On free extreme value distributions

一関工業高等専門学校 未来創造工学科 総合科学自然科学領域　植田 優基
Yuki Ueda
Department of General Science,
National Institute of Technology, Ichinoseki College

1　序

量子物理学の数学的研究は, 物理量を非可換な作用素として解釈する数理モデルを主に扱うことで進められてきた. また量子物理は古典物理と違い, 実験での観測量 (状態) は「重ね合わせ」と呼ばれる状態の線型結合で表現されており, このことを理解するには確率論的な議論が必要となる. かなり大雑把だが, 非可換確率論とは, 量子物理学の数理モデル (非可換な量を扱うモデル) の中で, とくに確率論の部分を強調した理論であると言える.

一方, 非可換確率論の一種である自由確率論は, そういった量子物理学の世界から一旦離れ, 群や (作用素) 代数の自由積を理解する上で相性の良い確率論として, Voiculescu によって 1980 年代に提唱された. このため, 自由確率論はより純粋数学を意識した非可換確率論[1]であると言える.

非可換確率論では, 非可換な作用素のことを確率変数と呼んでいるのだが, 通常の確率論の時と同様, 「独立性」が重要な概念となってくる. ここで「非可換確率論における独立性とは何か」という疑問をもたれると思うが, そのことについては本稿では触れないことにし, 非可換確率論の場合には, 複数の「独立性」の概念があることだけを述べておく. 自由確率論は「自由独立性」と呼ばれる確率変数の独立性が基となっている. その他にも代表的なものとして「ブール独立性」や「単調独立性」などがあり, それぞれを基にした非可換確率論は「ブール確率論」や「単調確率論」などと呼ぶこともある.

本稿では, 確率論で知られている極限定理やその極限分布 (無限分解可能分布や極値分布) を自由確率論やブール確率論でも定式化できることを説明し, その中で得られた研究結果である [16] について解説する.

[1] しかし最近では, 量子情報理論や機械学習といった場面でも自由確率論が現れており, 応用面においても注目されている. また [21] ではランダム行列との密接な関係についても言及されており, 現在もなお, ランダム行列の固有値解析などに自由確率論が用いられている.

2　自由確率論とブール確率論

この節では自由確率論とブール確率論に関する基礎事項をざっくり解説する．自由確率論に関する入門的な教科書は [9], 日本語による詳しいサーベイは [7] を参照していただきたい．

2.1　非可換確率論

$\mathcal{M}$ を単位元 $1_{\mathcal{M}}$ をもつ $\mathbb{C}$ 上の $*$-代数[2]とする．また, $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ を状態[3]とする．このとき, 組 $(\mathcal{M}, \varphi)$ を代数的確率空間という．とくに $\mathcal{M}$ が積に関して非可換な代数である場合, 組 $(\mathcal{M}, \varphi)$ を**非可換確率空間**と呼ぶことがある．また, $\mathcal{M}$ の要素のことを (非可換) 確率変数という．さらに $X \in \mathcal{M}$ に対して, 値 $\varphi(X)$ が存在する時, この値を X の期待値という．

$\mathcal{M}$ を von Neumann 環 (ある Hilbert 空間上の有界線形作用素全体の部分*-代数で, 強作用素位相で閉じているもの) とする．確率変数 $X \in \mathcal{M}$ が自己共役 $(X^* = X)$ であるとき, そのスペクトル分解を E_X で表すとき,

$$\mu_X(B) := \varphi(E_X(B)), \qquad B : \mathbb{R} \text{ 上 Borel 集合} \tag{2.1}$$

で定まる $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ_X を X が従う確率分布 (またはスペクトル分布) と呼び, $X \sim \mu_X$ と表す．$X \in \mathcal{M}$ であるため, X は有界である．したがって, X が従う確率分布 μ_X はコンパクトな台をもつ確率測度になる．

非有界な (ある Hilbert 空間上の) 自己共役作用素に関しても, ある程度代数的確率論の枠組みで論じることができる (つまり, 非有界な確率変数に対応する代数的確率論が展開できる)．非有界自己共役作用素 X に対して, 全てのスペクトル射影 $E_X(B)$ (B: $\mathbb{R}$ 上 Borel 集合) が $\mathcal{M}$ に属するとき, X は $\mathcal{M}$ に付随するという．$\mathcal{M}$ に付随する自己共役作用素 X に対して, 値 $\varphi(E_X(B))$ は well-defined である．そこで (2.1) と同様に定まる $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ_X を (非有界な) 自己共役作用素 X が従う確率分布と呼ぶことにする．この場合, μ_X はフルサポートな確率測度になる場合がある．

上記で説明した枠組みで議論される確率論を, 代数的確率論または**非可換確率論**と呼んでいる．確率空間のもととなる代数 $\mathcal{M}$ に積の非可換性が仮定されている場合、「代数的」ではなく「非可換」を強調しているだけで, 本質的には同じ確率論を意味している．今後, 本稿では考える確率空間 (*-代数) は積に関して非可換であることを仮定して議論を進める．

[2]全ての $X \in \mathcal{M}$ で $X^{**} = X$ をみたす反線形写像 $* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $X \mapsto X^*$ が付随している $\mathbb{C}$ 上代数 $\mathcal{M}$

[3]φ は線形汎関数であり, $\varphi(1_{\mathcal{M}}) = 1$ かつ $\varphi(X^*X) \geq 0$ $(X \in \mathcal{M})$ を満たす．

2.2 自由独立性・ブール独立性

古典確率論[4]では、確率変数の独立性が重要な概念の一つであった. 非可換確率論においても独立性に対応する概念があり、非可換確率論を論じる上で最も重要な概念の一つになる. 本稿で扱う独立性は**自由独立性**と**ブール独立性**である. ここでは, それぞれの独立性の定義を与え, 簡単な期待値計算を与えることにする.

定義 2.1 ((1) は [19], (2) は [13] を参照)**.** *(1)* $X, Y \in \mathcal{M}$ が**自由独立**であるとは, $\varphi(p_i(X)) = \varphi(q_i(Y)) = 0$ を満たす任意の有限個の $p_i(X) \in \mathbb{C}[X, 1_{\mathcal{M}}]$, $q_i(Y) \in \mathbb{C}[Y, 1_{\mathcal{M}}]$ に対して, 次の等式をみたすことをいう.

$$\varphi(p_1(X)q_1(Y)p_2(X)q_2(Y)\cdots p_n(X)q_n(Y)) = 0$$

(2) $X, Y \in \mathcal{M}$ が**ブール独立**であるとは, 任意の有限個の $p_i(X) \in \mathbb{C}[X, 1_{\mathcal{M}}]$, $q_i(Y) \in \mathbb{C}[Y, 1_{\mathcal{M}}]$ に対して, 次の等式をみたすことをいう.

$$\varphi(p_1(X)q_1(Y)p_2(X)q_2(Y)\cdots p_n(X)q_n(Y)) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(p_i(X))\varphi(q_i(Y))$$

いずれも, φ の中にある確率変数の始まりは $p_1(X)$ であるが, Y に関する多項式から始まっても良い. 同様に終わりも $q_n(Y)$ であるが, X に関する多項式で終わっても良い. また, 3 つ以上の確率変数の自由・ブール独立性も定義できるが, ここでは省略する.

次に期待値計算の例を挙げる.

例 2.2 (自由の場合)**.** X, Y が自由独立である場合,

$$\begin{aligned}
\varphi(XY) &= \varphi(YX) = \varphi(X)\varphi(Y).\\
\varphi(XYX) &= \varphi(X^2Y) = \varphi(YX^2) = \varphi(X^2)\varphi(Y).\\
\varphi(XYXY) &= \varphi(X^2)\varphi(Y)^2 + \varphi(X)^2\varphi(Y^2) - \varphi(X)^2\varphi(Y)^2.
\end{aligned}$$

例 2.3 (ブールの場合)**.** X, Y がブール独立である場合,

$$\begin{aligned}
\varphi(XY) &= \varphi(YX) = \varphi(X)\varphi(Y).\\
\varphi(XYX) &= \varphi(X)^2\varphi(Y),\ \ \varphi(X^2Y) = \varphi(X^2)\varphi(Y).\\
\varphi(XYXY) &= \varphi(X)^2\varphi(Y)^2,\ \ \varphi(X^2Y^2) = \varphi(X^2)\varphi(Y^2).
\end{aligned}$$

[4]決して「古い」という意味ではない. 非可換確率論は量子確率論と呼ばれることもあり, 量子とは異なるという意味で区別するため, 通常の確率論には「古典」と付けている.

この計算結果から, 通常の確率論の独立性を仮定した場合の期待値計算と大きく異なることがわかる. この計算結果の違いによって, 中心極限定理や Poisson の少数法則といった極限定理の結果にも影響が出る. 実際, 自由確率論やブール確率論での中心極限定理は以下のような結果になる.

定理 2.4 (**中心極限定理**)**.** *簡単のため $X_1, \cdots, X_n$ は $\varphi(X_i) = 0$, $\varphi(X_i^2) = 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たす同分布な非可換確率変数たちとする.*

(1) $X_1, \cdots, X_n$ が自由独立であるとき, $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ の従う分布は $n \to \infty$ のとき, **Wigner の半円分布** *$\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)dx$ に弱収束する.*

(2) $X_1, \cdots, X_n$ がブール独立であるとき, $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ の従う分布は $n \to \infty$ のとき, ベルヌーイ分布 $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+}$ に弱収束する.

2.3 加法的たたみこみ

古典確率論では, 独立な確率変数 X, Y の和 $X + Y$ が従う分布は, 加法的たたみこみ $*$ を用いて表すことができた. つまり, $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$ のとき, $X + Y$ の従う分布は $\mu * \nu$ と表せる. 非可換確率論においても, それぞれの独立性で加法的たたみこみを定義することができる.

定義 2.5 (自由: [20], ブール: [14])**.** *$X \sim \mu$, $Y \sim \nu$ を非可換確率変数とする.*

(1) X, Y が自由独立: $X + Y$ が従う分布を $\mu \boxplus \nu$ と表し, $\boxplus$ を **自由加法的たたみこみ** *という.*

(2) X, Y がブール独立: $X + Y$ が従う分布を $\mu \uplus \nu$ と表し, $\uplus$ を **ブール加法的たたみこみ** *という.*

古典確率論での加法的たたみこみ $\mu * \nu$ は, 確率分布の特性関数で特徴付けられている. つまり, μ の特性関数を $\widehat{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx}\mu(dx)$ $(z \in \mathbb{R})$ とするとき,

$$\log \widehat{\mu * \nu}(z) = \log \widehat{\mu}(z) + \log \widehat{\nu}(z), \qquad z \in \mathbb{R}$$

が成立する. また μ が**無限分解可能**[5]であるとき, 全ての $t > 0$ に対して $t \log \mu(z) = \log \mu_t(z)$ となる μ_t が存在する. また $\mu_0 = \delta_0$ と定めることで, 確率測度の族 $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ は加法的たたみこみ $*$ に関して半群[6]となる. そこで μ_t を μ^{*t} と表すことにする. μ^{*t} は, 時刻 1 で無限分解可能分布 μ に従う Lévy 過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の時刻 t での分布 $(X_t \sim \mu^{*t})$ である (詳しくは [12]).

[5] 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して確率測度 μ_n が存在して, $\mu = \mu_n^{*n}$ が成立する.

[6] 全ての $t, s \geq 0$ に対して $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$

自由加法的たたみこみ $\mu \boxplus \nu$ やブール加法的たたみこみ $\mu \uplus \nu$ に関しても, それぞれ特性関数に対応した解析的変換による特徴付けや, たたみこみによる半群が存在することが知られている. まず μ の **Cauchy 変換**とその逆数を定義する:

$$G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x}\mu(dx), \qquad F_\mu(z) := \frac{1}{G_\mu(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}.$$

F_μ は $\mathbb{C}^+$ から $\mathbb{C}^+$ の解析関数である. 詳しくは述べないが, $\mathbb{C}^+$ のある領域 Γ_μ で F_μ の逆関数 F_μ^{-1} が存在することが知られている. この領域を用いて μ の **Voiculescu 変換**を定義する:

$$\varphi_\mu(z) := F_\mu^{-1}(z) - z, \qquad z \in \Gamma_\mu.$$

このとき $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ, ν に対して,

$$\varphi_{\mu \boxplus \nu}(z) = \varphi_\mu(z) + \varphi_\nu(z), \qquad z \in \Gamma_\mu \cap \Gamma_\nu \cap \Gamma_{\mu \boxplus \nu} \neq \emptyset$$

が成立する ([5]). このことから Voiculescu 変換は, 自由確率論における特性関数に対応したものであると言える. また, μ が**自由無限分解可能**[7]であるとき, 全ての $t > 0$ に対して

$$\varphi_{\mu_t}(z) = t\varphi_\mu(z) \tag{2.2}$$

となる μ_t が存在し, 確率測度の族 $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ は自由加法的たたみこみ $\boxplus$ に関して半群となる. このとき μ_t を $\mu^{\boxplus t}$ と書くことにする. また古典確率論の場合と違うところは, (無限分解可能とは限らない) 確率測度 μ に対しても, $t \geq 1$ においては式 (2.2) で特徴付けられる確率測度 $\mu^{\boxplus t}$ が存在することが証明されている点である ([2]).

ブール確率論に対しても, μ の**エネルギー関数**:

$$E_\mu(z) := z - F_\mu(z), \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

が特性関数に対応している. つまり任意の $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ, ν に対して,

$$E_{\mu \uplus \nu}(z) = E_\mu(z) + E_\nu(z), \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

が成立する. ブールの場合は古典や自由と違い, 全ての確率測度はブール無限分解可能であり, 確率測度 μ と $t > 0$ に対して $E_{\mu_t}(z) = tE_\mu(z)$ となる μ_t が存在する. また $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ はブール加法的たたみこみによって半群になる. そしてこの μ_t のことを $\mu^{\uplus t}$ と書くことにする ([14]).

[7]任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 確率測度 μ_n が存在し, $\mu = \mu_n^{\boxplus n}$ が成立する. 自由無限分解可能分布の例の多くは複素関数論的な手法で発見されているが, ここでは詳しくは述べない.

3　最大値たたみこみと極値分布

前節では確率変数の和が従う分布について解説したが, ここでは確率変数の最大値が従う分布を紹介する. まずは古典確率論の場合について思い出すことにする. 2 つの独立な (実数値) 確率変数 X, Y の最大値を $X \vee Y$ と書くことにする. このとき, 簡単な計算から

$$\mathbb{P}(X \vee Y \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

ということがわかる. この等式から, $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$ の最大値 $X \vee Y$ が従う分布を $\mu \vee \nu$ (記号の濫用に注意) とするとき,

$$\mu \vee \nu((-\infty, x]) = \mu((-\infty, x])\nu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

が成立する. またこの分布関数の等式によって $\mu \vee \nu$ を特徴付けることにする. $\mu \vee \nu$ のことを μ と ν の**最大値たたみこみ**と呼ぶ.

自由やブールの場合にも, このアイデアをもとにして最大値たたみこみを定義する. ところで, 自由やブール確率論の場合, 確率変数は自己共役作用素を意味していた. したがって, 古典確率論のように実数値としての最大値を用いることはできないため, 作用素に関して何か適切な最大値を導入する必要がある. この辺りの歴史的な話はやや冗長となるため詳細は省略するが, Olson [10] をはじめ, 安藤 [1] や, Ben Arous, Voiculescu [3] らによって, スペクトル射影を用いた順序 (**スペクトル順序**) で, (von Neumann 環に付随する) 自己共役作用素 X, Y の間の最大値 (自己共役作用素) $X \vee Y$ を定義することに成功している. より具体的には

$$E_{X\vee Y}((t,\infty)) = E_X((t,\infty)\tilde{\vee} E_Y((t,\infty), \qquad t \in \mathbb{R}$$

をみたすスペクトル分解 $E_{X\vee Y}$ が存在し, これによってスペクトル順序に関して X と Y の最大値 $X \vee Y$ (**スペクトル最大値**) を構成している ($\tilde{\vee}$ は射影作用素間の上限である). Ben Arous と Voiculescu は, 自由独立な確率変数 $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$ に対して, そのスペクトル最大値 $X \vee Y$ が従う分布を $\mu \boxed{\vee} \nu$ と表すことにし, 次の分布関数による特徴づけができることを示している:

$$(\mu \boxed{\vee} \nu)((-\infty, t]) = \max\{\mu((-\infty, t]) + \nu((-\infty, t]) - 1, 0\}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

確率測度 $\mu \boxed{\vee} \nu$ を μ と ν の**自由最大値たたみこみ**と呼ぶ ([3]).

ブール確率論の場合は, Vargas と Voiculescu によって発見されている: ブール独立な正値確率変数[8] $X \sim \mu, Y \sim \nu$ に対して, そのスペクトル最大値 $X \vee Y$ が従う分布を $\mu \cup\!\!\!\vee \nu$ と表

[8] 自己共役作用素 X が正作用素であるとき, 正値 (非可換) 確率変数と呼ぶことにする. なぜ一般の自己共役ではなく正値であるのかは, ブール独立な確率変数の構成に関係している. 詳しくは [18] を参照.

すとき,

$$\mu \mathbin{\uplus\!\!\!\!\vee} \nu((-\infty,t]) = \frac{\mu((-\infty,t])\nu((-\infty,t])}{\mu((-\infty,t]) + \nu((-\infty,t]) - \mu((-\infty,t])\nu((-\infty,t])}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

を満たす. 確率測度 $\mu \mathbin{\uplus\!\!\!\!\vee} \nu$ を μ と ν の**ブール最大値たたみこみ**と呼ぶ ([18]).

以上で, それぞれの最大値たたみこみが定義できた. たたみこみを定義すると, それらに関する極限定理について興味が出てくる. 最大値たたみこみに関する極限定理で最も重要なものは, 最大値安定型の極限定理である. つまり, 独立同分布な確率変数 $X_1, \cdots, X_n$, $a_n > 0$ と $b_n \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{X_1 \vee \cdots \vee X_n - b_n}{a_n} \tag{3.4}$$

の $n \to \infty$ のときの極限に関する定理である. このタイプの極限による非退化な極限分布は (存在すれば) **極値分布**と呼ばれており, 古典確率論における極値分布はフレシェ型, グンベル型, ワイブル型のいずれかとタイプ同値であることが知られている (より詳しくは [11]). **自由極値分布** (自由確率論における極値分布) に関しても, ほぼ同様の定理が成立していることがわかっており, 同じ組 (a_n, b_n)[9]で現れた極値分布 F と自由極値分布 G の間には, 以下の関係が成立している:

$$G(x) = \max\{1 + \log F(x), 0\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ただし $F(x) = 0$ のときは $\log F(x) = -\infty$ と解釈する ([3]). ブール極値分布 (ブール確率論における極値分布) は, 正軸に台をもつタイプ (Dagum 分布) しか現れない ([18]).

また加法的たたみこみのときと同様, 最大値たたみこみによる半群を構成することができる. 確率測度 μ に対して, 古典のブールの場合にはそれぞれの最大値たたみこみによる半群 $\{\mu^{\vee t}\}_{t\geq 0}$, $\{\mu^{\uplus\!\!\!\!\vee t}\}_{t\geq 0}$ が等式 (3.1), (3.3) から自然に構成できる. 自由の場合には, 自由最大値たたみこみによる部分半群 $\{\mu^{\boxed{\vee} t}\}_{t\geq 1}$ が等式 (3.2) から自然に構成できる ([17]).

4 主結果

この節では本稿での主結果を与える. そのためにまず, 本研究の核となる Tucci [15] と Haagerup, Möller [6] による先行研究を説明する. 正値確率変数 $X \sim \mu$ と $Y \sim \nu$ に対して, $\sqrt{Y}X\sqrt{Y}$ (または $\sqrt{X}Y\sqrt{X}$) が従う分布を $\mu \boxtimes \nu$ と表し, これを**自由乗法的たたみこみ**とよぶ. 3 節でも述べたが, たたみこみが定義されると, それに関する極限定理がどうなっているのかという数学的問いが挙げられる. これまでに自由独立な確率変数列の和 (自由加法的

[9]最大値安定型の極限定理で現れる組 (a_n, b_n) は基準化定数と呼ばれている.

たたみこみ) に関しては, 様々な極限定理が研究されてきた. Tucci と Haagerup, Möller は, この流れに沿って, 自由独立な確率変数列の積による, ある種の極限定理を証明した.

定理 4.1 ([15, 6])**.** μ を $[0,\infty)$ 上の確率測度とする. また μ^c を μ の $x \mapsto x^c$ $(c>0)$ による押し出しとする. このとき, μ が *1* 点分布でなければ, 確率測度の列 $(\mu^{\boxtimes n})^{1/n}$ は $n \to \infty$ のとき, 非退化分布 ν に弱収束する. ν は μ で定まる分布なので, $\nu = \Phi(\mu)$ と表すことにする.

唐突ではあるが, 実は写像 Φ は安定分布を極値分布に写すことが, 簡単な計算でわかる ([16]). 安定分布とは極限定理 (3.4) の最大値を和に変えた時の極限分布である. この計算結果をヒントに Φ は確率論における和と最大値の関係を記述するのに最適な道具ではないのかと予想し, 研究着手に至った. その結果, Φ を用いることで, 非可換確率論における加法的たたみこみと最大値たたみこみの対応関係を説明する公式を作ることに成功したため報告する.

定理 4.2 ([16])**.** μ を $[0,\infty)$ 上の確率測度とする. また $D_c(\mu)$ を μ の $x \mapsto cx$ $(c>0)$ による押し出しとする. このとき, 次の公式が成立する.

$$\Phi(D_{1/t}(\mu^{\boxplus t})) = \Phi(\mu)^{\boxtimes\!\!\!\vee t}, \qquad t \geq 1.$$
$$\Phi(D_{1/t}(\mu^{\uplus t})) = \Phi(\mu)^{\cup\!\!\!\vee t}, \qquad t > 0.$$

実は古典確率論における加法的たたみこみと最大値たたみこみの間に関しても, この写像 Φ を用いることで記述できる. $\mathcal{X}$ を **boolean-classical Bercovici-Pata 全単射**[10] とし, $\mathcal{X}^\vee$ を以下のように定義する:

$$\Lambda^\vee(\mu)((-\infty,t]) = \exp\left(1 - \frac{1}{\mu((-\infty,t])}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ただし, $\mu((-\infty,t]) = 0$ のときは $\Lambda^\vee(\mu)((-\infty,t]) = 0$ と定める. このとき, $\mathcal{X}^\vee$ は boolean-classical max-Bercovici-Pata 全単射と呼んでいるが, この名前の由来については [17] を参照にしてほしい. 以上の準備から, 次の定理が得られた.

定理 4.3 ([16])**.** μ を $[0,\infty)$ 上の無限分解可能分布とする. このとき

$$(\mathcal{X}^\vee \circ \Phi \circ \mathcal{X}^{-1})(D_{1/t}(\mu^{*t})) = (\mathcal{X}^\vee \circ \Phi \circ \mathcal{X}^{-1})(\mu)^{\vee t}, \qquad t > 0.$$

ここで強調したい点は, 全て非可換確率論特有の写像を用いて, 古典確率論における公式を得ている点である. この定理に現れている $\mathcal{X}^\vee \circ \Phi \circ \mathcal{X}^{-1}$ という合成写像は, 実は何か古典確率論で既存のものになっていないのかと予想しているが, 実際はどうかわかっていない. ちな

[10]大雑把に言えば, ブール無限分解可能分布 (全ての確率測度) のクラスと無限分解可能分布のクラスとの 1:1 対応である. 詳しくは [4] を参照のこと.

みに最近では, **MP** を Marchenko-Pastur 分布 (Wishart ランダム行列の行列サイズ無限大としたときの経験固有値分布の極限分布) とするとき, Φ の代わりに $\mu \mapsto \Phi(\mathbf{MP} \boxtimes \mu) =: \Xi(\mu)$ という写像に入れ替えた写像 $\mathcal{X}^{\vee} \circ \Xi \circ \mathcal{X}^{-1}(\mu)$ は, μ と指数分布の mixture で表現されることがわかった ([8]). 今後は, 古典確率論での結果に着目して, 定理 4.3 で現れた公式の確率論的意味を理解したいと考えている.

References

[1] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues. Linear Algebra Appl. 118 (1989) 163-248.

[2] S. Belinschi and H. Bercovici, Atoms and regularity for measures in a partially defined free convolution semigroup, Math. Z. 248 (2004), no. 4, 665-674.

[3] G. Ben Arous and D. V. Voiculescu, Free extreme values, Ann. Probab. 34 (2006) 2037-2059

[4] H. Bercovici and V. Pata, V. Stable laws and domains of attraction in free probability theory. Ann. of Math. (2) 149 (1999)1023-1060. With an appendix by Philippe Biane.

[5] H. Bercovici and D. Voiculescu, Free convolution of measures with unbounded support, Indiana Univ. Math. J. 42, no. 3 (1993), 733-773.

[6] U. Haagerup and S. Möller, The law of large numbers for the free multiplicative convolution. In Operator Algebra and Dynamics. Springer Proc. Math. Stat. 58 (2013) 157-186. Heidelberg: Springer.

[7] 長谷部高広, 非可換確率論における独立性と無限分解可能分布, 数学 70, no. 3, 296-320, 2018.

[8] T. Hasebe and Y. Ueda, Homomorphisms relative to additive convolutions and max-convolutions: free, boolean and classical cases, Submitted, arXiv:2011.10399.

[9] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the combinatorics of free probability*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 335. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. xvi+417 pp.

[10] M. P. Olson, The selfadjoint operators of a von Neumann algebra form a conditionally complete lattice. Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971) 537-544.

[11] Resnick, S.I. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering (2008). New York: Springer.

[12] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, corrected paperback edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[13] R. Speicher, On universal products, Free Probability Theory, ed. D. Voiculescu, Fields Inst. Comm. 12, AMS, 1997, 257-266.

[14] R. Speicher and R. Woroudi, Boolean convolution, Free Probability Theory, ed. D. Voiculescu, Fields Inst. Comm. 12, AMS, 1997, 267-280.

[15] G. H. Tucci, Limits laws for geometric means of free random variables. Indiana Univ. Math. J. 59 (2010) 1-13.

[16] Y. Ueda, Max-convolution semigroups and extreme values in limit theorems for the free multiplicative convolution, Bernoulli, 27 (2021), no.1, 502-531.

[17] Y. Ueda, Limit theorems for classical, freely and Boolean max-infinitely divisible distributions, to appear in J. Thoer. Probab.

[18] J. G. Vargas and D. V. Voiculescu, Boolean extremes and Dagum distributions, arXiv:1711.06227

[19] D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product C^* algebras, Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, Lect. Notes in Math. 1132, Springer, Berlin (1985), 556-588.

[20] D. Voiculescu, Addition of certain non-commutative random variables, J. Funct. Anal. 66 (1986), 323-346.

[21] D. Voiculescu, Limit laws for random matrices and free products, Invent. Math. 104 (1991), no. 1, 201-220.

Department of General Science
National Institute of Technology, Ichinoseki College
Iwate 021-8511
JAPAN
E-mail address: yuki1114@ichinoseki.ac.jp