$\exp(\Phi)_2$-量子場モデルの確率過程量子化と関連する話題 (I)

九州大学大学院数理学研究院　星野 壮登
Masato Hoshino
Faculty of Mathematics, Kyushu University

慶應義塾大学経済学部　河備 浩司
Hiroshi Kawabi
Faculty of Economics, Keio University

京都大学大学院理学研究科　楠岡 誠一郎
Seiichiro Kusuoka
Graduate School of Science, Kyoto University

本稿は, [HKK19, HKK20] に至るまでの研究の背景および (講演では触れることができなかった) 関連した話題を, 細部にこだわらずに整理したものである．本稿の続きの第 2 部として, 2020 年度 RIMS 共同研究「量子場の数理とその周辺」の講究録に寄稿する概説論文があるが, そこで上記の論文で得られた結果の解説を行なう．興味のある読者は必要に応じて 2 編併せて読んで頂きたい.

1　研究の背景

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ 上の超関数の空間 $\mathcal{D}'(\Lambda)$ 上に

$$\mu_U(d\phi) \propto \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\int_\Lambda \Big(m_0^2\phi(x)^2 + |\nabla\phi(x)|_{\mathbb{R}^d}^2 + U(\phi(x))\Big)dx\Big\} \prod_{x\in\Lambda} d\phi(x) \tag{1.1}$$

なる形式的表現をもつ確率測度 μ_U を数学的に構成することは, (Euclid 化された) 構成的場の量子論において主要な問題であり, 今まで多くの数学者を惹き付けてきた．ここで $m_0 > 0$ は質量, 関数 $U = U(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は自由ポテンシャルである．物理としては無限体積の場合 $\Lambda = \mathbb{R}^d$ が重要であるが, 本稿では問題の簡略化のために有限体積の場合 $\Lambda = \mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$ を考える．また記号の簡略化のために質量 $m_0 = 1$ とする．表現 (1.1) における

$$\exp\Big\{ -\frac{1}{2}\int_\Lambda \Big(\phi(x)^2 + |\nabla\phi(x)|_{\mathbb{R}^d}^2 \Big)dx\Big\} \prod_{x\in\Lambda} d\phi(x)$$

(に正規化定数を掛けたもの) は, 平均 0, 共分散 $(1-\Delta)^{-1}$ を持つ $\mathcal{D}'(\Lambda)$ 上の Gauss 測度 μ_0 として数学的に意味を持ち, Gauss 自由場と呼ばれる．$d = 1$ の場合は, ϕ は μ_0 の下

で Ornstein-Uhlenbeck 過程となるので μ_0 は連続関数空間の上に台を持つ．その一方で, $d \geq 2$ の場合は, μ_0 の台が連続関数の空間に収まらず, ϕ は Λ 上の超関数になってしまうために, $U(\phi(x))$ にどう意味をつけるのかという事が問題となる．これは超関数どうしの積が一般には定義できないことから由来する問題であるが, この難点を克服し μ_U を数学的に厳密に構成するためには, 無限大の除去, すなわち繰り込みの操作が必要となる．

まず $d=2$, $U(\tau)=\tau^{2m}$ $(\tau \in \mathbb{R}, m=2,3,\dots)$ の場合を考えてみる．この場合は, Gauss 測度 μ_0 に関する Wiener-Itô 分解 $L^2(\mu_0)=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_n$ の $2m$ 次 Wiener カオス $\mathcal{C}_{2m}$ の元として, $2m$ 次 Wick 積 $(\phi^{2m})^{\diamond}(x)$ が定義されるが, これが $\phi(x)^{2m}$ に $\mathbb{E}^{\mu_0}[\phi(x)^2]=\infty$ による繰り込みを施したものに相当する．実際に低次の Wick 積を形式的に書き下すと,

$$
\begin{aligned}
(\phi^2)^{\diamond}(x) &= \phi(x)^2 - \mathbb{E}^{\mu_0}[\phi(x)^2] = \phi(x)^2 - \infty,\\
(\phi^3)^{\diamond}(x) &= \phi(x)^3 - 3\mathbb{E}^{\mu_0}[\phi(x)^2]\phi(x) = \phi(x)^3 - 3\infty\phi(x),\\
(\phi^4)^{\diamond}(x) &= \phi(x)^4 - 6\mathbb{E}^{\mu_0}[\phi(x)^2]\phi(x)^2 + 3\mathbb{E}^{\mu_0}[\phi(x)^2]^2 = \phi(x)^4 - 6\infty\phi(x)^2 + 3\infty
\end{aligned}
$$

となる．またこの繰り込みの影響により, τ^{2m} が凸関数にも関わらず, Wick 積 $(\phi^{2m})^{\diamond}$ は下に有界ではなくなることに注意したい．これは $d=1$ の場合との大きな違いである．ただし, Nelson 評価 (Wick 積 $(\phi^{2m})^{\diamond}$ が $-\infty$ に近い確率は指数的に小さい) を用いると,

$$
0 < Z_{\mathsf{pol}}^{(2m)} := \int_{\mathcal{D}'(\Lambda)} \exp\Big(- \int_{\Lambda} (\phi^{2m})^{\diamond}(x)dx \Big)\mu_0(d\phi) < \infty
$$

が得られるので, 形式的表現 (1.1) をもつ $\mu_U = \mu_{\mathsf{pol}}^{(2m)}$ は, 重み付き Gauss 測度

$$
\mu_{\mathsf{pol}}^{(2m)}(d\phi) = \frac{1}{Z_{\mathsf{pol}}^{(2m)}} \exp\Big(- \int_{\Lambda} (\phi^{2m})^{\diamond}(x)dx \Big)\mu_0(d\phi)
$$

として厳密に定義される．この測度が (有限体積)Φ_2^{2m}-量子場, もしくは $P(\Phi)_2$-量子場と呼ばれるものであり, 今まで色々なことが分かっている (標準的な文献 [Sim74, GJ86, 江新 88] には, この量子場に関しての色々な性質がまとめられている).

その一方で, Φ_3^4-量子場 ($d=3$, $U(\tau)=\tau^4$ の場合の μ_U) を構成するためには, 4 次 Wick 積 $(\phi^4)^{\diamond}$ に更なる繰り込みの操作を行うことが必要となり, その際に Feynman diagram を用いたややこしい計算を要したりする．この量子場の静的な構成法は [Fel74, Sok82, BFS83] などを始めとしていくつか知られているが, それぞれの手法で構成された Φ_3^4-量子場が一致しているのかという根本的問題を始めとして分かっていない事は未だ多い.

さて, [PW81] により提唱された**確率過程量子化プログラム (Stochastic Quantization Program)** とは, “無限次元空間上に与えられた確率測度を不変測度として持つような Markov 過程 (の族) を構成せよ．またこの Markov 過程 (の族) のエルゴード性を示すことで, 逆にもとの測度の性質を調べよ” と言う動的な問題意識だと端的にまとめることができるが, これより数年前に出た無限次元空間上の Dirichlet 形式の記念碑的な論文 [AH77] と共に構成的場の量子論の確率解析的研究の原動力となった．Φ_2^{2m}-モデルに対しての確率過程量子化を確率偏微分方程式の立場から数学的に最初に論じた [JM85] では ($m=2$ の場合に限定しているが), $\mu_{\mathsf{pol}}^{(2m)}$ を不変測度として持つ Sobolev 空間 $H^{-1}(\Lambda)$ 値 Markov 過程が, 修正された Φ_2^{2m}-確率 (過程) 量子化方程式

$$
\begin{aligned}
\partial_t \Phi_t(x) = &-\frac{1}{2}(1-\Delta)^{1-\gamma}\Phi_t(x) - m(1-\Delta)^{-\gamma}(\Phi_t^{2m-1})^{\diamond}(x)\\
&+ (1-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}}\dot{W}_t(x), \quad t>0,\ x\in\Lambda \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

の弱解として構成された．ここで $\dot{W}=(\dot{W}_t(x))_{x\in\Lambda,t\geq 0}$ は白色雑音, すなわち $L^2(\Lambda)$-柱状 Brown 運動 $W=(W_t(x))_{x\in\Lambda,t\geq 0}$ の時間微分であり, パラメータ $\gamma\geq 0$ は (1.2) を駆動するノイズおよびドリフト項の特異性を弱める働きを意味する．[JM85] およびそれに引き続く [BCM88] などのいくつかの論文では, $1-\frac{1}{2m^2+2}<\gamma<1$ の条件の下で, (1.2) の弱解が Ornstein-Uhlenbeck 過程の分布測度の Girsanov 変換を通して構成された．また [BCM88] では Dirichlet 形式

$$\mathcal{E}(F)=\frac{1}{2}\int_{H^{-1}(\Lambda)}\Big((1-\Delta)^{-\gamma}D_{L^2}F(\phi),D_{L^2}F(\phi)\Big)_{L^2(\Lambda)}\mu^{(2m)}_{\mathsf{pol}}(d\phi) \tag{1.3}$$

との関係も指摘されたが, これらの論文の正当化および結果の更なる改良が, 無限次元空間上の Dirichlet 形式の 1980 年代後半の研究の動機の一つであったことは間違いなく, 実際に 1990 年代に大きな進展が見られた．その中でも, Dirichlet 形式を通した無限次元空間上の Girsanov 変換が [ARZ93] で確立され, Dirichlet 形式 (1.3) の生成作用素の拡大の一意性問題が, 上記の γ の条件より緩い $\frac{1}{2}<\gamma<1$ の下で, [LR98] にて肯定的に解決された事は注目に値する．なおこれらの進展を俯瞰する概説論文として [AMR15] を勧めたい．

また [AR91] で確立された一般論により, 物理としてはより自然な白色雑音が駆動する本来の Φ^{2m}_2-確率量子化方程式 ($\gamma=0$ の場合の (1.2))

$$\partial_t\Phi_t(x)=\frac{1}{2}(\Delta-1)\Phi_t(x)-m(\Phi_t^{2m-1})^\diamond(x)+\dot{W}_t(x),\quad t>0,\ x\in\Lambda, \tag{1.4}$$

の弱解が, Dirichlet 形式を通して (有限体積だけでなく無限体積の場合にも) 構成されたのは特筆すべきことである (これと同様な結果は, [MR99] でも得られている)．その一方でドリフト項の特異性により [DZ92] のような既存の確率偏微分方程式の理論の枠組みでは (1.4) の pathwise uniqueness を示す事ができずに, 強解の構成に関してはしばらくの間, 進展が見られなかった．なお $d=1$ の場合は, 繰り込みが不要なため, $U'(\tau)=2m\tau^{2m-1}$ の単調性がドリフト項にそのまま遺伝する．このような事情により, (無限体積の場合でも) このタイプの確率偏微分方程式の強解の一意存在が [Iwa87] で示され, 対応する Dirichlet 形式の生成作用素の拡大の一意性問題も [KR07, AKR12] で解決されている．

さて $d=2$ の場合に話を戻す．上記のような閉塞した状況に風穴を開け (1.4) の強解の構成を行なったのが [DPD03] である．この論文では (1.4) を, Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$\partial_t X_t(x)=\frac{1}{2}(\triangle-1)X_t(x)+\dot{W}_t(x),$$

とその摂動 Y に分解して, Y がみたす方程式 (shifted equation)

$$\partial_t Y_t(x)=\frac{1}{2}(\triangle-1)Y_t(x)-m\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(2m-1)!}{k!(2m-1-k)!}(X_t^k)^\diamond(x)Y_t(x)^{2m-1-k} \tag{1.5}$$

の局所解を, 適当な (負の指数を持つ)Besov 空間上の縮小写像の原理を用いて構成し, 最後に $\Phi=X+Y$ のアプリオリ評価を用いて大域解の一意存在を示している．$d=2$ の場合は, Ornstein-Uhlenbeck 過程の特異性がそれほど悪くないために, (1.5) の右辺第二項に現れる “超関数と関数の積” に Besov 空間の multiplicative inequality を通して意味が付くというのがポイントである．この方法は現在では Da Prato–Debussche trick と呼ばれている

が, その後, $P(\Phi)_2$-確率量子化方程式に関連する諸問題 (無限体積の場合 [MW17a], 解のエルゴード性 [RZZ17b, TW18], Dirichlet 形式から定まる拡散過程との同定 [RZZ17a], 複素 Ginzburg-Landau 方程式 [Mat20] など) に応用されていった.

しかし, $d=3$ の場合は Ornstein-Uhlenbeck 過程の特異性が上がるために, Φ^4_3-確率量子化方程式の時間局所解を構成するためには Da Prato–Debussche trick では不十分で, Hairer による正則構造理論 [Hai14] もしくは Gubinelli–Imkeller–Perkowski による paracontrolled calculus [GIP15] などに基づく更なる繰り込みの操作が必要となる. 特異確率偏微分方程式に対するこれら新理論のその後の発展の中で, [MW17b] において時間大域解が構成され一意性も示された. またこの流れに並行した複素 Ginzburg-Landau 方程式の研究 [HIN17, Hos18] もある. なお [AK20] で提唱された Φ^4_3-確率量子化方程式の定常解の構成法は, 既存の (静的) 構成法とは全く異なる Φ^4_3-量子場の新たな動的構成法を与え, その後の [GH18] などに影響を与えたことを述べておく.

2 $\exp(\Phi)_2$-量子場モデルと Gauss 乗法カオス

ここでは, 電荷定数 α を持つ $\Lambda=\mathbb{T}^2$ 上の $\exp(\Phi)_2$-量子場モデル (もしくは $\exp(\alpha\Phi)_2$-量子場モデル) を導入する. これは相対論的場の量子論の研究の中で Høegh-Krohn [Høe71] により提唱され, [AH74] において, 形式的表現 (1.1) の $d=2, U(\tau)=\exp(\alpha\tau)$ の場合に相当する $\mathcal{D}'(\Lambda)$ 上の確率測度として構成された量子場モデルであることから, Høegh-Krohn モデルとも呼ばれている. このモデルに関しては $\boldsymbol{L^2}$**-regime:** $\boldsymbol{|\alpha|<\sqrt{4\pi}}$ の場合は, 1970 年代に (例えば [AH73, AH74, AH80] などにおいて) 色々なことが調べられており, [Sim74] では $P(\Phi)_2$-モデルの技術的困難を取り除いた 2 次元量子場の理想的な toy model として紹介されている. また [AHT81] において, Riemann 多様体上の写像がなす無限次元の群の既約表現との関連も指摘されている. またすぐ後でも述べるが, 2 次元量子重力理論の進展と共に, Kahane [Kah85] による Gauss 乗法カオスの話が再び注目を浴びている. 近年, この周辺の研究が (欧米を中心に) 活発に行なわれているが, $\exp(\Phi)_2$-量子場モデルはこれとも密接に関わっている. この方面の研究の大まかな流れや最新の話題を知るには [RV14, Ber16, 香取 20] などに目を通すと良い.

この量子場モデルでも $P(\Phi)_2$-量子場と同様な発散の問題が生じるために繰り込みの操作が必要で, $\exp(\alpha\phi(x))$ から無限大 $\mathbb{E}^{\mu_0}\left[\phi(x)^2\right]$ の除去を行なった指数 Wick 積を (形式的には)

$$\exp^{\diamond}(\alpha\phi)(x) := \exp\Big(\alpha\phi(x)-\frac{\alpha^2}{2}\mathbb{E}^{\mu_0}\left[\phi(x)^2\right]\Big), \quad x\in\Lambda \tag{2.1}$$

と定義する. また Gauss 乗法カオス (もしくは Liouville 測度) とは, 形式的には

$$M^{(\alpha)}_{\phi}(dx) := \exp^{\diamond}(\alpha\phi)(x)dx$$

で与えられる (2 次元 Lebesgue 測度 dx と特異な) Λ 上のランダムな測度のことである. すると, (有限体積) $\exp(\Phi)_2$-量子場 $\mu^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}}$ は重み付き Gauss 測度

$$\mu^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}}(d\phi) = \frac{1}{Z^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}}}\exp\big(-M^{(\alpha)}_{\phi}(\Lambda)\big)\mu_0(d\phi) \tag{2.2}$$

として定義される. ただし,

$$Z^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}} := \int_{\mathcal{D}'(\Lambda)}\exp\big(-M^{(\alpha)}_{\phi}(\Lambda)\big)\mu_0(d\phi)$$

は正規化定数であるが, $\exp^\diamond(\alpha\phi)$ が非負な超関数であることから $0 \le \exp(-M_\phi^{(\alpha)}(\Lambda)) \le 1$ となり, $0 < Z_{\mathsf{exp}}^{(\alpha)} < \infty$ が容易に分かる. これは $P(\Phi)_2$-モデルとの大きな違いである. この定義から, $\exp(\Phi)_2$-量子場の構成と (正質量 (massive) の場合の)Gauss 乗法カオスの構成は本質的に同じ問題であることが伺える.

ここで, $\mathbb{E}^{\mu_0}\big[\phi(x)^2\big]$ の ∞ への発散の度合いについてコメントしておきたい. $L^2(\Lambda)$ の標準的な Fourier 基底 $\{\mathbf{e}_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ を $\mathbf{e}_k(x) = \frac{1}{2\pi}\exp\big(\sqrt{-1}(k,x)_{\mathbb{R}^2}\big)$ $(k \in \mathbb{Z}^2, x \in \Lambda)$ とし, $\phi \in \mathcal{D}'(\Lambda)$ の Fourier 変換 $\langle \phi, \mathbf{e}_{-k}\rangle$ を $\hat{\phi}(k)$ と書く. すると ϕ の N 次 Fourier カットオフは

$$\phi_N(x) := \sum_{|k|\le N} \hat{\phi}(k)\mathbf{e}_k(x), \quad N \in \mathbb{N}, x \in \Lambda$$

で与えられる. これの分散の $N \to \infty$ に応じた発散の度合いは

$$\begin{aligned} C_N := \mathbb{E}^{\mu_0}\big[\phi_N(x)^2\big] &= G_N(0) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\Big(\sum_{|k|\le N}\frac{1}{1+|k|^2}\Big) \sim \frac{1}{2\pi}\log N \end{aligned}$$

となる. ただし

$$G_N(x-y) := \mathbb{E}^{\mu_0}\big[\phi_N(x)\phi_N(y)\big] = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le N}\frac{1}{1+|k|^2}\mathbf{e}_k(x-y), \quad x, y \in \Lambda$$

は $(1-\Delta)$ の Green 関数 $G(x-y) := \mathbb{E}^{\mu_0}[\phi(x)\phi(y)]$ の近似関数である. また Green 関数 G の原点付近での特異性が $G(x) \sim -\frac{1}{2\pi}\log|x|$ であることを用いると,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mu_0}\big[(M_{\phi_N}^{(\alpha)}(\Lambda))^2\big] &= \int_\Lambda\int_\Lambda dxdy\exp(\alpha^2 C_N^2)\mathbb{E}^{\mu_0}\big[\exp\{\alpha(\phi_N(x)+\phi_N(y))\}\big] \\ &= \int_\Lambda\int_\Lambda dxdy\exp(\alpha^2 G_N(x-y)) \\ &\sim \int_\Lambda\int_\Lambda dxdy|x-y|^{-\alpha^2/2\pi} \end{aligned}$$

と大雑把に計算でき, 右辺の積分が収束するためには, $\frac{\alpha^2}{2\pi} < 2$ すなわち $|\alpha| < \sqrt{4\pi}$ とならねばならないことが見て取れる. これが L^2-regime として $\sqrt{4\pi}$ という定数が出てくる理由であり, 実際にこの条件の下で, $M_\phi^{(\alpha)}(\Lambda) = \lim_{N\to\infty} M_{\phi_N}^{(\alpha)}(\Lambda)$ in $L^2(\mu_0)$ が容易に分かる. また $H^s(\Lambda) = (1-\Delta)^{-s/2}(L^2(\Lambda))$, $s \in \mathbb{R}$ を Λ 上の L^2-Sobolev 空間とすると,

$$M_\phi^{(\alpha)}(dx) \in L^p(\mu_0; H^{-\beta}(\Lambda)), \quad p \ge 2,\ \frac{\alpha^2}{4\pi}(p-1) < \beta < 1 \tag{2.3}$$

や,

$$M_\phi^{(\alpha)}(dx) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{n!}(\phi^n)^\diamond(x)dx \quad \text{in } L^2(\mu_0; H^{-\beta}(\Lambda)), \quad \frac{\alpha^2}{4\pi} < \beta < 1$$

などが Wiener-Itô 分解の帰結として得られる. 詳細は [HKK19, Theorem 2.2] や [AKMR20, Theorem 3.4] をご覧頂きたい. なお [CJ14] において, $d = 4$ の場合でも Gauss 自由場 μ_0 の

共分散を $(1-\Delta^2)^{-1}$ に取り替えれば, 上記で述べた議論と並行した Gauss 乗法カオスの理論を展開できることが示されている.

さて, (2.2) の右辺の exp の肩にのっている $M_\phi^{(\alpha)}(\Lambda)$ が ϕ の関数として μ_0-可積分であれば, $\exp(\Phi)_2$-量子場 $\mu_{\mathsf{exp}}^{(\alpha)}$ は定義可能である. とりあえず $\mathbb{E}^{\mu_0}[M_{\phi_N}^{(\alpha)}(\Lambda)]$ を計算してみると, (よく考えれば当然の事であるが) N によらない定数 $4\pi^2$ となる. 実際には $\mathbb{E}^{\mu_0}[(M_{\phi_N}^{(\alpha)}(\Lambda))^{1+\varepsilon}]$ の N によらない一様評価 (すなわち一様可積分性) が得られるような α の条件を求めなくてはならない. この条件こそが, Gauss 乗法カオスに関する近年の研究では頻繁に見かける $\boldsymbol{L^1}$**-regime:** $\boldsymbol{|\alpha| < \sqrt{8\pi}}$ であり, 実際に Kahane は [Kah85] において, この条件の下で, ランダムな Λ 上の非負 Borel 測度の列 $\{M_{\phi_N}^{(\alpha)}(dx)\}_{N=1}^\infty$ が極限 $M_\phi^{(\alpha)}(dx)$ を持つ事を (本質的に) 示している. 証明は, Kahane's convexity inequality と呼ばれる exp 関数の凸性から導かれる Gauss 測度に関する比較不等式とマルチンゲール収束定理の議論を組み合わせたものであり, 上記で述べたような L^2-regime の場合のソフトな関数解析的な議論とは趣が異なる. なお L^1-regime の場合の $\exp(\Phi)_2$-量子場は, [Kah85] とは全く独立に [Kus92] においても構成されており, この周辺の話題が [佐玉 92] でも紹介されている.

Kahane の結果の収束の意味の改良, さらには (Fourier カットオフに限らない) ϕ の近似列の取り方の一般化は, その後 (主に零質量 (massless) の場合に), [RV10, DS11, Sha16, Ber17] などでなされている. その一方で, Gauss 乗法カオス $M_\phi^{(\alpha)}(dx)$ が, L^1-regime の場合にどれくらいの正則性をもつ超関数なのかという問題にはあまり注意が払われてこなかったようである. 我々はこの問題に対して満足のいく解答を得た. まず $\psi : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ を "よい" 関数とし, 一般化された Fourier カットオフ作用素 $P_N : \mathcal{D}'(\Lambda) \to \mathcal{D}'(\Lambda)$ を

$$(P_N\phi)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \psi(2^{-N}k)\hat{\phi}(k)\mathbf{e}_k(x), \quad N \in \mathbb{N}, x \in \Lambda$$

で定める. 特に $\psi = \mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R}^2;|x|\le 1\}}$ と置くと, $P_N\phi = \phi_{2^N}$ が分かる. また $P_N : H^{-1-\varepsilon}(\Lambda) \to C(\Lambda)$ となることも, ψ が "よい" 関数であることから従う. 次に, 近似された指数 Wick 積を

$$\exp_N^\diamond(\alpha\phi)(x) := \exp\Big(\alpha(P_N\phi)(x) - \frac{\alpha^2}{2}\mathbb{E}^{\mu_0}\big[(P_N\phi)(x)^2\big]\Big), \quad x \in \Lambda$$

と定める. また $B_{p,q}^s(\Lambda)$, $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1,\infty]$ を, Λ 上の非斉次 Besov 空間とする. $H^s(\Lambda) = B_{2,2}^s(\Lambda)$ に注意しておく. このとき [HKK20, Theorem 2.1] において以下の結果を得た.

Theorem 2.1 *Let* $|\alpha| < \sqrt{8\pi}$ *and choose parameters* p, β *such that*

$$p \in \left(1, \frac{8\pi}{\alpha^2} \wedge 2\right), \qquad \beta \in \left(\frac{\alpha^2}{4\pi}(p-1), \frac{2}{p}(p-1)\right).$$

Then the sequence $\{\exp_N^\diamond(\alpha\phi)\}_{N=1}^\infty$ *converges in the space* $B_{p,p}^{-\beta}(\Lambda)$*,* μ_0*-almost surely and in* $L^p(\mu_0)$*. Moreover, by regarding* $\exp_N^\diamond(\alpha\phi)$ *as the random nonnegative Borel measure* $\exp_N^\diamond(\alpha\phi)(x)dx$ *on* Λ *for* $N \in \mathbb{N}$, *one has the weak convergence of* $\{\exp_N^\diamond(\alpha\phi)\}_{N=1}^\infty$ *almost surely. The limits obtained by different* ψ*'s coincide with each other almost surely.*

この定理により存在が保証された $\{\exp_N^\diamond(\alpha\phi)\}_{N=1}^\infty$ の極限こそが, (2.1) で形式的に導入された指数 Wick 積 $\exp^\diamond(\alpha\phi)$ であり, $L^p(\mu_0; B_{p,p}^{-\beta}(\Lambda))$ の元であることが分かる. よって L^1-regime の場合も $\exp(\Phi)_2$-量子場 $\mu_{\mathsf{exp}}^{(\alpha)}$ は存在する. またこの定理より, Radon-Nikodym 微分 $\frac{d\mu_{\mathsf{exp}}^{(\alpha)}}{d\mu_0}(\phi)$ が μ_0-a.s. ϕ で正であることが分かる. $\frac{d\mu_{\mathsf{exp}}^{(\alpha)}}{d\mu_0}$ が上から有界であることと併せると, $\mu_{\mathsf{exp}}^{(\alpha)}$ が Gauss 自由場 μ_0 と同値な確率測度であることも分かる.

3 $\exp(\Phi)_2$-量子場モデルの確率過程量子化へ向けて

本稿 (第 1 部) を終えるにあたり, $\exp(\Phi)_2$-量子場 $\mu^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}}$ の確率過程量子化の初期の歴史および, L^1-regime: $|\alpha| < \sqrt{8\pi}$ の場合に生じる困難について簡単にまとめておきたい. 先の章でも述べたが, 初期の研究において $\exp(\Phi)_2$-量子場が $P(\Phi)_2$-量子場の toy model であるという側面が目立ってしまった事もあり, 確率量子化方程式はそれほど真剣に考えられていなかった印象を持つ. ただし Albeverio と Röckner らによる 1990 年前後に出版された無限次元空間上の Dirichlet 形式に関する多くの論文の中では, $P(\Phi)_2$-量子場と (L^2-regime: $|\alpha| < \sqrt{4\pi}$ の場合の) $\exp(\Phi)_2$-量子場が常に例として扱われており, Dirichlet 形式

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2}\int_{H^{-\beta}(\Lambda)} \Big((1-\Delta)^{-\gamma} D_{L^2}F(\phi), D_{L^2}F(\phi)\Big)_{L^2(\Lambda)} \mu^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}}(d\phi), \quad \beta > 0,\ 0 \le \gamma < 1 \quad (3.1)$$

に対応する (修正された)$\exp(\Phi)_2$-確率量子化方程式

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi_t(x) = -\frac{1}{2}(1-\Delta)^{1-\gamma}\Phi_t(x) - \frac{\alpha}{2}(1-\Delta)^{-\gamma}\exp^{\diamond}(\alpha\Phi_t(x)) \\ + (1-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}}\dot{W}_t(x), \quad t > 0,\ x \in \Lambda\end{aligned}$$

の弱解は得られていたことになる. なお Dirichlet 形式 (3.1) の可閉性の証明において, 対数微分として現れる指数 Wick 積 $\exp^{\diamond}(\alpha\phi)$ の $L^2(\mu^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}})$-可積分性が必要であるが, $\frac{d\mu^{(\alpha)}_{\mathsf{exp}}}{d\mu_0}$ が上から有界なので, $L^2(\mu_0)$-可積分性 (2.3) を用いればよい. なお [AKMR20] では, この量子場モデルおよび $\cos(\Phi)_2$-量子場モデル (sine-Gordon model) 両方について, Dirichlet 形式の生成作用素の L^p-拡大の一意性が成り立つような α, β, p の条件を調べている.

その一方で L^1-regime の場合は, 今述べたような簡単な議論では Dirichlet 形式 (3.1) の可閉性は示せない. なぜならば $|\alpha|$ が $\sqrt{8\pi}$ に近い場合は, $\exp^{\diamond}(\alpha\phi)$ の μ_0 についての可積分性が $L^{1+\varepsilon}$ しか稼げないことが Theorem 2.1 より分かるからである. ゆえにこの場合の Dirichlet 形式の可閉性, さらには対応する拡散過程の存在の証明はそれほど自明なことではない. また, 本来の $\exp(\Phi)_2$-確率量子化方程式

$$\partial_t \Phi_t(x) = \frac{1}{2}(\triangle - 1)\Phi_t(x) - \frac{\alpha}{2}\exp^{\diamond}\big(\alpha\Phi_t\big)(x) + \dot{W}_t(x), \qquad t > 0,\ x \in \Lambda,$$

の強解についての研究は, (massless の場合の)[Gar20] (プレプリントが出たのは 2018 年) まで長い間なされてなかった. $\exp(\Phi)_2$-確率量子化方程式と $\Phi^4_{2+(\alpha^2/4\pi)}$-確率量子化方程式が同程度の特異性を持っているために, [DPD03] の適用範囲を大きく越えてしまっているのがその理由の一つである. 我々が [HKK19, HKK20] において, これらの困難をどのように克服してこの特異確率偏微分方程式を解いたかについての解説は第 2 部で行いたい.

References

[AH73] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn: *Uniqueness of the physical vacuum and the Wightman functions in the infinite volume limit for some non-polynomial interactions*, Comm. Math. Phys. **30** (1973), pp. 171–200.

[AH74] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn: *The Wightman axioms and the mass gap for strong interactions of exponential type in two-dimensional space-time*, J. Funct. Anal. **16** (1974), pp. 39–82.

[AH77] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn: *Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **40** (1977), pp. 1–57.

[AH80] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn: *Martingale convergence and the exponential interaction in* $\mathbb{R}^n$, in "Quantum fields–algebras, processes (Proc. Sympos., Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1978)", pp. 331–353, Springer, Vienna, 1980.

[AHT81] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn and D. Testard: *Irreducibility and reducibility for the energy representation of the group of mappings of a Riemannian manifold into a compact semisimple Lie group*, J. Funct. Anal. **41** (1981), pp. 378–396.

[AKR12] S. Albeverio, H. Kawabi and M. Röckner: *Strong uniqueness for both Dirichlet operators and stochastic dynamics to Gibbs measures on a path space with exponential interactions*, J. Funct. Anal. **262** (2012), pp. 602–638.

[AKMR20] S. Albeverio, H. Kawabi, S.-R. Mihalache and M. Röckner: *Strong uniqueness for Dirichlet operators related to stochastic quantization under exponential/trigonometric interactions on the two-dimensional torus*, preprint (2020), `arXiv:2004.12383`.

[AK20] S. Albeverio and Sei. Kusuoka: *The invariant measure and the flow associated to the* Φ^4_3*-quantum field model*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **20** (2020), pp. 1359–1427.

[AMR15] S. Albeverio, Z.-M. Ma and M. Röckner: *Quasi regular Dirichlet forms and the stochastic quantization problem*, in Festschrift Masatoshi Fukushima, Interdiscip. Math. Sci., **17**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015, pp. 27–58.

[AR91] S. Albeverio and M. Röckner: *Stochastic differential equations in infinite dimensions: Solutions via Dirichlet forms*, Probab. Theory Relat. Fields **89** (1991) pp. 347–386.

[ARZ93] S. Albeverio, M. Röckner and T.S. Zhang: *Girsanov transform for symmetric diffusions with infinite dimensional state space*, Ann. Probab. **21** (1993), pp. 961–978.

[Ber16] N. Berestycki: *Introduction to the Gaussian free field and Liouville quantum gravity*, Lecture note at University of Oxford (2016), 100 pages.

[Ber17] N. Berestycki: *An elementary approach to Gaussian multiplicative chaos*, Electron. Commun. Probab. **22** (2017), no. 27, pp. 1–12.

[BCM88] V.S. Borkar, R.T. Chari and S.K. Mitter: *Stochastic quantization of field theory in finite and infinite volumes*, J. Funct. Anal. **81** (1988), pp. 184–206.

[BFS83] D.C. Brydges, J. Fröhlich and A.D. Sokal: *A new proof of the existence and nontriviality of the continuum* ϕ^4_2 *and* ϕ^4_3 *quantum field theories*, Comm. Math. Phys. **91** (1983), pp. 141–186.

[CJ14] L. Chen and D. Jakobson: *Gaussian free fields and KPZ relation in* $\mathbb{R}^4$, Ann. Henri Poincaré **15** (2014), pp. 1245–1283.

[DPD03] G. Da Prato and A. Debussche: *Strong solutions to the stochastic quantization equations*, Ann. Probab. **31** (2003), pp. 1900–1916.

[DZ92] G. Da Prato and J. Zabczyk: Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1992.

[DS11] B. Duplantier and S. Sheffield: *Liouville quantum gravity and KPZ*, Invent. Math. **185** (2011), pp. 333–393.

[江新 88] 江沢 洋, 新井 朝雄: 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.

[Fel74] J. Feldman: *The* $\lambda\phi_3^4$ *field theory in a finite volume*, Comm. Math. Phys. **37** (1974), pp. 93–120.

[Gar20] C. Garban: *Dynamical Liouville*, J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 108351, pp. 1–54.

[GJ86] J. Glimm and A. Jaffe: Quantum Physics: A Functional Integral Point of View, Springer, Berlin, 1986.

[GH18] M. Gubinelli and M. Hofmanová: *A PDE construction of the Euclidean* Φ_3^4 *quantum field theory*, To appear in Comm. Math. Phys. (Original version: `arXiv:1810.01700`)

[GIP15] M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski: *Paracontrolled distributions and singular PDEs*, Forum Math. Pi **3** (2015), e6, pp. 1–75.

[Hai14] M. Hairer: *A theory of regularity structures*, Invent. Math. **198** (2014), pp. 269–504.

[HS16] M. Hairer and H. Shen: *The dynamical Sine-Gordon model*, Comm. Math. Phys. **341** (2016), pp. 933–989.

[Høe71] R. Høegh-Krohn: *A general class of quantum fields without cut-offs in two space-time dimensions*, Comm. Math. Phys. **21** (1971), pp. 244–255.

[Hos18] M. Hoshino: *Global well-posedness of complex Ginzburg-Landau equation with a space-time white noise*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54** (2018), pp. 1969–2001.

[HIN17] M. Hoshino, Y. Inahama and N. Naganuma: *Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise*, Electron. J. Probab. **22** (2017), No. 104, 68 pages.

[HKK19] M. Hoshino, H. Kawabi and Sei. Kusuoka: *Stochastic quantization associated with the* $\exp(\Phi)_2$*-quantum field model driven by space-time white noise on the torus*, To appear in J. Evol. Equ. DOI Number: `https://doi.org/10.1007/s00028-020-00583-0` (Original version: `arXiv:1907.07921`).

[HKK20] M. Hoshino, H. Kawabi and Sei. Kusuoka: *Stochastic quantization associated with the* $\exp(\Phi)_2$*-quantum field model driven by space-time white noise on the torus in the full* L^1*-regime*, `arXiv:2007.08171`.

[Iwa87] K. Iwata: *An infinite dimensional stochastic differential equation with state space* $C(\mathbf{R})$, Probab. Theory Related Fields **74** (1987), pp. 141–158.

[JM85] G. Jona-Lasinio and P.K. Mitter: *On the stochastic quantization of field theory*, Comm. Math. Phys. **101** (1985), pp. 409–436.

[Kah85] J.-P. Kahane: *Sur le chaos multiplicatif*, Ann. Sci. Math. Québec **9** (1985), pp. 105–150.

[香取 20] 香取 眞理: 複素平面上の Gauss 型自由場と多重 Schramm–Loewner 発展, 京都大学での集中講義の講義ノート (2020), 62 pages.
(`https://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/?research_document`)

[KR07] H. Kawabi and M. Röckner: *Essential self-adjointness of Dirichlet operators on a path space with Gibbs measures via an SPDE approach*, J. Funct. Anal. **242** (2007), pp. 486–518.

[Kus92] S. Kusuoka: *Høegh-Krohn's model of quantum fields and the absolute continuity of measures*, in "Ideas and methods in quantum and statistical physics (Oslo, 1988)", pp. 405–424, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[LR98] V. Liskevich and M. Röckner: *Strong uniqueness for certain infinite-dimensional Dirichlet operators and applications to stochastic quantization*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **27** (1998), pp. 69–91.

[Mat20] T. Matsuda: *Global well-posedness of the two-dimensional stochastic complex Ginzburg-Landau equation with cubic nonlinearity*, preprint (2020), `arXiv:2003.01569`.

[MR99] R. Mikulevicius and B.L. Rozovskii: *Martingale problems for stochastic PDE's*, in: R. Carmona and B.L. Rozovskii (Eds.), Stochastic Partial Differential Equations: Six Perspectives, Math. Surveys Monogr. **64**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 243–325.

[MW17a] J.-C. Mourrat and H. Weber: *Global well-posedness of the dynamic Φ^4 model in the plane*, Ann. Probab. **45** (2017), pp. 2398–2476.

[MW17b] J.-C. Mourrat and H. Weber: *The dynamical Φ^4_3 comes down from infinity*, Comm. Math. Phys. **356** (2017), pp. 673–753.

[PW81] G. Parisi and Y.S. Wu: *Perturbation theory without gauge fixing*, Sci. Sinica **24** (1981), pp. 483–496.

[RV14] R. Rhodes and V. Vargas: *Gaussian multiplicative chaos and applications: A review*, Probab. Surv. **11** (2014), pp. 315–392.

[RV10] R. Robert and V. Vargas: *Gaussian multiplicative chaos and applications revisited*, Ann. Probab. **38** (2010), pp. 605–631.

[RZZ17a] M. Röckner, R. Zhu and X. Zhu: *Restricted Markov uniqueness for the stochastic quantization of $P(\Phi)_2$ and its applications*, J. Funct. Anal. **272** (2017), pp. 4263–4303.

[RZZ17b] M. Röckner, R. Zhu and X. Zhu: *Ergodicity for the stochastic quantization problems on the 2D-torus*, Comm. Math. Phys. **352** (2017), pp. 1061–1090.

[佐玉 92] 佐藤 担, 玉城 政和: パラメータを持つマルチンゲールの一様可積分性, 数理解析研究所講究録 **783**, pp. 122–142, 1992

[Sha16] A. Shamov: *On Gaussian multiplicative chaos*, J. Funct. Anal. **270** (2016), pp. 3224–3261.

[Sim74] B. Simon: The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.

[Sok82] A.D. Sokal: *An alternate constructive approach to the ϕ^4_3 quantum field theory, and a possible destructive approach to ϕ^4_4*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) **37** (1982), pp. 317–398.

[TW18] P. Tsatsoulis and H. Weber: *Spectral gap for the stochastic quantization equation on the 2-dimensional torus*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54** (2018), pp. 1204–1249.