションの価値評価

$$e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[[S_0e^{X_T}-K]_+]\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[1_{\{C_T>L\}}\right] = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[[S_0e^{X_T}-K]_+]\cdot\mathbb{Q}(C_T>L),$$

すなわち，ブラック＝ショールズ式に業績条件の達成確率を乗じた値は，それらの相関係数 ρ_{XC} が正（負）のとき，したがって，遡って，株価過程と業績強度過程それぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY}が正（負）のときには，過小評価（過大評価）となることが分かる．

さて，問題をより一般的に設定し，ストック・オプションの満期T において，それが付与されてからの各期 $1,2,\dots,T$ においての業績 $C_1,C_2,\dots,C_T$ すべてが，それぞれに設定された下限 $L_1,L_2,\dots,L_T\in[-\infty,\infty]$ を超えたとき，つまり，

$$C_1>L_1, C_2>L_2,\dots,C_T>L_T$$

のすべてが同時に満たされたときにのみ権利行使が許されるとする，より一般的な業績条件付きストック・オプションの価値評価を考える．ただし，$L_k=-\infty,\ k\in\{1,2,\dots,T\}$ のときは，第 k 期の業績については，何ら条件は課せられないことを表す．

先と同様，業績条件付きストック・オプションの価値は，リスク中立評価公式から，

$$
\begin{aligned}
P_T(L_1, L_2, \dots, L_T: \rho_{SY}) &\coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+; C_1 > L_1, C_2 > L_2, \dots, C_T > L_T] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}[S_T - K]_+ 1_{\{C_1 > L_1, C_2 > L_2, \dots, C_T > L_T\}}\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[[S_0 e^{X_T} - K]_+ \cdot 1_{\{C_1 > L_1\}} \cdot 1_{\{C_2 > L_2\}} \cdot \cdots \cdot 1_{\{C_T > L_T\}}\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(X_T) \cdot h_1(C_1) \cdot h_2(C_2) \cdot \cdots \cdot h_3(C_T)],
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
g(x_T) = h_0(x_T) \coloneqq [S_0 e^{x_T} - K]_+;
$$

$$
h_1(c_1) \coloneqq 1_{\{c_1 > L_1\}}, h_2(c_2) \coloneqq 1_{\{c_2 > L_2\}}, \dots, h_T(c_T) \coloneqq 1_{\{c_T > L_T\}}
$$

と定義する.

つぎの**象限順序**（orthant orderings）の概念を準備する（例えば，Rüschendorf [14], Tong [15]）．これらの確率順序概念は，信頼性理論，極値理論，等の応用確率論，数理統計学の分野で，多変量の確率ベクトルにおいて，それらを構成する確率変数間の（正の）確率的依存性の強さを比較する際に用いられてきた.

定義 4.1［象限順序］

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1,2,\dots\}$ とする．n 変量の確率ベクトル $X = (X_1, \dots, X_n)$，$Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ に対して：

(1) ［上方象限順序（Upper Orthant Order)］$X \le_{uo} Y$ が成り立つとは,

$$
\mathbb{P}(X_1 > z_1, \dots, X_n > z_n) \le \mathbb{P}(Y_1 > z_1, \dots, Y_n > z_n),\ \forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n;
$$

(2) ［下方象限順序（Lower Orthant Order)］$X \le_{lo} Y$ が成り立つとは,

$$
\mathbb{P}(X_1 \le z_1, \dots, X_n \le z_n) \ge \mathbb{P}(Y_1 \le z_1, \dots, Y_n \le z_n),\ \forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n;
$$

(3) ［諧調順序（Concordance order)］$X \le_c Y$ が成り立つとは，$X \le_{uo} Y$ かつ $X \le_{lo} Y$，すなわち,

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 > z_1, \dots, X_n > z_n) \le \mathbb{P}(Y_1 > z_1, \dots, Y_n > z_n); \\
&\mathbb{P}(X_1 \le z_1, \dots, X_n \le z_n) \ge \mathbb{P}(Y_1 \le z_1, \dots, Y_n \le z_n),
\end{aligned}\right. \quad \forall \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in R^n.
$$

注 4.1

(1) $n = 1$ の場合（$X = X = X_1$，$Y = Y = Y_1$ とすれば）

$$
X \le_{uo} Y \Leftrightarrow X \le_{lo} Y \Leftrightarrow X \le_c Y (\Leftrightarrow X \le_{st} Y);
$$

(2) $n = 2$ で，$X = (X_1, X_2)$ と $Y = (Y_1, Y_2)$ の周辺分布が等しい，すなわち,

$$
X_1 =_d Y_1, \quad X_2 =_d Y_2
$$

が成り立つ場合,

$$
X \le_{uo} Y \Leftrightarrow X \le_{lo} Y \Leftrightarrow X \le_c Y.
$$

下記の補題も直接的に示すことができる．

補題 4.2

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1,2,\ldots\}$ とする．n 変量の確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$，$\boldsymbol{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ に対して，下記の条件は等価である：

(1) $X \leq_{uo} Y$;

(2) すべての非負値の単調非減少関数 $h_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 1,\ldots,n$ に対して，

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} h_i(X_i)\right] \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} h_i(Y_i)\right].$$

証明：

(a) (2) $\Longrightarrow$ (1)：$h_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 1,\ldots,n$ を，$\boldsymbol{z} = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^n$ を任意に定めて，

$$h_i(z) \coloneqq 1_{(z_i,\infty)}(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

と定義すれば，非負値の単調非減少関数で，

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} h_i(z_i)\right] = \mathbb{E}\left[1_{\{X_1>z_1,\ldots,X_n>z_n\}}\right] = \mathbb{P}(X_1 > z_1,\ldots,X_n > z_n).$$

(a) (1) $\Longrightarrow$ (2)：任意の非負値の単調非減少関数 $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ は，($\alpha_j \geq 0, a_j \in \mathbb{R}, j = 1,\ldots,m$ から構成される）非負値の単調非減少単関数：

$$\tilde{h}(z) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{(a_j,\infty)}(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

の増加列の各点収束極限として表現できることから，示すことができる．

□

つぎの補題は，**Slepian の不等式**（例えば，Wainwright [16]）としてよく知られるタイプの不等式の１バージョンである．

補題 4.3［Slepian 型の不等式］

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1,2,\ldots\}$ とする．n 変量の確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$，$\boldsymbol{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ がいずれも n 変量正規分布に従うとする：

$$X \sim N(\boldsymbol{\mu_X}, \Sigma_X);\ Y \sim N(\boldsymbol{\mu_Y}, \Sigma_{\boldsymbol{Y}}),$$

ただし，

$$\boldsymbol{\mu_X} = \left(\mu_{X_i}, i = 1,\ldots,n\right),\ \Sigma_{\boldsymbol{X}} = \left(\sigma_{X_iX_j}, i,j = 1,\ldots,n\right) = \left(\rho_{X_iX_j}\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}, i,j = 1,\ldots,n\right);$$
$$\boldsymbol{\mu_Y} = \left(\mu_{Y_i}, i = 1,\ldots,n\right),\ \Sigma_{\boldsymbol{Y}} = \left(\sigma_{Y_iY_j}, i,j = 1,\ldots,n\right) = \left(\rho_{Y_iY_j}\sigma_{Y_i}\sigma_{Y_j}, i,j = 1,\ldots,n\right).$$

このとき，

(1) $\mu_{X_i} = \mu_{Y_i},\ i = 1, \dots, n;$

(2) $\sigma_{X_i} = \sigma_{Y_i},\ i = 1, \dots, n$

を仮定する（すなわち，周辺分布が同じであると仮定する）と，

$$\sigma_{X_i X_j} \le \sigma_{Y_i Y_j}\ 1 \le i < j \le n \quad \Longrightarrow \quad X \le_{uo} Y$$

$$\left(\Leftrightarrow \quad \rho_{X_i X_j} \le \rho_{Y_i Y_j},\ 1 \le i < j \le n \quad \Longrightarrow \quad X \le_{uo} Y\right)$$

が成り立つ.

証明：Müller [12] を参照.

□

以上のことを繋ぎ合わせれば下記の定理を得る.

定理 4.1

ストック・オプション価格 $P_T(L_1, L_2, \dots, L_T\colon \rho_{SY})$ は，株価過程と業績強度過程とをそれぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY} の単調非減少関数である.

ストック・オプション価格 $P_T(L_1, L_2, \dots, L_T\colon \rho_{SY})$ が各 $L_i, i = 1, \dots, T$ についての単調非増加関数であることは自明である.

注 4.1

上記では，業績条件としては，ストック・オプションの満期 T において，それが付与されてからの各期 $1, 2, \dots, T$ においての業績 $C_1, C_2, \dots, C_T$ の“すべて”が，それぞれに設定された下限 $L_1, L_2, \dots, L_T \in [-\infty, \infty]$ を超えたとき，つまり，

$$C_1 > L_1, C_2 > L_2, \dots, C_T > L_T$$

のすべてが同時に満たされたとき，すなわち事象

$$C := \{C_1 > L_1, C_2 > L_2, \dots, C_T > L_T\} = \bigcap_{k=1}^{T} \{C_k > L_k\}$$

が生起した場合にのみ権利行使が許されるものとした.

それとは異なり，ストック・オプションが付与されてからの各期 $1, 2, \dots, T$ においての業績 $C_1, C_2, \dots, C_T$ の“いずれか”が，それぞれに設定された下限 $L_1, L_2, \dots, L_T \in [-\infty, \infty]$ を超えたとき，すなわち，事象

$$D := \bigcup_{k=1}^{T} \{C_k > L_k\} = \left(\bigcap_{k=1}^{T} \{C_k \le L_k\}\right)^c$$

が生起した場合には権利行使が許されるとした事例も少なくない，ただし，$L_k = \infty,\ k \in \{1, 2, \ldots, T\}$ のときは，第 k 期の業績は条件の達成には考慮されないことを表す．

この場合にも，ド・モルガンの法則による事象の定義関数の関係式：

$$1_D = 1_{\bigcup_{k=1}^{T}\{C_k > L_k\}} = 1 - 1_{\bigcap_{k=1}^{T}\{C_k \le L_k\}} = 1 - \prod_{k=1}^{T} 1_{\{C_k \le L_k\}}$$

を用いれば，ストック・オプションの価値は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}[S_T - K]_+; \bigcup_{k=1}^{T}\{C_k > L_k\}\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}[S_T - K]_+; \bigcap_{k=1}^{T}\{C_k \le L_k\}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+; C_1 \le L_1, C_2 \le L_2, \ldots, C_T \le L_T] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}[S_T - K]_+; -C_1 \ge -L_1, -C_2 \ge -L_2, \ldots, -C_T \ge -L_T]\end{aligned}$$

と表すことができる，ここで最右辺の第１項はブラック＝ショールズの公式で計算されることに注意．

５．パラメータの統計的推定

評価モデルにおける諸パラメータについては，

(1) まずは株価の（準）連続時間観測，あるいは離散時間観測によってパラメータ σ_S を推定し，

(2) その後に，離散時間での株価と業績の同時観測により，パラメータ Y_0, μ_Y, σ_Y，そして ρ_{SY} を，原則，最尤推定法によって推定すれば良い．

第３節で導出した価格式の計算に必要なパラメータを，より簡便な統計的手法によって推定することを考える．ここでは，記法の簡単化のため，サンプル期間の第 1 期から第 N 期までの（期末の）株価と業績の組のデータ (X_n, C_n)，$n = 1, 2, \ldots, N$ のみを使って推定するものとする．また，リスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ と自然の（観測）確率測度 $\mathbb{P}$ とのもとでの業績強度過程 $(Y_s, s \ge 0)$，したがって業績過程 $(C_n, n = 1,2, \ldots)$ の確率法則が同一であると仮定する．

まず，株価については，

$$\ln S_n = \ln S_0 e^{X_n} = \ln S_0 + X_n$$

なので，

$$\ln S_n - \ln S_{n-1} = (\ln S_0 + X_n) - (\ln S_0 + X_{n-1}) = X_n - X_{n-1} \sim N\left(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2, \sigma_S^2\right).$$

よって，

$$\Delta X_n\ (=X_n - X_{n-1})\ \text{の平均} = \mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2 = \mu_X,$$

$$\Delta X_n\ (= X_n - X_{n-1})\ \text{の分散} = \sigma_S^2.$$

ここで，一般にデータ $Z_n, n = 1, 2, \ldots, N$ の標本平均を

$$\overline{Z.} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n\,,$$

そして（不偏）分散を

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(Z_n - \overline{Z.})^2$$

で表せば，対数株価収益率の分散の（不偏）推定量は，

$$\widehat{\sigma_S}^2 = \Delta X_n (=X_n - X_{n-1})\text{の分散} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\{\Delta X_n - \overline{\Delta X.}\}^2.$$

また，その平均の推定量は，式（4）$\widehat{\mu_X} = \widehat{\mu_S} - \frac{1}{2}\widehat{\sigma_S}^2$ より，

$$\widehat{\mu_S} = \widehat{\mu_X} + \frac{1}{2}\widehat{\sigma_S}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta X_n + \frac{1}{2}\widehat{\sigma_S}^2.$$

つぎに，業績 C_n，$n = 1, 2, \ldots, N$ については，

$$\mu_C(n) := \mathbb{E}[C_n]$$

とおけば，

$$\mu_C(n) = Y_0 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mu_Y.$$

したがって，μ_Y については，

$$\mathbb{E}[\Delta C_n] = \mathbb{E}[(C_n - C_{n-1})] = Y_0 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mu_Y - Y_0 + \left((n-1) - \frac{1}{2}\right)\mu_Y = \mu_Y$$

が成り立つ．よって，μ_Y の推定量は，

$$\widehat{\mu_Y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta\, C_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(C_n - C_{n-1})$$

とすればよい．

また，業績 C_n，$n = 1, 2, \ldots, N$ の分散と共分散については，

$$\sigma_C^2(n) = \mathrm{Var}[C_n] = \left(n - \frac{2}{3}\right)\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_C(m,n) \coloneqq \mathrm{Cov}[C_m, C_n] = \left(\min\{m,n\} - \frac{1}{2}\right)\sigma_Y^2, \qquad m \neq n.$$

と計算される．

σ_Y^2 の推定量は，業績データ C_n，$n = 1, 2, \ldots, N$ のみに基づいて，原則的に最尤推定法によって求めることを考える．

$\boldsymbol{C} = (C_1, , \dots, C_N)$ は多変量正規分布 $N(\boldsymbol{\mu_C}, \Sigma_{\boldsymbol{C}})$ に従うので，その確率密度関数を

$$f_{\boldsymbol{C}}(c_1, \dots, c_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma_{\boldsymbol{C}}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{\mu_C})^T \Sigma_{\boldsymbol{C}}^{-1} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{\mu_C})\right\}$$

とする，ただし，平均ベクトル $\boldsymbol{\mu_C}$，分散共分散行列 $\Sigma_{\boldsymbol{C}}$ は,

$$\boldsymbol{\mu_C} := \begin{pmatrix} \mu_C(1) \\ \mu_C(2) \\ \vdots \\ \mu_C(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 + \frac{1}{2}\mu_Y \\ Y_0 + \frac{3}{2}\mu_Y \\ \vdots \\ Y_0 + \left(N - \frac{1}{2}\right)\mu_Y \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{\boldsymbol{C}} := \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[C_1] & \mathrm{Cov}[C_1, C_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[C_1, C_N] \\ \mathrm{Cov}[C_2, C_1] & \mathrm{Var}[C_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[C_2, C_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[C_N, C_1] & \mathrm{Cov}[C_N, C_2] & \cdots & \mathrm{Var}[C_N] \end{pmatrix},$$

$$\sigma_C^2(n) = \mathrm{Var}[C_n] = \left(n - \frac{2}{3}\right)\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_C(m, n) \coloneqq \mathrm{Cov}[C_m, C_n] = \left(\min\{m, n\} - \frac{1}{2}\right)\sigma_Y^2.$$

これらを用いて，最尤法によって σ_Y^2 の計算をすれば，σ_Y^2 の推定量は,

$$\widehat{\sigma_Y}^2 = \frac{B}{N}$$

で与えられる，ただし，$\boldsymbol{\mu_C}$ の推定量 $\widehat{\boldsymbol{\mu_C}}$ を用いて,

$$B := (\boldsymbol{C} - \widehat{\boldsymbol{\mu_C}})^T \Sigma_N^{-1} (\boldsymbol{C} - \widehat{\boldsymbol{\mu_C}})$$

と定義する，ここで

$$\Sigma_N := \frac{1}{\sigma_Y^2}\Sigma_{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} & 1 - \frac{1}{2} & \cdots & 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} & 2 - \frac{2}{3} & \cdots & 2 - \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - \frac{1}{2} & 2 - \frac{1}{2} & \cdots & N - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

はパラメータに依存しない $N \times N$ の可逆で対称な正行列である.

また，Y_0 について，ドリフト項と拡散項を除いた業績を

$$C_n' = C_n - \left(n - \frac{1}{2}\right)\mu_Y.$$

とおくと $\mathbb{E}[C_n'] = Y_0$，したがって，“サンプル開始時点の業績強度” Y_0 は下記のように推定される：

$$\widehat{Y_0} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\{C_n - \left(n - \frac{1}{2}\right)\widehat{\mu_Y}\right\}.$$

ストック・オプションの価値評価で用いられる“ストック・オプションの付与時点での業績強度” Y_0' は，推定された“サンプル開始時点の業績強度” $\widehat{Y_0}$ にドリフト係数 $\widehat{\mu_Y}$ と，サンプル開始時点から，ストック・オプションの付与時点までの 2 時点間の実時間長の積を加えたもので推定される．よって，

$$\widehat{Y_0'} := \widehat{Y_0} + \widehat{\mu_Y} \cdot \left\{ \text{サンプル開始時点からストック・オプションの付与時点までの時間長} \right\}$$

とする．

最後に，共分散については，$n, m \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++}$, $n, m\ (n \geq m)$に対して，

$$\sigma_{XC}(n,m) = \mathrm{Cov}[X_n, C_m] = \left(m - \frac{1}{2}\right) \rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y$$

と計算されるので，

$$\rho_{XC}(n,n) := \frac{\sigma_{XC}\,(n,n)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_n]}\sqrt{\mathrm{Var}[C_n]}} = \rho_{SY} \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(n - \frac{2}{3}\right) n}},$$

ただし，

$$\mathrm{Var}[X_n] = n\sigma_S^2;\ \mathrm{Var}[C_n] = \left(n - \frac{2}{3}\right) \sigma_Y^2$$

を用いた．したがって，逆に，

$$\rho_{SY} = \rho_{XC}(n,n) \cdot \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\left(n - \frac{2}{3}\right) n} = \frac{\sigma_{XC}\,(n,n)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_n]}\sqrt{\mathrm{Var}[C_n]}} \cdot \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\left(n - \frac{2}{3}\right) n}$$

と表される．

さて，

$$\sigma_{\Delta X,C} \coloneqq \sigma_{\Delta X,C}(n+1,n) \coloneqq \mathrm{Cov}[\Delta X_{n+1}, C_n] = \mathrm{Cov}[X_{n+1}, C_n] - \mathrm{Cov}[X_n, C_n] = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y,$$

あるいは，

$$\sigma_{X,\Delta C} \coloneqq \sigma_{X,\Delta C}(n,n) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_n, \Delta C_n] = \mathrm{Cov}[X_n, C_n] - \mathrm{Cov}[X_n, C_{n-1}] = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y$$

となり，これらは $n = 1,2,\dots,N$ について一定の定数となる．よって，株価過程と業績強度過程を駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY} は，

$$\rho_{SY} = \frac{\sigma_{\Delta X,C}}{\sigma_S\sigma_Y} \text{ あるいは } \rho_{SY} = \frac{\sigma_{X,\Delta C}}{\sigma_S\sigma_Y}$$

の関係式を用いて推定することが考えられる．

例えば，上記の $\sigma_{\Delta X,C}$ あるいは $\sigma_{X,\Delta C}$ を，簡便に，

$$\widehat{\sigma_{\Delta X,C}} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\{\Delta X_{n+1} - \overline{\Delta X._{+1}}\}\{C_n - \overline{C.}\} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{(X_{n+1} - X_n) - \overline{(X._{+1} - X.)}\right\}\{C_n - \overline{C.}\},$$

あるいは

$$\widehat{\sigma_{X,\Delta C}} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\{X_n - \overline{X.}\}\{\Delta C_n - \overline{\Delta C.}\} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\{X_n - \overline{X.}\}\left\{(C_n - C_{n-1}) - \overline{(C. - C._{-1})}\right\}$$

と推定し，

$$\widehat{\rho_{SY}} = \frac{\widehat{\sigma_{\Delta X,C}}}{\widehat{\sigma_S}\widehat{\sigma_Y}} \quad \text{あるいは} \quad \widehat{\rho_{SY}} = \frac{\widehat{\sigma_{X,\Delta C}}}{\widehat{\sigma_S}\widehat{\sigma_Y}}$$

と推定することもできよう．

６．数値例

実際に業績条件付きストック・オプションを発行した事例を参考に，実際の企業の株価データと業績データを用いた数値例を紹介する．数値例の計算には R ソフトを用いた．

6.1 価格式の計算

価格式の計算にあたって，積分の計算には，数値的評価が必要となるが，ここでは数値積分法を用いることにした．

参考データとして，過去に業績条件付きストック・オプションを役員および従業員に発行している実績のある，東証一部上場企業の株式会社 A のデータを使用した．A 社の発行したストック・オプションの内容は，つぎのようであった．

- 付与対象者：A 社の執行役員ならびに子会社の取締役および従業員
- 新株予約権の払込金額：０円（金銭の払込を要しない）
- 権利行使価格：１円
- 権利行使期間：新株予約権割当日の４年後から１０年間
- 権利行使条件（業績）：権利確定日までのいずれかの事業年度において，連結営業利益が８０億円以上，など

よって，本稿で使用する業績の指標は，A 社にならって営業利益とする．株主が企業を評価する際によく用いられるのは当期純利益であるが，業績条件付きストック・オプションの目的に照らして，当期純利益より売上高や営業利益の方が努力に直結し，インセンティブに繋がると考えられることから，営業利益を指標とするのは妥当であると考える．また，ストック・オプションは，権利行使後に，取得した株式を市場で売買できることが前提であり，株式の市場価値は主に連結業績によると考えられるため，連結年間営業利益のデータを用いることとする．業績のデータは，データベース eol から取得し

た．また，株価については，ヤフーファイナンスより「調整後終値」の週次データを取得し，使用した．

まず，各パラメータをエクセルで計算した．業績条件付きストック・オプションの評価額の算定に必要なパラメータは，σ_S^2，μ_S，μ_Y，σ_Y^2，Y_0の5つであり，すべて年率で，

- $\widehat{\sigma_S}^2 = 0.117076918 \implies \widehat{\sigma_S} = 0.342165044$
- $\widehat{\mu_S} = 0.187104977$
- $\widehat{\mu_Y} = 321.6$
- $\widehat{\sigma_Y} = 2428.22832 \implies \widehat{\sigma_Y}^2 = 5896292.8$
- $\widehat{Y_0} = 3051.2$

ただし，ブラック＝ショールズ・モデルは，リスク中立確率下での価値評価を想定しているため，μ_Sについて，価格式に代入する値は，以下の式によるものとする．

$$\mu_S = r$$

その他のパラメータは，以下とする．業績条件は，A 社のストック・オプションの業績条件が，権利確定日までのいずれかの事業年度における年間営業利益 80 億円以上なので，満期直前の年間営業利益の下限 L を 80 億円とした．また，期間は 10 年のため，単位時間を 1 年間として 10 期間と考える．

- $S_0 = 505$
- $r\ (= \mu_S) = 0.004$
- $\rho_{SY} = 0.128212087$
- $T = 10$
- $K = 1$
- $L = 800$

以上の数値を用いて，R ソフトで業績条件付きストック・オプションの評価額を計算した．実行結果は以下のようになった．

$$P_T = 227.7691$$

A 社のストック・オプションは，払込価額が 0 円という設定だったが，このモデルによる業績条件付きストック・オプションの評価額はおよそ 228 円となっており，モデルが正しいとすれば，当該払込価額は，特に有利な払込価額となる．

ここで，導出した価格式の妥当性を検証するために，ブラック＝ショールズ・モデルによる評価額を計算し，業績条件付きストック・オプション価格式の検算を行った．図 2 のプロット結果から，業績条件 L を$-24{,}000$，積分範囲を$64{,}000$に設定すれば，業績条件はおよそ 100%達成されるときの評価額となり，業績条件が無い場合の評価額と考えることができる．

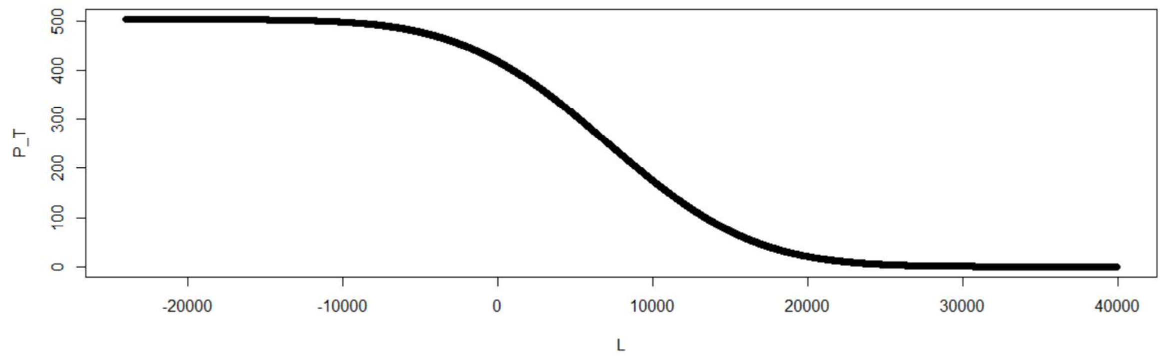

図１：業績条件Lを-24,000 から 40,000 まで変化させたときの P_T のプロット結果

$L = -24{,}000$のときの結果は以下のようになった.

$$P_T = 504.0299$$

一方，同じパラメータの値を入力したブラック＝ショールズの公式による評価額は，以下のようになった.

$$P_T = 504.0392$$

２通りの価格式の計算結果には差異が発生しているが，これは数値積分による誤差が考えられ．しかし，ストック・オプションの評価において，円未満の誤差は無視しても会計的に大きな問題にならない．よって，本稿で導出した業績条件付きストック・オプションの価格式は適切であると言える.

6.2 ρ_{SY}（相関係数）による影響

価格式P_Tへの相関係数ρ_{SY}の影響をプロットした結果はつぎのようになった（図２）.

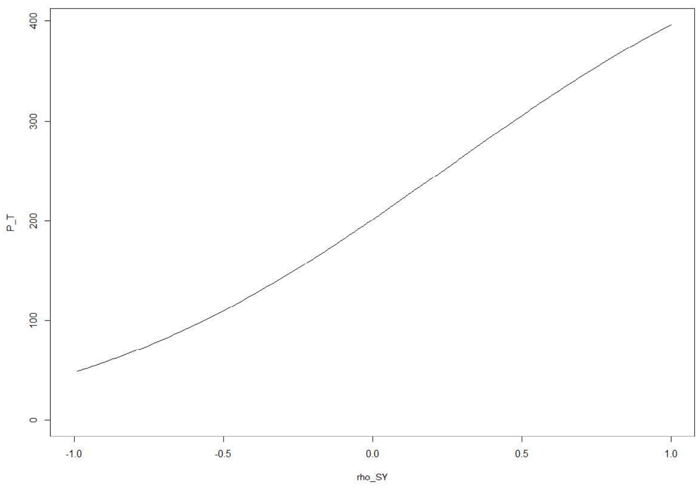

図２：相関係数によるオプション価値への影響

上図から明らかに，相関係数 ρ_{SY} は評価額式 P_T に強い正の影響があることが分かるため，株価と業績は相関があると仮定した価値評価モデルの構築は妥当であったと考えられる．

７．おわりに

今後に残された課題は多い．例えば以下が挙げられる：

(a) モデルの諸パラメータ，とりわけ株価過程と業績強度過程それぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY} は，原理的には最尤推定法により推定できるが，実務的には，より簡便で精密な方法が期待される．

(b) 株価過程と業績強度過程との結合モデルについて，実証研究を通じての，妥当性の検証．

(c) 業績条件が複数期間に渡る場合の価格式の導出，表現，数値的評価の方法の開発．

(d) 本稿は，業績強度過程のストック・オプション付与時点 $t = 0$ での値 Y_0 が未知の確定値としたが，未知の平均と分散を持つ正規確率変数とする拡張．

(e) 業績強度過程をドリフト付きブラウン運動ではなく，他の（少ないパラメータで表現できる）ガウス過程に置き換えての業績条件付きストック・オプションの価格式の導出．とりわけ，業績の安定した企業などでは，平均回帰性を持つバシチェック過程（オルンシュタイン＝ウーレンベック過程）が，より適切なように思われる．

(f) 株価過程と業績強度過程の確率的依存性（確率的因果関係）を，それぞれを駆動する 2 つのブラウン運動の相関のみには依らない形で導入するモデル化の可能性と実証．

参考文献

[1] ウイリス・タワーズワトソン，三菱 UFJ 信託銀行（2017），「株式報酬の導入状況」．https://www.willistowerswatson.com/ja-JP/news/2017/08/Stock-based-compensation-implementation-status-survey.

[2] 椎葉　淳，瀧野一洋（2010），「ストック・オプションの評価誤差：理論・実証研究からの示唆」，名古屋商科大学総合経営・経営情報論集，第 54 巻 2 号，pp. 89-107.

[3] 田中寧々（2020），「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」，大阪大学経済学部，懸賞論文，2020 年 1 月．

[4] 中村慎二（2017），「新しい株式報酬制度の設計と活用ー有償ストック・オプション＆リストリクテッド・ストックの考え方」，中央経済社．

[5] Cvitanić, J., Wiener, Z., and Zapatero, F. (2007), Analytic Pricing of Employee Stock Options, *Review of Financial Studies*, **21** (2), pp. 683-724.

[6] Cvitanić, J. and Zhang, J. (2012), *Contract Theory in Continuous-Time Models*, Springer.

[7] Cvitanić, J. and Zapatero, F. (2004), *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial*

Markets, MIT press.

[8] Hull, J. C. (2015), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th Ed., Pearson.

[9] Hull, J. C. and White, A. (2004), How to Value Employee Stock Options, *Financial Analysts Journal*, **60** (1), pp. 114-119.

[10] Kimura, T. (2010), Valuing Executive Stock Options: A Quadratic Approximation, *European Journal of Operational Research*, **207** (3), pp. 1368-1379.

[11] Kimura, T. (2018), An Approximate Barrier Option Model for Valuing Executive Stock Options, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **61** (1), pp. 110-131.

[12] Müller, A. (2001), Stochastic Ordering of Multivariate Normal Distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53** (3), pp. 567-575.

[13] Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes*, 2nd Ed., Wiley.

[14] Rüschendorf, L. (2013), *Mathematical Risk Analysis: Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios*, Springer.

[15] Tong, Y. L. (1990), *The Multivariate Normal Distribution*, Springer.

[16] Wainwright, M. J. (2019), *High-Dimensional Statistics A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press.

[17] Fujimoto, M. (2018a), 「業績条件付きストックオプションの理論価格」(The Theoretical Value of a Performance-Vested Stock Option) (April 4, 2018).
Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3156048 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3156048

[18] Fujimoto, M. (2018b), The Theoretical Price of a Share-Based Payment with Performance Conditions and Implications for the Current Accounting Standards (June 20, 2018).
Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3199849 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3199849