高次元確率熱方程式と KPZ 方程式の L^2-領域における摂動

中島 誠 (名古屋大学)

本稿では Clément Cosco 氏 (Weizmann Institute of Science) および中島秀太氏 (Universität Basel) との共同研究 [12, 27] について報告する.

1 Introduction

Kardar, Parisi, Zhang らはランダムな界面モデルとして次のような SPDE

$$\partial_t h(t,x) = \frac{1}{2}\Delta h(t,x) + \frac{1}{2}|\nabla h(t,x)|^2 + \beta\dot{\xi}(t,x), \quad (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d \tag{KPZ$_d$}$$

を導入した [23]. ただし $\xi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ は時空間ホワイトノイズである.

しかし, (KPZ$_d$) は非線形項 $|\nabla h|^2$ の存在により ill-posed となる. そこで何らかの意味づけを与える必要がある. 現時点では $d=1$ の場合に Bertini と Giacomin による次のような意味づけが成功しているのみである [3].

<u>Cole-Hopf 解</u> $u_\varepsilon(t,x)$ を確率熱方程式

$$\begin{aligned}\partial_t u_\varepsilon(t,x) &= \frac{1}{2}\Delta u_\varepsilon(t,x) + \beta u_\varepsilon(t,x)\dot{\xi}_\varepsilon(t,x) \\ u_\varepsilon(0,x) &= u_0(x)\end{aligned} \tag{SHE$_d^\varepsilon$}$$

の解とする. ただし $\phi\in C_{c,+}^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $\int\phi(x)\mathrm{d}x=1$ をみたすものとし, $\dot{\xi}_\varepsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}}\phi_\varepsilon(x-y)\dot{\xi}(t,y)\mathrm{d}y$ を空間方向への正則化とする ($\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}\phi(\varepsilon^{-1}x)$).

$h_\varepsilon(t,x)=\log u_\varepsilon(t,x)$ は伊藤の公式を適用すると

$$\begin{aligned}\partial_t h_\varepsilon(t,x) &= \frac{1}{2}\Delta h_\varepsilon(t,x) + \frac{1}{2}\left(|\nabla h_\varepsilon(t,x)|^2 - \beta^2 V_\varepsilon(0)\right) + \beta\dot{\xi}_\varepsilon(t,x) \\ h_\varepsilon(0,x) &= \log u_0(x)\end{aligned} \tag{KPZ$_d^\varepsilon$}$$

の解になる. ただし $V_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\phi_\varepsilon(x-y)\phi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y$ であり $V_\varepsilon(0)=\varepsilon^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)^2\mathrm{d}x$ である.

Bertini と Giacomin は $d=1$ のとき, $\varepsilon\to 0$ で u_ε は確率熱方程式 $\partial_t u(t,x)=\frac{1}{2}\Delta u(t,x)+\beta u(t,x)\dot{\xi}(t,x)$ の解 u に収束することを示し, このことを用いて (KPZ$_1$) の解を $h=\log u$ で定義した. 形式的に書くと h は

$$\partial_t h(t,x) = \frac{1}{2}\Delta h(t,x) + \frac{1}{2}\left(|\nabla h(t,x)|^2 \text{``}-\infty\text{''}\right) + \beta\dot{\xi}(t,x)$$

という繰り込みを含んだ SPDE の解となっている. このように KPZ 方程式に意味づけがなされたことで $d=1$ 次元の KPZ 方程式の解析は大きく進展している [11, 28].

また KPZ 方程式は Cole-Hopf 変換を用いることで解決された一方で他の特異 SPDE を解くことは長年大きな問題として残っていた. しかし, Hairer による正則構造 [21] や Gubinelli-Imkeller-Perkowski[20] によるパラコントロール解析, Gonçalves-Jara によりエネルギー解 [15], Kupiannen による繰り込み群を用いた解析 [24] などの理論により, 広いクラスの特異 SPDE が解かれるようになってきた.

ところが $(\mathrm{SHE}_d^\varepsilon)$ や $(\mathrm{KPZ}_d^\varepsilon)$ に対しては $d=2$ を臨界次元として高次元では正則構造理論などは適用できていない. そこで近年では高次元 SPDE に対してノイズの強度 β も ε に依存して小さくなるように選び, $(\mathrm{SHE}_d^\varepsilon)$ の解 u_ε や $(\mathrm{KPZ}_d^\varepsilon)$ の解 h_ε の解析が行われるようになってきた [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 16, 18, 19, 25, 26].

2 主結果

以下, ノイズの強度を表すパラメータ β は以下のように $\varepsilon > 0$ に依存して 0 に近づける: $\hat\beta \in (0,\infty)$ に対して

$$\beta_\varepsilon = \begin{cases} \hat\beta\sqrt{\dfrac{2\pi}{-\log\varepsilon}}, & d=2 \\ \hat\beta\varepsilon^{\frac{d-2}{2}}, & d\geq 3 \end{cases}. \tag{2.1}$$

$u_\varepsilon(t,x)$ や $h_\varepsilon(t,x)$ は超関数値の確率過程と捉え, テスト関数 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に作用させて得られる過程

$$u_\varepsilon(t,f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)u_\varepsilon(t,x)\mathrm{d}x, \quad h_\varepsilon(t,f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h_\varepsilon(t,x)\mathrm{d}x$$

などを解析していく.

[12] では優臨界次元である $d\geq 3$ の場合に, [27] では $d=2$ の場合に $(\mathrm{SHE}_d^\varepsilon)$ および $(\mathrm{KPZ}_d^\varepsilon)$ の解に関する性質を調べている.

まずは $(\mathrm{SHE}_d^\varepsilon)$ に関する次のような大数の法則のような結果が得られる.

定理 1. [12, Theorem 2.1] $d\geq 3$ とし, $u(0,x)=u_0(x)\in C_b(\mathbb{R}^d)$ とする. このときある定数 $\beta_c=\beta_c(d,\phi)>0$ が存在し, $\hat\beta\in(0,\beta_c)$ ならば次のことが成り立つ. 任意の $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t\geq 0$ に対して

$$u_\varepsilon(t,f) \xrightarrow{P} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)u(t,x)\mathrm{d}x$$

が成り立つ. ただし, $t>0$ に対して $u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)p_t(x,y)\mathrm{d}y$, $p_t(x,y)=\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)$ である.

注意 1. [26] では $\beta_{L^2}\leq\beta_c$(β_{L^2} は注意 3 で与える) に対して, $\hat\beta\in(0,\beta_{L^2})$ における大数の法則を示している. 定理 1 で現れた臨界点 β_c は弱い摂動領域 (weak disorder) と強い摂動領域 (strong disorder) の相転移の臨界点であり大数の法則が成り立つ限界であると予想される.

注意 2. $d=2$ においては大数の法則に関する主張は行わない. これはこの後述べるが中心極限定理に相当する主張が大数の法則が成り立つと思われる限界まで証明できているからである.

定理 2. [12, 27] $d\geq 2$ とし, $u(0,x)=u_0(x)\in C_b(\mathbb{R}^d)$ とする. このときある定数 $\beta_{L^2}=\beta_{L^2}(d,\phi)>0$ が存在し, $\hat\beta\in(0,\beta_{L^2})$ ならば次のことが成り立つ.

(1) 任意の $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t\geq 0$ に対して

$$\frac{1}{\beta_\varepsilon}\left(u_\varepsilon(t,f)-\mathbb{E}[u_\varepsilon(t,f)]\right) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{U}(t,x)\mathrm{d}x$$

が成り立つ. ただし $\mathcal{U}(t,x)$ は Edward-Wilkinson 型方程式

$$\partial_t\mathcal{U}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta\mathcal{U}(t,x) + \gamma(\hat\beta,\phi)u(t,x)\dot\xi(t,x), \quad \mathcal{U}(0,x)\equiv 0$$

の解である.

(2) さらに $0 < \inf_x u_0(x) \le \sup_x u_0(x) < \infty$ を仮定する．このとき任意の $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t \ge 0$ に対して

$$\frac{1}{\beta_\varepsilon}\left(h_\varepsilon(t,f) - \mathbb{E}[h_\varepsilon(t,f)\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{H}(t,x)\mathrm{d}x$$

が成り立つ．ただし $\mathcal{H}(t,x)$ は

$$\partial_t \mathcal{H}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta\mathcal{H}(t,x) + \nabla \log \bar{u}(t,x)\cdot\nabla\mathcal{H}(t,x) + \gamma(\hat{\beta},\phi)\dot{\xi}(t,x), \quad \mathcal{H}(0,x) \equiv 0$$

の解である．

注意 3. 臨界点は

$$\beta_{L^2} = \begin{cases} 1, & d = 2 \\ \sup\left\{\beta > 0 : E_0\left[\exp\left(\beta^2\int_0^\infty V(B_{2s})\mathrm{d}s\right)\right] < \infty\right\}, & d \ge 3 \end{cases},$$

$$\gamma(\beta,\phi)^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\hat{\beta}^2}, & d = 2 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} V(x)E_x\left[\exp\left(\beta^2\int_0^\infty V(B_{2s})\mathrm{d}s\right)\right]\mathrm{d}x, & d \ge 3 \end{cases}$$

と表される．ただし $V(x) = V_{d,\phi}(x) := \int_{\mathbb{R}^d}\phi(x-y)\phi(y)\mathrm{d}y$, $\{B_t : t \ge 0\}$ は d 次元ブラウン運動である．

注意 4. $\hat{\beta} > \beta_{L^2}$ のとき $\gamma(\hat{\beta},\phi) = \infty$ となり, $\mathcal{U}$ や $\mathcal{H}$ の SPDE が意味を持たなくなる．一方で $d \ge 3$ のとき $\beta_{L^2} < \beta_c$ が成り立つことが離散版の模型では知られており, 連続的な場合にも臨界点は一致しないと予想されている．そのため定理 1 と合わせると (β_{L^2}, β_c) における摂動に関しては未解決なままである．

注意 5. $d \ge 3$ の場合, [14] などで既に同じ極限が得られているが, 以下の点が今回の結果との主な差異である．

(i) [14] などでは, ある $\beta_0 < \beta_{L^2}$ が存在し $\hat{\beta} \in (0,\beta_0)$ に対して極限の存在を示している．

(ii) 初期値は $\bar{u}(t,x) \equiv 1$ の場合に限定して議論しており, 極限として現れるのは Edward-Wilkinson 方程式の解となっている．

(iii) [12] では有限次元時間分布に関する収束も示している．

注意 6. $d = 2$ の場合, [7, 16] で同じ極限が得られている．

(1) いずれも初期条件は $u_0(x) \equiv 1$ であり, 極限は Edward-Wilkinson 方程式になっている．[7] では定理 2 と同様に $\beta < 1$ のときに極限を得ているが, [16] では $\beta < \beta_* \le 1$ における摂動を証明している．

(2) [8] では 2 次元 KPZ 方程式の解を

$$\partial_t \tilde{h}_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{2}\Delta\tilde{h}_\varepsilon(t,x) + \frac{1}{2}\beta_\varepsilon|\nabla\tilde{h}_\varepsilon(t,x)|^2 + \dot{\xi}_\varepsilon(t,x) \tag{degKPZ$_d^\varepsilon$}$$

という非線形項の影響を弱めた解を考え, $\tilde{h}_\varepsilon(t,x) - \mathbb{E}[\tilde{h}_\varepsilon(t,x)]$ の極限を以て特徴づけようと試み, 緊密性と極限が非自明なものになることまで示した．これは定理で考えているものと分布の意味で一致することがわかっている [7, Proposition A.1]

(3) [27] では, よい性質を持った関数 F に対して $\frac{1}{\beta_\varepsilon}\int f(x)\left(F(u_\varepsilon(t,x)) - \mathbb{E}[F(u_\varepsilon(t,x))]\right)\mathrm{d}x$ の極限を求めている．またこれらの収束の同時収束と極限の関係についても求めている．

注意 7. 定理で得られている極限 $\int f(x)\mathcal{U}(t,x)\mathrm{d}x$, $\int f(x)\mathcal{H}(t,x)\mathrm{d}x$ は共に正規分布である．

3 確率熱方程式に対する Feynman-Kac 表現

(SHE$_d^\varepsilon$) や (KPZ$_d^\varepsilon$) を解析するために有用なものが次の Feynman-Kac 表現である [1]:

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathrm{E}_x\left[\exp\left(\beta\int_0^t\int \phi_\varepsilon(B_s-y)\dot{\xi}(t-s,\mathrm{d}y)\mathrm{d}s - \frac{\beta^2 tV(0)}{2\varepsilon^2}\right)u_0(B_t)\right]. \tag{FK}$$

このままではあまり有用性がわからないが, ブラウン運動のスケール変換不変性, ホワイトノイズの時間反転不変性, スケール変換不変性を用いると各時刻 $t>0$ ごとに右辺が $\mathcal{Z}(t/\varepsilon^2, x/\varepsilon)$ と同分布になることがわかる. ただし

$$\mathcal{Z}\,(t,x) = \mathrm{E}_x\left[\exp\left(\frac{\beta}{\varepsilon^{\frac{d-2}{2}}}\int_0^t\int \phi\,(B_s-y)\,\xi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) - \frac{\beta^2 tV(0)}{2\varepsilon^d}\right)u_0\,(B_t)\right].$$

特に, β を (2.1) のように選ぶと $Z(t,x)$ は連続空間のランダム媒質中のディレクティドポリマー (DPRE) の分配関数 (正確にはポリマー測度による $u_0(B_t)$ の期待値と分配関数の積) となる. このように既存の DPRE に関する技術が適用することができる.

注意 8. $d\geq 3$ における主結果の臨界点 β_c, β_{L^2} は DPRE の結果から現れる値である. 例えば

$$\mathcal{Z}^{(1)}(t,x) := \mathrm{E}_x\left[\exp\left(\hat{\beta}\int_0^t\int \phi\,(B_s-y)\,\xi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) - \frac{\hat{\beta}^2 tV(0)}{2}\right)\right] \tag{3.1}$$

は ξ で生成される増大情報系に関して非負マルチンゲールになることがわかり, $\hat{\beta}<\beta_c$ ならば $\mathcal{Z}^{(1)}(t,x)\to\mathcal{Z}_\infty(x)$ a.s., $\hat{\beta}>\beta_c$ ならば $\mathcal{Z}^{(1)}(t,x)\to 0$ a.s. という相転移が起こることが示される.

また β_{L^2} はマルチンゲール $\mathcal{Z}^{(1)}(t,x)$ が一様二乗可積分性に関する臨界点である.

注意 9. $d=2$ の場合, (3.1) は $t\to\infty$ で 0 に収束することがわかっている. そのためさらにノイズの効果を弱める項 $\frac{1}{\sqrt{-\log\varepsilon}}$ を追加している. Caravenna, Sun, Zygouras らは

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Z}}\left(\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{x}{\varepsilon}\right) &:= \mathrm{E}_{\frac{x}{\varepsilon}}\left[\exp\left(\frac{\hat{\beta}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\log\varepsilon}}\int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}}\int \phi\,(B_s-y)\,\xi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) - \frac{\pi\hat{\beta}^2 tV(0)}{\varepsilon^2}\right)\right]\\ &\xrightarrow{d} \begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\hat{\beta}^2}}\eta - \dfrac{1}{2(1-\hat{\beta}^2)}\right) & 0<\hat{\beta}<1\\ 0 & \hat{\beta}\geq 1\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つことを示している [6]. ただし η は標準正規分布である. これより $\beta_{L^2}=1$ を臨界点として $\hat{\beta}>\beta_{L^2}$ のとき大数の法則が成り立たないことが期待される.

4 証明のアイデア

ここでは $d\geq 3$ の場合の中心極限定理の証明のアイデアについて述べる.

証明には次のマルチンゲール中心極限定理を用いる.

Theorem A. [22, Chap. 8 Theorem 3.11] 各 $n\geq 1$ に対して, $\mathcal{F}^n=\{\mathcal{F}_t^n : t\geq 0\}$ を増大情報系とし, $X^{(n)}=(X_t^{(n,1)},\cdots,X_t^{(n,d)})$ を $\mathbb{R}^d$-値連続 $\mathcal{F}^n$-マルチンゲールで $X_0^{(n)}=0$ となるとする. 正定値 d 次正方行

列値関数 $c=\{\{c_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{d}:t\geq 0\}$ に対して各 $t\geq 0$ に対して $\langle X^{(n,i)},X^{(n,j)}\rangle_t\xrightarrow{P}c_{ij}(t)$ が成り立つとき，$X^{(n)}\xrightarrow{d}X$ が成り立つ．ただし $X=(X_t^{(1)},\cdots,X_t^{(d)})$ は $\langle X^{(i)},X^{(j)}\rangle_t=c_{ij}(t)$ のガウス過程である．

定理 A を適用するために新しいマルチンゲールを導入する．

$$\mathcal{Z}_s(x)=\mathcal{Z}_s^{(t)}(x):=\mathrm{E}_x\left[\exp\left(\hat{\beta}\int_0^s\int\phi\left(B_u-y\right)\xi(\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)-\frac{\hat{\beta}^2sV(0)}{2}\right)u_0\left(\varepsilon B_{t/\varepsilon^2}\right)\right]$$

を導入する．$\mathcal{Z}_t^{(t)}(x)=\mathcal{Z}(t,x)$ であることに注意する．このとき伊藤の公式を適用すると

$$\int\mathrm{d}xf(x)\mathcal{Z}_s(x)=\int\mathrm{d}xf(x)u(t,x)+\int_0^s\int\mathrm{d}xf(x)\mathrm{d}\mathcal{Z}_s(x)$$

となる．ただし

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\langle\mathcal{Z}(x),\mathcal{Z}(y)\rangle_s&=\hat{\beta}^2\mathrm{E}_{x,y}\left[V(B_s-\tilde{B}_s)\Phi_s(B)\Phi_s(\tilde{B})u_0\left(\varepsilon B_{\frac{t}{\varepsilon^2}}\right)u_0\left(\varepsilon\tilde{B}_{\frac{t}{\varepsilon^2}}\right)\right]\\&=\hat{\beta}^2\int\mathrm{d}z\mathrm{d}w\mathrm{E}_{x,y}\left[V(B_s-\tilde{B}_s)\Phi_s(B)\Phi_s(\tilde{B})\middle|B_s=z,\tilde{B}_s=w\right]\\&\qquad\times p_s(x,z)p_s(y,w)\mathrm{E}_z\left[u_0\left(\varepsilon B_{\frac{t}{\varepsilon^2}-s}\right)\right]\mathrm{E}_w\left[u_0\left(\varepsilon\tilde{B}_{\frac{t}{\varepsilon^2}-s}\right)\right]\mathrm{d}s\\\Phi_s(B)&=\exp\left(\hat{\beta}\int_0^s\int\phi\left(B_u-y\right)\xi(\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)-\frac{\hat{\beta}^2sV(0)}{2}\right)\end{aligned}$$

となる．つまり各 $0\leq\tau\leq t$ に対して

$$\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}\int_0^{\tau/\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\mathrm{d}x\mathrm{d}yf(x)f(y)\mathrm{d}\langle\mathcal{Z}^{(t/\varepsilon^2)}(x/\varepsilon),\mathcal{Z}^{(t/\varepsilon^2)}(y/\varepsilon)\rangle_s$$

の極限を求めればよいことになる．$\mathrm{d}s=\varepsilon^{-2}\mathrm{d}\sigma$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}\mathrm{d}\langle\mathcal{Z}(x/\varepsilon),\mathcal{Z}(y/\varepsilon)\rangle_s&=\varepsilon^{2-d}\int\mathrm{d}z\mathrm{d}wV(z-w)\mathrm{E}_{\frac{x}{\varepsilon}}\left[\Phi_s(B)|B_s=z\right]\mathrm{E}_{\frac{y}{\varepsilon}}\left[\Phi_s(\tilde{B})|\tilde{B}_s=w\right]\\&\qquad\times p_s\left(\frac{x}{\varepsilon},z\right)p_s\left(\frac{y}{\varepsilon},w\right)\mathrm{E}_z\left[u_0\left(\varepsilon B_{\frac{t}{\varepsilon^2}-s}\right)\right]\mathrm{E}_w\left[u_0\left(\varepsilon\tilde{B}_{\frac{t}{\varepsilon^2}-s}\right)\right]\mathrm{d}s\\&=\int\mathrm{d}z'\mathrm{d}vV(v)\mathrm{E}_{\frac{x}{\varepsilon}}\left[\Phi_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}(B)\middle|B_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}=\frac{z'}{\varepsilon}\right]\mathrm{E}_{\frac{y}{\varepsilon}}\left[\Phi_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}(\tilde{B})\middle|\tilde{B}_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}=\frac{z'}{\varepsilon}-v\right]\\&\qquad\times p_\sigma(x,z')p_\sigma(y,z'-\varepsilon v)u\left(t-\sigma,z'\right)u\left(t-\sigma,z'-v\varepsilon\right)\mathrm{d}\sigma\\&\approx\int\mathrm{d}z'\mathrm{d}vV(v)\mathrm{E}_{\frac{x}{\varepsilon}}\left[\Phi_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}(B)\middle|B_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}=\frac{z'}{\varepsilon}\right]\mathrm{E}_{\frac{y}{\varepsilon}}\left[\Phi_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}(\tilde{B})\middle|\tilde{B}_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}=\frac{z'}{\varepsilon}-v\right]\\&\qquad\times p_\sigma(x,z')p_\sigma(y,z')u\left(t-\sigma,z'\right)^2\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int\mathrm{d}x\mathrm{d}yf(x)f(y)\int\mathrm{d}z'\mathrm{d}vV(v)\mathrm{E}_{\frac{x}{\varepsilon}}\left[\Phi_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}(B)|B_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}=\frac{z'}{\varepsilon}\right]\mathrm{E}_{\frac{y}{\varepsilon}}\left[\Phi_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}(\tilde{B})|\tilde{B}_{\frac{\sigma}{\varepsilon^2}}=\frac{z'}{\varepsilon}-v\right]\\\times p_\sigma(x,z')p_\sigma(y,z')u\left(t-\sigma,z'\right)^2\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

の極限を考えることに帰着される．あとは DPRE に関する局所極限定理による近似や均質化により

$$\int_0^\tau\int\mathrm{d}x\mathrm{d}yf(x)f(y)\int\mathrm{d}z'\mathrm{d}vV(v)\mathbb{E}\left[\mathcal{Z}_\infty(0)\mathcal{Z}_\infty(v)\right]p_\sigma(x,z')p_\sigma(y,z')u\left(t-\sigma,z'\right)^2\mathrm{d}\sigma$$

へ収束することが示される．ここの収束の議論は煩雑なので本稿では省略する．

$(\mathrm{KPZ}_d^\varepsilon)$ の証明も同様の方法を用いるが,

$$\log \mathcal{Z}_s(x) = \log u(t,x) + \int_0^s \frac{\mathrm{d}\mathcal{Z}_u(x)}{\mathcal{Z}_u(x)} - \frac{1}{2}\int_0^s \frac{\mathrm{d}\langle \mathcal{Z}(x)\rangle_u}{\mathcal{Z}_u(x)^2}$$

というセミマルチンゲールの解析が必要になる．マルチンゲール部分の分母に $\mathcal{Z}_u(x)$ が現れる点, 有界変動過程の解析等, 証明は一層煩雑である．

注意 10. 中心極限定理に関して様々な先行結果があるが, その手法は様々である．[7] では 4 次モーメント法を用いて証明し, [14, 16] では Malliavin 解析の二次オーダーの Poincaré 不等式を利用して証明している．

5 おわりに

今回考えた問題では確率熱方程式 $(\mathrm{SHE}_d^\varepsilon)$ と $(\mathrm{KPZ}_d^\varepsilon)$ に関する摂動を調べたが, これらの解析には Feynman-Kac 表現 (FK) が非常に有用であった．一方でより一般の非線形確率熱方程式

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u + \sigma(u)\dot{\xi} \tag{NLSHE}$$

の解析を考える際には Feynman-Kac 表現のような良い表現が存在することを期待できないため今回の手法は適用できない．[17, 13] などでは (NLSHE) に対しても同様のガウス型の摂動を導いている．

また 2 次元の $(\mathrm{SHE}_d^\varepsilon)$ の解析に関しては $\hat{\beta} = 1$ の場合に興味深い結果が知られている．

Theorem B. [2, 6, 18] $d = 2$ とする．$u_0(x) \equiv 1$ とする．

$$\beta_\varepsilon^2 = \frac{2\pi}{-\log \varepsilon} + \frac{\rho}{(\log \varepsilon)^2}$$

としたとき, 次のことが成り立つ．$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して $u_\varepsilon(t,f) := \int f(x) u_\varepsilon(t,x)\mathrm{d}x$ とすると

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left[u_\varepsilon(t,f)\right] = \int f(x)\mathrm{d}x \\
&\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Var}\left(u_\varepsilon(t,f)\right) = 2\int f(z)f(z')K_{t,\theta}\left(\frac{z-z'}{2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}z' \\
&\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left[|u_\varepsilon(t,f)|^3\right] < \infty
\end{aligned}$$

となる．ただし

$$\begin{aligned}
K_{t,\theta}(x) &= \pi \int_{0<u<v<t} \mathrm{d}u\mathrm{d}v p_u(x) \int_0^\infty \mathrm{d}s \frac{e^{(\theta-\gamma)s} s(v-u)^{s-1}}{\Gamma(s+1)} \\
\theta &= \log 4 + 2\int V(x)V(y)\log\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \gamma + \frac{\rho}{\pi}
\end{aligned}$$

である．$\gamma = -\int_0^\infty e^{-u}\log u\mathrm{d}u$.

これにより $\{u_\varepsilon(t,f)\}$ は $\mathbb{R}$-値の確率変数として緊密であり, その極限点は非自明なものであることがわかるが, 極限として現れるものの特徴づけやその極限の (不) 連続性などについては一切知られていない．臨界点 $(\hat{\beta} = 1)$ での解析は 2 次元確率熱方程式や KPZ 方程式へ新たな意味づけを与える可能性がある．

参考文献

[1] L. Bertini and N. Cancrini. The stochastic heat equation: Feynman-Kac formula and intermittence. *Journal of statistical Physics*, 78(5):1377–1401, 1995.

[2] L. Bertini and N. Cancrini. The two-dimensional stochastic heat equation: renormalizing a multiplicative noise. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(2):615, 1998.

[3] L. Bertini and G. Giacomin. Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems. *Communications in mathematical physics*, 183(3):571–607, 1997.

[4] Y. Bröker and C. Mukherjee. Quenched central limit theorem for the stochastic heat equation in weak disorder. *International Conference in Honor of the 75th Birthday of SRS Varadhan*, pages 173–189, 2016.

[5] Y. Bröker, C. Mukherjee, et al. Localization of the Gaussian multiplicative chaos in the wiener space and the stochastic heat equation in strong disorder. *The Annals of Applied Probability*, 29(6):3745–3785, 2019.

[6] F. Caravenna, R. Sun, and N. Zygouras. On the moments of the $(2+1)$-dimensional directed polymer and stochastic heat equation in the critical window. *Communications in Mathematical Physics*, 372(2):385–440, 2019.

[7] F. Caravenna, R. Sun, N. Zygouras, et al. The two-dimensional KPZ equation in the entire subcritical regime. *Annals of Probability*, 48(3):1086–1127, 2020.

[8] S. Chatterjee, A. Dunlap, et al. Constructing a solution of the $(2+1)$-dimensional KPZ equation. *Annals of Probability*, 48(2):1014–1055, 2020.

[9] F. Comets, C. Cosco, and C. Mukherjee. Space-time fluctuation of the Kardar-Parisi-Zhang equation in $d \geq 3$ and the gaussian free field. *arXiv preprint arXiv:1905.03200*, 2019.

[10] F. Comets, C. Cosco, and C. Mukherjee. Renormalizing the Kardar-Parisi-Zhang equation in $d \geq 3$ in weak disorder. *Journal of Statistical Physics*, 179(3):713–728, 2020.

[11] I. Corwin. The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class. *Random matrices: Theory and applications*, 1(01):1130001, 2012.

[12] C. Cosco, S. Nakajima, and M. Nakashima. Law of large numbers and fluctuations in the sub-critical and l^2 regions for SHE and KPZ equation in dimension $d \geq 3$. *arXiv preprint arXiv:2005.12689*, 2020.

[13] A. Dunlap and Y. Gu. A forward-backward sde from the 2d nonlinear stochastic heat equation. *arXiv preprint arXiv:2010.03541*, 2020.

[14] A. Dunlap, Y. Gu, L. Ryzhik, and O. Zeitouni. Fluctuations of the solutions to the KPZ equation in dimensions three and higher. *Probab. Theory Related Fields*, 176(3-4):1217–1258, 2020.

[15] P. Gonçalves and M. Jara. Nonlinear fluctuations of weakly asymmetric interacting particle systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 212(2):597–644, 2014.

[16] Y. Gu. Gaussian fluctuations from the 2D KPZ equation. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, 8(1):150–185, 2020.

[17] Y. Gu and J. Li. Fluctuations of a nonlinear stochastic heat equation in dimensions three and higher. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 52(6):5422–5440, 2020.

[18] Y. Gu, J. Quastel, and L.-C. Tsai. Moments of the 2D SHE at criticality. *arXiv preprint arXiv:1905.11310*, 2019. to appear in Probability and Mathematical Physics,.

[19] Y. Gu, L. Ryzhik, and O. Zeitouni. The Edwards-Wilkinson limit of the random heat equation in dimensions three and higher. *Comm. Math. Phys.*, 363(2):351–388, 2018.

[20] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski. Paracontrolled distributions and singular PDEs. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 3. Cambridge University Press, 2015.

[21] M. Hairer. A theory of regularity structures. *Invent. Math.*, 198(2):269–504, 2014.

[22] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer, 1987.

[23] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9):889, 1986.

[24] A. Kupiainen. Renormalization group and stochastic PDEs. In *Annales Henri Poincaré*, volume 17, pages 497–535. Springer, 2016.

[25] J. Magnen and J. Unterberger. The scaling limit of the KPZ equation in space dimension 3 and higher. *J. Stat. Phys.*, 171(4):543–598, 2018.

[26] C. Mukherjee, A. Shamov, and O. Zeitouni. Weak and strong disorder for the stochastic heat equation and continuous directed polymers in $d \geq 3$. *Electron. Commun. Probab.*, 21:Paper No. 61, 12, 2016.

[27] S. Nakajima and M. Nakashima. Fluctuations of two-dimensional stochastic heat equation and KPZ equation in subcritical regime for general initial conditions. *in preparation*, 2021.

[28] J. Quastel and H. Spohn. The one-dimensional KPZ equation and its universality class. *Journal of Statistical Physics*, 160(4):965–984, 2015.