QUENCHED EXPONENTIAL MIXING FOR RANDOM EXPANDING SEMIFLOWS

（ランダム拡大半流の急冷型指数混合性）

中野 雄史
東海大学 理学部

1. はじめに

本稿では，**拡大写像の懸垂半流**（suspension semiflows of expanding maps；**拡大半流**と略記）と呼ばれる，理想気体の toy model と考えられている力学系について，指数混合性のランダム摂動に関する安定性の結果を報告する．本稿の主結果は本質的には報告者の先行結果（[11]）と類似の議論により示されるため（技術的には様々な修正が必要だが），本稿の意義は問題の定式化にある．この定式化は**急冷型**（quenched）ランダム力学系と呼ばれる比較的新しい枠組み（の自然な拡張）を用いてなされている．そのため，本稿ではこの定式化とその背景の説明に力点を置く．本稿は，S. Lloyd 氏（Xi'an Jiaotong-Liverpool 大）と J. Wittsten 氏（Lund 大）との共同研究をもとにしている．

2. 拡大半流の指数混合性

2.1. **指数混合性．** $(X,\mathcal{G})$ を可測空間，T を $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ または $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ とし，$F : T \times X \to X : (t,x) \mapsto f^t(x)$ を可測写像であって，任意の $t, s \geq 0$ について $f^{t+s} = f^t \circ f^m$ かつ $f^0 = \mathrm{id}_X$ を満たすものとする．$T = \mathbb{Z}_+$ のとき F は離散時間力学系と呼ばれ，$T = \mathbb{R}_+$ のとき F は**半流**（semiflow）または連続時間力学系と呼ばれる．

まず，エルゴード理論におけるいくつかの用語を思い出すこととする．$\mathcal{P}(X)$ を X 上の確率測度全体の空間とし，各 $\mu \in \mathcal{P}(X)$ に対して $L^1(X,\mu)$ を μ-可積分関数全体の空間（ただし通常通り，μ-零集合上でのみ異なる関数たちは同一視）とする．可測写像 $f : X \to X$ と $\mu \in \mathcal{P}(X)$ について，μ の f による push-forward を $f_*\mu$ と書く（つまり，$f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}A)$, $A \in \mathcal{G}$）．

定義 1. $\mu \in \mathcal{P}(X)$ が **F-不変**（invariant）であるとは，任意の $t \in T$ について $(f_t)_*\mu = \mu$ が成り立つことを言う．

F-不変な X 上の確率測度全体の集合を $\mathcal{P}_F(X)$ と書くことにする．このとき，任意の $\mu \in \mathcal{P}_F(X)$ および $\varphi \in L^1(X,\mu)$ に関して $\{\varphi \circ f^t\}_{t\in T}$ は（確率空間 $(X,\mathcal{G},\mu)$ 上の）同分布な確率過程となることに注意したい．さらに，Birkohff のエルゴード定理（cf. [6]）から，その時間平均（統計平均）

$$\overline{\varphi}(x) := \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x) & (T = \mathbb{Z}_+) \\ \displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi \circ f^s(x) ds & (T = \mathbb{R}_+) \end{cases}$$

は μ に関してほとんど全ての x に対して存在する．

定義 2. $\mu \in \mathcal{P}_F(X)$ が**エルゴード的**（ergodic）であるとは，任意の F-不変集合が μ に関して自明であることを言う：任意の $t \in T$, $A \in \mathcal{G}$ について

$$f^{-t}A = A \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0 \text{ または } 1.$$

やはりBirkohffのエルゴード定理から，$\mu \in \mathcal{P}_F(X)$ がエルゴード的であるとき，任意の $\varphi \in L^1(X,\mu)$ に関してその時間平均 $\overline{\varphi}$ は空間平均（期待値）

$$E_\mu[\varphi] = \int_X \varphi d\mu$$

と μ に関してほとんど確実に一致する．言いかえれば，確率過程 $\{\varphi \circ f^t\}_{t\in T}$ について大数の強法則が成立する．

エルゴード性より強い概念として混合性がある．

定義 3. $\mu \in \mathcal{P}_F(X)$ が**混合的**（mixing）であるとは，任意の可測集合 A, B に関して

$$\mu(f^{-t}A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \quad (t \to \infty)$$

となることを言う．

明らかに，$\mu \in \mathcal{P}_F(X)$ が混合的であることと，任意の $\varphi, \psi \in L^1(X,\mu)$ に関して

$$\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(t) := \int_X \varphi \circ f^t \psi d\mu - \int_X \varphi d\mu \int_X \psi d\mu \to 0 \quad (t \to \infty)$$

が成立することは同値である．μ の F-不変性から

$$\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(t) = E_\mu\left[\left(\varphi \circ f^t - E_\mu\left[\varphi \circ f^t\right]\right)\left(\psi - E_\mu\left[\psi\right]\right)\right]$$

なので，$\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(t)$ は2つの確率変数 $\varphi \circ f^t$ と ψ の相関（共分散）を測っていることになる．そのため，$t \mapsto \mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(t)$ は φ, ψ の**相関関数**（correlation function）と呼ばれる．つまり，混合性は任意の観測量 φ, ψ に対して $\varphi \circ f^t$ と ψ が漸近的に無相関になっていくことを意味する．これは力学系の観点からすれば，F が "ランダムさ" を生み出していることを意味し（ないし F がいわゆる "カオス的" な変換であることを意味し），確率論の観点からすれば，確率過程 $\{\varphi \circ f^t\}_{t\in T}$ について種々の極限定理が成立することが期待されることを意味する．

実際，相関関数が指数的に減衰すれば確率過程 $\{\varphi \circ f^t\}_{t\in T}$ の中心極限定理が成立することが知られている（cf. [4]）：

定義 4. $\mu \in \mathcal{P}_F(X)$ に関して，相関関数が指数的に減衰する（または，μ が**指数混合的**である）とは，定数 $\rho \in (0,1)$ が存在して，任意の $\varphi, \psi \in L^1(X,\mu)$ について定数 $C_{\varphi,\psi} > 0$ があって，

$$|\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(t)| \le C_{\varphi,\psi}\rho^t \quad (t \in T)$$

となることを言う．

例 5. 混合的な力学系の典型例は倍角写像の合成

$$f^n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : x \mapsto 2^n x \mod 1 \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

である（$\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mu = \mathrm{Leb}_{\mathbb{S}^1}$）．任意の区間 $A = [a,b] \subsetneq \mathbb{S}^1$ について（$\mathbb{S}^1$ と区間 $[0,1) \subset \mathbb{R}$ を同一視している），$f^{-n}A$ が $f^{-n}A = \bigsqcup_{0\le j\le 2^n-1}[(a+j)/2^n, (b+j)/2^n]$ と $\mathbb{S}^1$ 上に一様に分布していく様子に注意してほしい．より一般に，拡大写像（つまり，X: コンパクトなRiemann多様体，$f: X \to X$: $\mathcal{C}^2$ 級写像であって $\inf_{x\in X}\inf_{v\in T_xX,\,|v|=1}|Df(x)v| > 1$ を満たすもの）について指数混合性が成り立つことが知られている（[2]）．

一方で，混合性が成り立たない（非自明な）典型例は平行移動

$$f^t : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : x \mapsto x + t \mod 1 \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

である．これは，$A \subset \mathbb{S}^1$ について $f^{-t}A = A - t \mod 1$ となることから簡単にわかる（他方で，恒等写像などと違い $\{f^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ はエルゴード的になる; [6]）．

2.2. **拡大半流．** 例 5 の 2 つの力学系の両方の特徴を持つ力学系，つまり拡大的な方向と中立的な方向（平行移動のような方向）の両方を持つ力学系は（3.4 節に紹介するように）数々の重要な例を含む．一方で，その（指数的）混合性の問題は非常に難しい問題であることが知られており（[12]），適切な toy model について理解を深めることが重要になる．

以上の背景から，以下の重要な半流を考える．拡大写像 $E : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ を

$$E(x) = 2x \mod 1 \quad (x \in \mathbb{S}^1)$$

と定め，$\mathcal{C}^r_+(\mathbb{S}^1)$（$r \geq 3$）を $\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ に値を取るような $\mathbb{S}^1$ 上の $\mathcal{C}^r$ 級関数全体の空間とする．各 $\tau \in \mathcal{C}^r_+(\mathbb{S}^1)$ に対して，

$$X := \left\{(x, s) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq s < \tau(x)\right\}$$

とする．

定義 6. $\tau \in \mathcal{C}^r_+(\mathbb{S}^1)$ に対して，$F : \mathbb{R}_+ \times X_\tau \to X_\tau : (t, x, s) \mapsto f^t(x, s)$ を

$$f^t(x, s) = \left(E^{n(x,s+t)}(x), s + t - \tau^{(n(x,s+t))}(x) \mod 1\right),$$

$$\tau^{(n)}(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \tau \circ E^j(x), \quad n(x, u) := \max\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid \tau^{(n)}(x) \leq u\},$$

と定め，（τ を**天井関数**とする）**拡大写像** E **の懸垂半流**（または**拡大半流**）と呼ぶ．

τ が定数関数であるとき，任意の $t \in T$ について $n(x, t)$ は x に依存しなので，f^t は拡大写像 $E^{n(t)}$ と平行移動 $s \mapsto s + t$ の直積となる．したがって，s-方向では F は混合性を持たないため（例 5 参照），F 自体が混合性を持たないことが容易にわかる．そのため，混合性（特に指数混合性）を得るためには，F が “ズレ” を生み出すような（τ の）条件が必要であることがわかる．これを保証してくれる条件が，以下で与えられる横断性条件である．

まず，錐 $\mathscr{K} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\eta| \leq 3\|\tau'\|_{\mathcal{C}^0}|\xi|\}$ は，次の意味で F に関して不変であることに注意する：任意の $z = (x, s) \in X$ に対して，

$$t \geq \tau(x) - s \quad \Rightarrow \quad Df^t(z)(\mathscr{K}) \subsetneq \mathscr{K}.$$

したがって，錐たちの横断性に関する次の量を（$t \mapsto \mathbf{n}(\tau, t)$ が劣乗法的になることから）考えることができる：

$$\mathbf{n}(\tau) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{n}(\tau, t)^{1/t}, \quad \mathbf{n}(\tau, t) = \sup_{z \in X_\tau} \sup_{v \in \mathbb{R}^2,\, |v|=1} \sum_{\zeta \in V(\tau,t;z,v)} \frac{1}{\det Df^t(\zeta)}.$$

ただし，

$$V(\tau, t; z, v) = \left\{\zeta \in X_\tau \mid f^t(\zeta) = z,\ v \in Df^t(\zeta)(\mathscr{K})\right\}.$$

任意の $\tau \in \mathcal{C}^r_+(\mathbb{S}^1)$ について $\mathbf{n}(\tau) \leq 1$ であり，τ が定数関数のとき $\mathbf{n}(\tau) = 1$ となることに注意したい（cf. [12, 10]）．

定義 7. $\tau \in \mathcal{C}^r_+(\mathbb{S}^1)$ が**横断性条件**を満たすとは，$\mathbf{n}(\tau) \neq 1$ となることを言う．

次の重要な事実は，辻井正人によって比較的近年に示された（[12]）：

1. τ が横断性条件を満たすとき，F は指数混合的．
2. 通有的な集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^r_+(\mathbb{S}^1)$ が存在して，任意の $\tau \in \mathcal{U}$ は横断性条件を満たす．

本稿では，横断性条件を満たす拡大半流に対して，ランダムな微小摂動下でも指数混合性が成り立つかどうかを考える．

最後に，（横断性条件を満たす）拡大半流の重要性について議論する．

3. ランダム摂動

3.1. Markov 過程型摂動. 力学系理論の文脈では，ランダム摂動はまず（離散時間力学系に対して）Markov 過程を用いて定式化された（cf. [7, 2]）．$T = \mathbb{Z}_+$ とし，X を距離空間，$\mathcal{G}$ をその Borel σ-加法族とする．$F \equiv \{f^t\}_{t\in T}$ を X の上の離散時間力学系とする．

$m \in \mathcal{P}(X)$ を固定する（不変測度とは限らない）．$\{\Delta_\epsilon\}_{\epsilon>0}$（$\Delta_\epsilon : X \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$）を次の条件を満たす関数族とする．

(1) 任意の $x \in X$ に対して $\Delta_\epsilon(x,\cdot)$ は X 上の確率測度．
(2) 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して $X \ni x \mapsto \Delta_\epsilon(x, A)$ は可測．
(3) 任意の $\varphi \in L^\infty(X, m)$ に対して，

$$\sup_{x\in X}\left|\int_X \varphi(y)\Delta_\epsilon(x, dy) - \varphi(x)\right| \to 0 \quad (\epsilon \to 0).$$

（つまり，$\{\Delta_\epsilon(x,\cdot)\}_{\epsilon>0}$ は δ_x に一様に収束.）

さらに，写像族 $\{P_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, $P_\epsilon : X \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ $(\epsilon > 0)$, を

$$P_\epsilon(x, A) = \Delta_\epsilon(f^1(x), A) \quad ((x, A) \in X \times \mathcal{G})$$

によって定め，これらを遷移確率として持つ（斉時的な，X-値の）Markov 過程の族を $\{\mathcal{X}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$（$\mathcal{X}_\epsilon = \{X_\epsilon(t)\}_{t\in T}$）とする．つまり，$\mathrm{Prob}(X_\epsilon(t+1) \in A \mid X_\epsilon(t) = x) = P_\epsilon(x, A)$ である．

これを用いて，$P_\epsilon : L^\infty(X, m) \to L^\infty(X, m)$ を，

$$P_\epsilon\varphi(x) = \int_X \varphi(y)P_\epsilon(x, dy) \quad (\varphi \in L^\infty(X, m),\ x \in X)$$

と定める．任意の $t \in T$ に対して

$$\lim_{\epsilon\to 0} P_\epsilon^t\varphi = \varphi \circ f^t$$

となることに注意したい．さらに，$P_\epsilon : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を，

$$P_\epsilon\nu(A) = \int_X P_\epsilon(x, A)\nu(dx) \quad (\nu \in \mathcal{P}(X),\ A \in \mathcal{G}) \tag{3.1}$$

と定めると，

$$\int_X P_\epsilon\varphi d\nu = \int_X \varphi d(P_\epsilon\nu), \quad \lim_{\epsilon\to 0} P_\epsilon^t\nu = (f^t)_*\nu$$

となる．また，Markov 過程 $\mathcal{X}_\epsilon = \{X_\epsilon(t)\}_{t\in T}$ の初期分布（つまり，確率変数 $X_\epsilon(0)$ の分布）が ν であるとき，$X_\epsilon(t)$ の分布を ν_t と書くと，

$$\nu_t = P_\epsilon^t\nu$$

となる．

定義 8. 確率測度 μ^ϵ が F_ϵ-**不変**であるとは，$P_\epsilon\mu^\epsilon = \mu^\epsilon$ となることを言う．また，F_ϵ-不変確率測度 μ^ϵ が**指数混合的**であるとは，定数 $\rho \in (0, 1)$ が存在して，任意の $\varphi, \psi \in L^1(X, \mu^\epsilon)$ について定数 $C_{\varphi,\psi} > 0$ があって，

$$|\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(\epsilon; t)| \le C_{\varphi,\psi}\rho^t \quad (t \in T)$$

となることを言う．ただし，

$$\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(\epsilon; t) = \int_X P_\epsilon^t\varphi\psi d\mu^\epsilon - \int_X \varphi d\mu^\epsilon \int_X \psi d\mu^\epsilon.$$

$\{\mu^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ が F-不変確率測度 μ に弱収束し，$\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon>0}, \mu$ が良い性質を持つとき（例えば X が Riemann 多様体でその上の Lebesgue 測度に絶対連続であるなど），F はランダム摂動 $\{F_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ に関して**確率安定**（stochastically stable）であると言われる．確率安定性および指数混合性の安定性は，1980 年代から様々な力学系に対して調べられ，特に拡大写像については任意の形の $\{\Delta_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ についてこれらの安定性が成り立つことが知られている（cf. [2]）．

そのため，拡大半流に対しても指数混合性の安定性を調べたいが，その定式化は自明ではない．近年，拡散型ランダム摂動と呼ばれる，拡散方程式の解を用いた連続時間 Markov 過程による定式化が考えられているが（cf. [5, 8]），本稿ではそれらとは異なる,（Arnold の意味での）ランダム力学系を用いた方法で定式化を行う．

3.2. **RDS 型摂動.** まず,（Arnold の意味での）ランダム力学系の定義を思い出す．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間，$\{\sigma^t\}_{t\in T}$ を Ω 上の離散または連続力学系であって，$\mathbb{P}$ が不変確率測度となるようなものとする．このとき，可測写像 $F : T \times \Omega \times X \to X$ が**ランダム力学系**（random dynamical system; RDS と略）であるとは，任意の $t, s \in T$, $\omega \in \Omega$ に対して

$$f_\omega^{(t+s)} = f_{\sigma^s\omega}^{(t)} \circ f_\omega^{(s)}, \quad f_\omega^{(0)} = \mathrm{id}_X \tag{3.2}$$

を満たすことを言う．ただし，$f_\omega^{(t)} = F(t, \omega, \cdot)$ である．（$\{\sigma^t\}_{t\in T}$ は**ノイズ駆動系**と呼ばれる．）

F を用いて，歪積型の力学系 $\mathbf{F} : T \times (\Omega \times X) \to (\Omega \times X)$ を

$$\mathbf{F}(t, \omega, x) = (\sigma^t\omega, f_\omega^{(t)}(x))$$

によって定めると，$\Omega \times X$ 上の確率測度 μ が $\mathbf{F}$-不変であることと，次は同値な条件となることが知られている（cf. [1]）: X 上の確率測度の族 $\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ が存在して，

(1) 任意の $A \in \mathcal{G}$ について，$\omega \mapsto \mu_\omega(A)$ は可測；
(2) 任意の $\varphi \in L^1(\Omega \times X, \mu)$ について

$$\int_{\Omega\times X} \varphi d\mu = \int_\Omega \left(\int_X \varphi(\omega, x)\mu_\omega(dx) \right) \mathbb{P}(d\omega);$$

(3) 任意の $t \in T$ と $\mathbb{P}$ についてほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について，

$$(f_\omega^{(t)})_*\mu_\omega = \mu_{\sigma^t\omega}.$$

上の (1), (3) を満たす族 $\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset \mathcal{P}(X)$ は，F-**不変**と呼ばれる．

例 9. （前節との関係から）最も重要な RDS の一例は，次で与えられる独立同分布な写像族の合成である：

- $T = \mathbb{Z}_+$；
- 確率空間 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ が存在して，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\widetilde{\Omega}^T, \widetilde{\mathcal{F}}^T, \widetilde{\mathbb{P}}^T)$；
- $\{\sigma^t\}_{t\in T}$: シフト（つまり，$(\sigma^t\omega)_s = \omega_{s+t}$（$\omega = \{\omega_s\}_{s\in T} \in \Omega$, $s \in T$））；
- 可測写像 $\widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \times X \to X$ が存在して，任意の $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega$ について $f_\omega^{(1)} = \widetilde{f}_{\omega_0}$

このとき，任意の $t \in T$, $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega$ について

$$f_\omega^{(t)} = \widetilde{f}_{\omega_{t-1}} \circ \widetilde{f}_{\omega_{t-2}} \circ \cdots \circ \widetilde{f}_{\omega_0}$$

となり，ノイズパラメータ列 $\{\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \mapsto \omega_t\}_{t\in T}$ は独立同分布となる．さらに，

$$P(x, A) = \widetilde{\mathbb{P}}(\{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \mid \widetilde{f}_{\widetilde{\omega}}(x) \in A\})$$

とするとこれは遷移確率となり，これを用いて (3.1) と同様 $P : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を

$$P\nu(A) = \int_X P(x, A)\nu(dx) \quad (\nu \in \mathcal{P}(X),\ \nu \in \mathcal{G})$$

と定めると，

$$P\nu(A) = \int_{\widetilde{\Omega}} (\widetilde{f}_{\widetilde{\omega}})_* \nu(A) d\widetilde{\mathbb{P}} = \int_{\Omega} (f_\omega)_* \nu(A) d\mathbb{P}$$

が成り立つ．その他 RDS の重要な例として確率微分方程式の解などが知られている．より詳しくは Arnold [1] を参照していただきたい．

例 9 より，2.1 節の枠組みはこの意味で “平均化された” 挙動を見ていることになる．そのため，ランダム環境下での確率過程論の用語を借用する形で，定義 3.1 の意味での指数混合性を**徐冷型**（annealed）**指数混合性**と言う．これと対応する形で，やはりランダム環境下での確率過程論を背景として，次の定義が自然と与えられる．

定義 10. $\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ を F_ϵ-不変な，X 上の確率測度の可測な族であるとする．さらに，$\mathbb{P}$ についてほとんど確実に μ_ω はある参照測度 m に絶対連続であるとする．このとき，$\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ が**急冷型**（quenched）**指数混合的**であるとは，定数 $\rho \in (0,1)$ が存在して，任意の $\varphi, \psi \in L^1(X,m)$ と $\mathbb{P}$ についてほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について定数 $C_{\varphi,\psi,\omega} > 0$ があって，

$$|\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(\omega; t)| \le C_{\varphi,\psi,\omega}\rho^t \quad (t \in T)$$

となることを言う．ただし，

$$\mathrm{Cor}_{\varphi,\psi}(\omega;t) = \int_X \varphi \circ f^{(t)}_\omega \psi d\mu_\omega - \int_X \varphi d\mu_{\sigma^t\omega} \int_X \psi d\mu_\omega$$

である．

3.3. **拡大半流のランダム摂動.** RDS（の一般化）を用いて，拡大半流のランダム摂動を定義する．E, τ, F を 2.2 節の通りとする．Ω を距離空間，$\mathcal{F}$ をその Borel σ-加法族とし，$\{\sigma^t\}_{t\in T}$ を Ω 上の半流（$T = \mathbb{R}_+$）であって，任意の $\omega \in \Omega$ について $T \ni t \mapsto \sigma^t\omega$ が連続であるようなものとする．また，$\mathbb{P}$ はエルゴード的な不変確率測度とする．各 $\epsilon > 0$ に対して，$\tau_\epsilon : \Omega \to \mathcal{C}^r_+(\mathbb{S}^1)$ を連続な写像であって，

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} d_{\mathcal{C}^r}(\tau_\epsilon(\omega), \tau) \le \epsilon$$

を満たすものとする．さらに，$X_\epsilon(\omega) = \{(x,s) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \mid 0 \le s < \tau_\epsilon(\omega)(x)\}$ とする．

各 $\omega \in \Omega$ について，$(x,s) \in X_\epsilon(\omega)$ の**到達時間** $N_1(\omega; x, s) \in T$ を，

$$s + t = \tau_\epsilon(\theta^t\omega)$$

を満たす最小の $t \in T$ として定める.（このような $N_1(\omega; x,s)$ が存在することは簡単にわかる：$D(t) = \tau_\epsilon(\theta^t\omega)(x) - s - t$ とすると，$X_\epsilon(\omega)$ の定義から $D(0) > 0$ であり，任意の $t > \operatorname{ess\,sup}_\omega \|\tau_\epsilon(\omega)\|_{\mathcal{C}^0}$ について $D(t) < 0$ となることに注意すればいい.）つまり，ノイズパラメータが ω である相空間 $X_\epsilon(\omega)$ 内の点 (x,s) を出発して，速度 1 で s-方向を登ったとき，時刻 $N_1(\omega; x,s)$ において，ノイズパラメータが $\sigma^{N_1(\omega;x,s)}\omega$ である相空間 $X_\epsilon(\sigma^{N_1(\omega;x,s)}\omega)$ の “天井”$\tau_\epsilon(\sigma^{N_1(\omega;x,s)}\omega)$ に到達する．さらに $N_n(\omega; x, s)$ を帰納的に，

$$N_{n+1}(\omega; x, s) = N_1(\sigma^{N_n(\omega;x,s)}\omega, E^n(x), 0)$$

によって定める．

$t \in T$, $\omega \in \Omega$, $(x,s) \in X_\epsilon(\omega)$ に対して，$f^t_{\epsilon,\omega}(x,s) \in X_\epsilon(\theta^t\omega)$ を

$$f^t_{\epsilon,\omega}(x,s) = (E^{n(t,\omega,x,s)}(x), s + t - \tau^{(t)}_{\epsilon,\omega}(x,s),$$

$$n(t,\omega,x,s) = \max\{n \ge 1 \mid N_n(\omega;x,s) \le t\}, \quad \tau^{(t)}_{\epsilon,\omega}(x,s) = \sum_{j=0}^{n(t,\omega,x,s)-1} \tau_\epsilon(\sigma^{N_j(\omega;x,s)}\omega)(E^j(x))$$

と定める．このとき，(3.2) が成り立つことを簡単に確かめることができる．

最後に，本稿における主結果を述べる：

定理 11. τ は横断性条件を満たすとする．このとき，任意の十分小さい $\epsilon \geq 0$ に対して，唯一つの F_ϵ-不変な，確率測度の可測な族 $\{\mu_\omega^\epsilon\}_{\omega\in\Omega}$ が存在する．また，$\mathbb{P}$ に関してほとんど確実に μ_ω は $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+$ 上の Lebesgue 測度 m に絶対連続であって，その台は $X_\epsilon(\omega)$ と一致する．さらに，$\{\mu_\omega^\epsilon\}_{\omega\in\Omega}$ は急冷型指数混合性を持つ．

3.4. **議論：撞球系との関係.** 撞球系（billiard systems）は，気体運動論とも関連の深い，伝統的な（連続時間）力学系である．特に散逸型の撞球系（つまり，$\mathbb{R}^2$ 上に有限個の凸有界領域 $O_1, \ldots, O_J$, $L \geq 3$, が存在して，$X = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^J O_j$ 内を粒子が速度 1 で運動し，境界 $\bigcup_{j=1}^J \partial O_j$ では完全弾性衝突するような系）については多くの研究がなされている．特に，次の結果が盛田健彦によって示されている（[9]）：

- 非月蝕条件を満たす散逸型撞球系は，Markov サブシフトの懸垂流れと同型であり，その天井関数は定数関数に cohomologous でない．

詳しい定義などについては [9] などを参照していただきたいが，Markov サブシフトは拡大写像と非常に類似の統計的性質を持つ，よく理解されているカオス力学系の 1 つであり（[6]），また天井関数が定数関数に cohomologous でないことは（2 節の）横断性条件と同値であることが知られている（[12]）.

この同型関係における懸垂流れの天井関数は，撞球系においてはおおよそ境界 $\bigcup_{j=1}^J \partial O_j$ の "形状" に対応しており，本稿のように天井関数がランダムに変化する懸垂流れを考えると言うことは，ランダムな境界を持つ散逸型撞球系を考えることに対応する．このようなランダム力学系は（ランダムな撞球系の研究は Namb [3] など色々とあるが）報告者の知る限り現在のところ研究されておらず，一方で，この境界たちが理想気体モデルでは分子の "縁" を意味することを考えると，このようなランダム力学系を考えることは自然かつ重要になると思われる．

現在報告者たちは，本稿での内容（技術）をもとにして,「ランダム境界を持つ散逸型撞球系」の統計的性質を研究中である．

References

[1] L. Arnold, *Random dynamical systems*, Springer, 1998.

[2] C. Bonatti, L. Díaz, M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective*, Springer Science & Business Media, 2006.

[3] K. Dingle, J. Lamb, J. Lázaro-Camí, Knudsen's law and random billiards in irrational triangles, Nonlinearity **26** (2012), 369.

[4] R. Durrett, *Probability: theory and examples*, Cambridge university press, 2019.

[5] S. Dyatlov, M. Zworski, Stochastic stability of Pollicott–Ruelle resonances, Nonlinearity (2015), 3511.

[6] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge university press, 1997.

[7] Y. Kifer, *Random perturbations of dynamical systems*, World Scientific, 1988.

[8] R. Metzger, C. Morales, Stochastic stability of sectional-Anosov flows, arXiv preprint arXiv:1505.01761, (2015).

[9] T. Morita, The symbolic representation of billiards without boundary condition, Transactions of the American Mathematical Society **325** no. 3 (1991), 819–828.

[10] Y. Nakano, M. Tsujii, J. Wittsten, The partial captivity condition for U(1) extensions of expanding maps on the circle, Nonlinearity **29** (2016), 1917.

[11] Y. Nakano, J. Wittsten, On the spectra of quenched random perturbations of partially expanding maps on the torus, Nonlinearity **28** (2015), 951–1002.

[12] M. Tsujii, Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps, Ergodic Theory and Dynamical Systems **28** (2008), 291–317.