Markov operator cocycle の漸近的周期性

北見工業大学・工学部　中村 文彦
Fumihiko Nakamura
Department of engineering, Kitami Institute of Technology

東海大学・理学部　中野 雄史
Yushi Nakano
Department of Mathematics, Tokai University

本稿は，Lasota-Li-Yorke [2] および Komorník [3] によって示された「収斂的 (constrictive) マルコフ作用素は，漸近周期的 (asymptotically periodic) である.」という命題を，ランダム力学系の性質として拡張した結果 [1] について，定理を証明するための条件や設定をまとめたものである．

$(X, \mathcal{G}, m)$ を確率空間とし，$L^1(X,m)$ を X 上の m 可積分関数全体の集合，　$L^1_+(X,m) := \{f \in L^1(X,m) \mid f \geq 0\ m\text{−a.e.}\}$, $D(X,m) := \{f \in L^1_+(X,m) \mid \|f\|_m = 1\}$ とする．$D(X,m)$ の元は密度関数と呼ばれる．有界線形作用素 $P : L^1(X,m) \to L^1(X,m)$ がマルコフ作用素であるとは，

- $f \in L^1(X,m)$ かつ $f \geq 0$ m-a.e. ならば，$Pf \geq 0$ m-a.e. （正値性）
- $f \in L^1(X,m)$ かつ $f \geq 0$ m-a.e. ならば，$\|Pf\|_m = \|f\|_m$ （ノルム不変性）

が成り立つときを言う．そして，マルコフ作用素 P が漸近周期的 (asymptotically periodic) とは，ある自然数 $r \geq 1$, 密度関数の列 $\{g_i\}_{i=1}^r \subset D(X,m)$, 有界線形汎関数の列 $\{\lambda_i : L^1(X,m) \to \mathbb{R}\}_{i=1}^r$, さらに $\{1, \cdots, r\}$ の置換 ρ が存在して，

(i) $i \neq j$ ならば，$m(\mathrm{supp} g_i \cap \mathrm{supp} g_j) = 0$,

(ii) すべての $i = 1, \cdots, r$ に対して，$Pg_i = g_{\rho(i)}$,

(iii) 任意の $f \in L^1(X)$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\| P^n f - \sum_{i=1}^r \lambda_i(f) g_{\rho(i)} \right\|_m = 0$,

が成り立つときを言う．これをランダム力学系の性質として拡張する．

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, $\sigma : \Omega \to \Omega$ を $\mathbb{P}$-保測な変換とする．可測空間 Σ に対して，可測写像 $\Phi : \mathbb{N}_0 \times \Omega \times \Sigma \to \Sigma$ が σ を駆動系とする Σ 上のランダム力学系であるとは，

$$\varphi_\omega^{(n+m)} = \varphi_{\sigma^m\omega}^{(n)} \circ \varphi_\omega^{(m)}, \quad \varphi_\omega^{(0)} = \mathrm{id}_\Sigma$$

がすべての $m, n \in \mathbb{N}_0$ と $\omega \in \Omega$ について成り立つときをいう．ただし，$\varphi_\omega^{(n)} = \Phi(n, \omega, \cdot)$, $\sigma\omega = \sigma(\omega)$ である．このランダム力学系に対する一般論については [4] を参照せよ．定義からすぐに，

$$\varphi_\omega^{(n)} = \varphi_{\sigma^{n-1}\omega} \circ \varphi_{\sigma^{n-}\omega} \circ \cdots \circ \varphi_\omega \tag{1}$$

であることがわかる．逆に，可測写像 $\varphi : \Omega \times \Sigma \to \Sigma : (\omega, x) \mapsto \varphi_\omega(x)$ に対し，(1) で定義される可測写像 $(n, \omega, x) \mapsto \varphi_\omega^{(n)}(x)$ はランダム力学系となる．これを σ 上で φ によって誘導されるランダム力学系と呼び，(φ, σ) と表すことにする．特に，Σ がバナッハ空間で，$\varphi_\omega : \Sigma \to \Sigma$ がほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して線形作用素であるとき，(φ, σ) は Linear operator cocycle と呼ばれる．

定義 1. $\mathbb{P}$-保測な変換 $\sigma : \Omega \to \Omega$ 上で，可測写像 $P : \Omega \times L^1(X, m) \to L^1(X, m)$ から誘導される Linear operator cocycle (P, σ) が Markov operator cocycle であるとは，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，$P_\omega = P(\omega, \cdot) : L^1(X, m) \to L^1(X, m)$ がマルコフ作用素であるときをいう．

以下の記号を導入し，Markov operator cocycle に対する漸近的周期性を定義する．

- $M(\Omega, E)$: Ω から可測空間 E への可測写像全体の集合
- $(L^1(X, m))'$: $L^1(X, m)$ の双対空間

定義 2. Markov operator cocycle (P, σ) が漸近周期的 (asymptotically periodic) とは，ある自然数 $r \geq 1$, 二つの写像の族 $\{g_i\}_{i=1}^r \subset M(\Omega, D(X, m))$ と $\{\lambda_i\}_{i=1}^r \subset M(\Omega, (L^i(X, m))'))$, さらに $\{1, \cdots, r\}$ の置換 ρ が存在し，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，

(i) $i \neq j$ ならば，a.e. $\omega \in \Omega$ に対して，$m(\mathrm{supp} g_i^\omega \cap \mathrm{supp} g_i^\omega) = 0$

(ii) すべての $i = 1, \cdots, r$ と a.e. $\omega \in \Omega$ に対して，$\mathcal{L}_\omega g_i^\omega = g_{\rho(i)}^{\sigma\omega}$

(iii) 任意の $f \in L^1(X, m)$ と a.e. $\omega \in \Omega$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\| \mathcal{L}_\omega^{(n)} \left(f - \sum_{i=1}^r \lambda_i^\omega(f) g_i^\omega \right) \right\|_m = 0$

が成り立つ時をいう．

次に，Markov operator cocycle に対する弱収斂性を定義する．

定義 3. Markov operator cocycle (P, σ) が弱収斂的 (weakly constrictive) とは，ある可測写像 $F : \Omega \to \mathcal{S}(L^1(X, m))$ が存在し，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して $F_\omega = F(\omega)$ は $L^1(X, m)$ の弱プレコンパクトな部分集合であり，さらに任意の可測写像 $f : \Omega \to D(X, m)$, $\omega \mapsto f_\omega$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} \inf_{g\in F_{\sigma^n\omega}} \|\mathcal{L}_\omega^{(n)} f_\omega - g\|_m = 0$$

が成り立つ時をいう．ただし，$\mathcal{S}(L^1(X, m))$ は $L^1(X, m)$ の空でない部分集合である．

ここで，集合 $A \subset L^1(X, m)$ が弱プレコンパクトとは，任意の関数列 $\{f_n\}_{n\geq1} \subset A$ に対して，ある収束部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\geq1}$ が存在して，その極限 f_* が $f_* \in L^1(X, m)$ となるときをいう．
主定理が成り立つためには $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, P, \sigma)$ に対してさらに，以下の仮定が必要となる．

(C1) Ω は距離空間であり，連結空間である．

(C2) $\sigma : \Omega \to \Omega$ は同相写像であり，極小（minimal: σ によるすべての軌道が Ω 内で稠密）である．

(C3) $P : \Omega \times L^1(X, m)$ は強連続（任意の $f \in L^1(X, m)$ に対して，$\omega \mapsto P_\omega f$ が連続）である．

(C4) ある連続写像 $h : \Omega \to D(X, m)$ と定数 $C > 0$ が存在し，

$$P_\omega h_\omega = h_{\sigma\omega}, \quad \|h_\omega\|_{L^\infty(X,m)} < C$$

がすべての $\omega \in \Omega$ について成り立つ．

定理 4. 仮定 *(C1)-(C4)* を満たす弱収斂的な *Markov operator cocycle* は漸近周期的である．

一般に，Markov operator cocycle が漸近周期的であれば弱収斂性が導出されるので，(C1)-(C4) の仮定の下では，これらの性質は同値となる．また，仮定 (C1) の Ω の連結性は，一見不自然に見えるかもしれないが，本質的な仮定であることを注意しておく（[1] 参照）．

References

[1] F. Nakamura, Y. Nakano. "Asymptotic periodicity of Markov operators in random environments". (In preparation)

[2] Lasota, A., T-Y. Li, and J. A. Yorke. "Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators." Transactions of the American Mathematical Society 286.2 (1984): 751-764.

[3] Komorník, Jozef. "ASYMPTOTIC PERIODICITY OF THE ITERATES OF WEAKLY CONSTRICTIVE MARKOY OPERATORS." Tohoku Mathematical Journal, Second Series 38.1 (1986): 15-27.

[4] Arnold, Ludwig. "Random dynamical systems." Dynamical systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. 1-43.