離散時間幾何 TASEP における KPZ 固定点について

千葉大学大学院 融合理工学府　新井裕太
Yuta Arai
Graduate School of Science and Engineering,
Chiba University

1　序

相互作用粒子系や界面成長模型において, ある種の量に着目すると, 空間 1 次元の場合ゆらぎは時間の $\frac{1}{3}$ 乗で成長するといったモデルの詳細に寄らない性質 (普遍性) に注目が集まっている. この普遍性を持つモデルを総称して Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) クラスと呼ぶ.

1 次元非対称単純排他過程 (ASEP) は 1 次元格子上を多数の粒子が非対称なランダムウォークをする相互作用粒子系である. 特に粒子が一方向にしかジャンプしないものを 1 次元完全非対称単純排他過程 (TASEP) と呼ぶ. 上記の TASEP は一般的に可解な構造を持っていることが知られており, 実際に計算できるモデルであるため, KPZ クラスの性質を調べる上で重要なモデルである. そのため, TASEP において, 粒子の位置に関する分布 (または粒子の位置を表す確率変数から定義できる高さ関数の分布) の極限分布に現れる普遍性 (KPZ 固定点) を観る研究が盛んに行われている. 代表的な先行研究として, 2000 年の Johanson[3] の step 初期条件下における 1 点の分布の極限分布に関する結果や 2005 年の笹本 [6] の periodic 初期条件下における多点の分布の極限分布に関する結果などが挙げられる. 上記に挙げた結果は特別な初期条件下における結果であるが, 近年, Matetski, Quastel, Remenik[4] によって初期条件に関して拡張が行われ, 連続時間 TASEP の場合に任意の特定の初期条件下における多点の分布の極限分布に関する結果が出されている.

本稿では, 離散時間幾何 TASEP の場合に任意の特定の初期条件下において, 多点の分布の極限分布が得られるという論文 [1] の結果を紹介する.

2　準備

2.1　記号

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ とし, $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする. $p \in (0,1)$ とする. $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ において, $X_t(i)$ を時刻 t における i 番目の粒子の位置とする. $\widehat{g} : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$, $\widehat{h} : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ とするとき, $\mathrm{hypo}(\widehat{h}) = \{(x,y) : y \leq \widehat{h}(x)\}$, $\mathrm{epi}(\widehat{g}) = \{(x,y) : y \geq \widehat{g}(x)\}$ とする. RW_m を $\mathrm{Geom}[\frac{1}{2}]$ で左にジャンプするランダムウォークとし, $\tau = \min\{m \geq 0 : RW_m > X_0(m+1)\}$ を停止時刻とする.

2.2 離散時間幾何 TASEP

本稿では, $\mathbb{Z}$ 上で, 並列更新する離散時間幾何 TASEP を考える. 任意の時刻 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ において, 各サイトには 1 つの粒子しか存在できないものとする. $\eta = \{\eta(x) : x \in \mathbb{Z}^d\} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ を粒子の配置とする. そのとき, TASEP はマルコフ過程で,

$$\eta_x = \begin{cases} 1 & (\text{粒子がサイト } x \text{ に存在する}), \\ 0 & (\text{粒子がサイト } x \text{ に存在しない}) \end{cases}$$

である.

$t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $j \in \mathbb{Z}$ において, $X_t(j) = a_j$ とする. そのとき, 時刻 $t+1$ において, 系は時刻 t の状態から以下のような並列更新のルールによって確率的に発展する: 任意の $1 \leq i \leq N$ において,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{t+1}(i) = a_i + a | X_t(i) = a_i,\ X_t(i-1) = a_{i-1}) \\ &\qquad = \begin{cases} p^a(1-p) & \text{for } a = 0, 1, \ldots, a_{i-1} - a_i - 2, \\ p^a & \text{for } a = a_{i-1} - a_i - 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

ただし, この更新は任意の i と t において独立であるとする. ここで, この TASEP のダイナミクスが粒子位置のオーダーを保つことに注意する. そのため, 時刻 $t \geq 0$ において, 粒子の位置を

$$\cdots < X_t(2) < X_t(1) < X_t(0) < X_t(-1) < X_t(-2) < \cdots$$

で表すこととし, 状態空間に $\pm\infty$ を加えたときは, $\pm\infty$ にある粒子はダイナミクスに関与しないものとする.

ここで, TASEP の高さ関数を導入する. $X_t^{-1}(u) = \min\{k \in \mathbb{Z} : X_t(k) \leq u\}$ とすると, $z \in \mathbb{Z}$ において, TASEP の高さ関数は

$$h_t(z) = -2(X_t^{-1}(z-1) - X_0^{-1}(-1)) - z$$

で与えられる.

Remark 1. この節で紹介した並列更新する幾何 TASEP は [8] の論文が出て以降よく研究され始めたモデルとして知られている.

3 主結果

まず最初に離散時間幾何 TASEP の粒子の推移確率が行列式を用いて表せることを見る.

Proposition 1. ([1]) 推移確率は以下のような行列式構造を持つ;

$$\mathbb{P}(X_t = \vec{x} | X_0 = \vec{y}) = \det[F_{i-j}(x_{N+1-i} - y_{N+1-j}, t)]_{1 \leq i,j \leq N}. \tag{1}$$

ただし, $\vec{x}, \vec{y} \in \{z_N < z_{N-1} < \cdots < z_1\} \subset \mathbb{Z}^d$ であり,

$$F_n(x,t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} \left(\frac{1-p}{1-pw}\right)^t. \tag{2}$$

である. また, $\Gamma_{0,1}$ は $0, 1$ 周りを反時計回りに回るループで他の極を含まないものとする.

Remark 2. 上記の命題は並列更新する離散時間幾何 TASEP が可解な構造を持つ (実際に計算できるモデルである) ことを示した命題となっている. 連続時間 TASEP 及び逐次更新するベルヌーイ TASEP の粒子の推移確率が行列式を用いて表せることは論文 [7] において示されている.

次に, 離散時間幾何 TASEP の粒子の位置に関する分布が以下のようにフレドホルム行列式の形で与えられることを紹介する.

Theorem 2. (Discrete time geometric TASEP formula for right-finite initial data [1]).
$j \le 0$ で $X_0(j) = \infty$ であると仮定する. そのとき, $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_M$ と $t > 0$ において,

$$\mathbb{P}(X_t(n_j) > a_j, j = 1, \ldots, M) = \det(I - \overline{\chi}_a K_t \overline{\chi}_a)_{\ell^2(\{n_1,\ldots,n_M\}\times\mathbb{Z})}$$

となる. ただし, $\overline{\chi}_a(n_j, x) := \mathbf{1}_{x \le a_j}$ で, カーネル K_t は

$$K_t(n_i, \cdot; n_j, \cdot) = -Q^{n_j - n_i}\mathbf{1}_{n_i < n_j} + (S_{-t,-n_i})^* \overline{S}^{\mathrm{epi(X_0)}}_{-t,n_j}$$

である. また, 上記のカーネルに出てくる関数は

$$Q^m(x,y) = \frac{1}{2^{x-y}}\binom{x-y-1}{m-1}\mathbf{1}_{x \ge y+m},$$

$$S_{-t,-n}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0} dw \frac{(1-w)^n}{2^{z_2-z_1}w^{n+1+z_2-z_1}}\left\{1 - \frac{2p}{2-p}(w-\frac{1}{2})\right\}^{-t},$$

$$\overline{S}_{-t,n}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0} dw \frac{(1-w)^{z_2-z_1+n-1}}{2^{z_1-z_2}w^n}\left\{1 + \frac{2p}{2-p}(w-\frac{1}{2})\right\}^{t},$$

$$\overline{S}^{\mathrm{epi(X_0)}}_{-t,n}(z_1,z_2) = \mathbb{E}_{RW_0 = z_1}\left[\overline{S}_{-t,n-\tau}(RW_\tau, z_2)\mathbf{1}_{\tau < n}\right].$$

であり, Γ_0 は 0 周りを反時計回りに回るループで他の極を含まないものとする.

Remark 3. Proposition 1 から Theorem 2 を導出する際には論文 [2] 及び [4] の手法が用いられている. ただし, 上記の 2 つの論文が連続時間 TASEP をモデルとして扱っており, 離散時間モデルを扱った場合と異なる部分があることを注意する. (連続時間 TASEP の場合の証明に関しては [5] を, 離散時間 TASEP の場合の証明に関しては [1] を参照).

ここで, 高さ関数の KPZ 1:2:3 scaling limit を考える:

$$\widehat{h}(\mathbf{t},\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t},\mathbf{x}),\ \text{ただし}\ \widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t},\mathbf{x}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[h_{\frac{(2-p)^3}{4p(1-p)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t}}(2\varepsilon^{-\frac{2}{2}}\mathbf{x}) + \frac{2-p}{2(1-p)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t}\right].$$

UCトポロジーにおいて(UC及びLCに関しては[4]の定義を参照), 分布の意味で$\widehat{h}_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{h}^{\varepsilon}(0,\cdot)$が成り立つように$\varepsilon$に依存する初期データ$X_0^{\varepsilon}$を取る. また, $X_0^{-1}(-1) = 1$であるとする. そのとき, UCにおいて, 分布の意味で

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}(X_0^{\varepsilon}(\varepsilon^{-1}x) + 2\varepsilon^{-1}x - 1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\widehat{h}_0(-x) \tag{3}$$

が成り立つ.

ここで, 以下のようなスケーリングを考える.

$$t = \frac{(2-p)^3}{4p(1-p)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t},\ n_i = \frac{2-p}{4(1-p)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t} - \varepsilon^{-1}\mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\mathbf{a}_i + 1,\ a_i = 2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}_i - 2. \tag{4}$$

このとき, $\mathbf{t} > 0$を固定すると以下が得られる.

Theorem 3. (Pointwise convergence for the discrete time geometric TASEP [1]). スケーリング(4)の元でLCにおいて(3)が成り立つとし, $z = -\frac{p(2-p)}{4(1-p)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t} + 2\varepsilon^{-1}\mathbf{x} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(u+\mathbf{a}) - 2$, $y' = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}v$とする. そのとき, $\mathbf{t} > 0$において, $\varepsilon \to 0$とすると, pointwiseの意味で

$$\mathbf{S}^{\varepsilon}_{-t,x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}S_{-t,-n}(y^{'}, z) \to \mathbf{S}_{-\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)$$

$$\overline{\mathbf{S}}^{\varepsilon}_{-t,-x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\overline{S}_{-t,n}(y^{'}, z) \to \mathbf{S}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}}(v,u)$$

$$\overline{\mathbf{S}}^{\varepsilon,\mathrm{epi}(-h_0^{\varepsilon,-})}_{-t,-x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\overline{S}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n}(y^{'}, z) \to \mathbf{S}^{\mathrm{epi}(-\widehat{h}_0^{-})}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}}(v,u)$$

が成り立つ. ただし, $x \geq 0$において, $\widehat{h}_0^{-}(x) = \widehat{h}_0(-x)$で,

$$\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u) = \mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v-u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\langle} dw\, e^{\frac{\mathbf{t}}{3}w^3 + xw^2 - (v-u)w} = \mathbf{t}^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{2\mathbf{x}^3}{3\mathbf{t}^2} - \frac{(v-u)\mathbf{x}}{\mathbf{t}}}\mathrm{Ai}(-\mathbf{t}^{-\frac{1}{3}}(v-u) + \mathbf{t}^{-\frac{4}{3}}\mathbf{x}^2),$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{epi}(\widehat{g})}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u) = \mathbb{E}_{B(0)=v}[\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}}(B(\boldsymbol{\tau}),u)\mathbf{1}_{\boldsymbol{\tau}<\infty}] = \int_0^{\infty}\mathbb{P}_{B(0)=v}(\boldsymbol{\tau}\in d\mathbf{s})\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\mathbf{s}}(B(\boldsymbol{\tau}),u)$$

であるとする.

ここで, $\langle$は0を通り$e^{-\frac{i\pi}{3}}\infty$から$e^{\frac{i\pi}{3}}\infty$へ向かう向き付けられた積分路でAiはAiry関数で$\mathrm{Ai}(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\langle} dw\ e^{\frac{1}{3}w^3 - zw}$と表されるものである. また, $B(x)$は拡散係数2のブラウン運動で$\boldsymbol{\tau}$は関数$\widehat{g}$のエピグラフへの到達時刻である.

次に上記のPointwise convergenceを使うことで以下の結果が得られる.

Theorem 4. (One-sided fixed point formula for the discrete time geometric TASEP [1]). $\widehat{h}_0 \in \mathrm{UC}$とし, $\mathbf{x} > 0$で$\widehat{h}_0(\mathbf{x}) = -\infty$であるとする. そのとき, $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 < \cdots < \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}$とすると,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}_{\widehat{h}_0^{\varepsilon}}(\widehat{h}^{\varepsilon}(\mathbf{t},\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{a}_1, \ldots, \widehat{h}^{\varepsilon}(\mathbf{t},\mathbf{x}_m) \leq \mathbf{a}_m) = \det\left(\mathbf{I} - \chi_{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}\chi_{\mathbf{a}}\right)_{L^2(\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\}\times\mathbb{R})}$$

が得られる. ただし, カーネルは

$$\mathbf{K}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}(\mathbf{x}_i, v; \mathbf{x}_j, u) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi(x_j - x_i)}}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{4(x_j - x_i)}\right)\mathbf{1}_{\mathbf{x}_i<\mathbf{x}_j} + \left(\mathbf{S}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0^{-})}_{\mathbf{t},-\mathbf{x}_i}\right)^{*}\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}_j}(v,u),$$

で, カーネルに含まれる関数は

$$\mathbf{S}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h})}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)=\mathbb{E}_{B(0)=v}[\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}'}(B(\boldsymbol{\tau}'),u)\mathbf{1}_{\boldsymbol{\tau}<\infty}]=\int_0^\infty\mathbb{P}_{B(0)=v}(\boldsymbol{\tau}'\in d\mathbf{s})\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\mathbf{s}}(B(\boldsymbol{\tau}'),u)$$

である. また, $B(x)$ は拡散係数 2 のブラウン運動で $\boldsymbol{\tau}'$ は関数 $\widehat{h}$ のハイポグラフへの到達時刻である.

Remark 4. 上記の定理は連続時間 TASEP の場合 [4] も逐次更新する離散時間ベルヌーイ TASEP の場合 [1] も成り立つ. そもそもこの研究は中心極限定理のような普遍性を観る研究であり, 上記の定理は並列更新する離散時間幾何 TASEP が KPZ 固定点を持つことを意味している.

参考文献

[1] Y. Arai, The KPZ fixed point for discrete time TASEPs, *J. Phys. A*, **53**, 415202, (2020).

[2] A. Borodin, P. L.Ferrari, M. Prähofer, T. Sasamoto, Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration, *J. Stat. Phys.*, **129**, 1055-1080, (2007).

[3] K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, *Comm. Math. Phys.*, **209**, 437-476, (2000).

[4] K. Matetski, J. Quastel, D. Remenik, The KPZ fixed point, arXiv:1701.00018, (2017).

[5] J. Quastel, K. Matetski, From the totally asymmetric simple exclusion process to the KPZ fixed point, arXiv:1710.02635, (2017).

[6] T. Sasamoto, Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate, *J. Phys. A*, **38**, 549-556, (2005).

[7] G. M. Schütz, Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process, *J. Stat. Phys.*, **88**, 427-445, (1997).

[8] J. Warren, P. Windridge, Some Examples of Dynamics for Gelfand-Tsetlin Patterns, *Electron. J. Probab.*,**14**, 1745-1769, (2009).