回転不変な Φ^4_3 測度とその流れの構成

京都大学大学院理学研究科　楠岡 誠一郎
Seiichiro Kusuoka
Graduate School of Science, Kyoto University

以前の研究 [1] において, 近年発展している特異確率偏微分方程式の手法を用いることにより, 3 次元トーラス $\mathbb{T}^3$ 上の Φ^4_3 測度とその流れの構成を行った。その後, この手法をユークリッド空間全体 $\mathbb{R}^3$ に対して適用することによって, 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における Φ^4_3 測度とその流れの構成に成功した。この結果は現在準備中の論文 [2] にまとめる予定である。ここではその成果について概説を行う。

Φ^4_3 測度は量子場の理論に現れるもので, 物理学では公理系を満たすものとして定義がなされ, それを元に理論が構成されている。公理系はいくつか考えられているのであるが, 物理における理論にとって十分な公理系の全ての条件を満たす Φ^4_3 測度の存在性は未だ示されていない。存在性のわからないものを元にした理論は存在性が否定された場合に崩れる脆いものであり, また存在性が得られるまでは公理系の正当性にも疑念が残る。そこで, この公理系から始まる公理的場の理論に対し, 構成された量子場から始めて物理にとって十分な理論構成を目指す, 構成的場の理論が生まれた。この研究は構成的場の理論の立場からのものであり, 公理系を満たすような Φ^4_3 測度の構成を目標としている。また量子力学において, 考察する量子場に対応する時間発展を考えるという, 確率量子化という概念がある。場の理論や確率量子化の詳細については [1], [2], [5] の Introduction を参照して欲しい。近年, Hairer 氏による Regularity structure [7] や, Gubinelli 氏らによる paracontrolled calculus [6] といった革新的なアイデアにより, Φ^4_3 確率量子化方程式のような Wick 積よりも高階の繰り込みを伴うような確率偏微分方程式を解くことができるようになった。以前の研究 [1] ではこれらの手法を用いることによって, $\mathbb{T}^3$ 上の Φ^4_3 測度とその流れの構成を行った。特に, [1] では形式的に記述された Φ^4_3 測度の相互作用の平滑化により Φ^4_3 測度の近似列を定め, その近似測度の確率量子化を経由して極限の確率測度を構成している。[1] では格子による離散近似は行わず, 連続な空間 $\mathbb{T}^3$ のまま近似を行っていることを注意として述べておく。

ここで説明する [2] では, この [1] における手法を $\mathbb{R}^3$ における Φ^4_3 測度に適用するのであるが, その際には様々な困難が生じる。まずは [2] における設定の説明を行う。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ と $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ をそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 上のシュワルツクラスの関数空間とシュワルツ超関数の空間とする。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ と $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ の元のペアリングを $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と書くことにする。$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ をそれぞれフーリエ変換と逆フーリエ変換に対応する作用素とする。次に, 重み付きベゾフ空間とパラプロダクトの定義を与える。$\chi, \varphi \in C_0^\infty([0,\infty);[0,1])$ を次

を満たすものとする。

$$\chi(r)+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi(2^{-j}r)=1,\quad r\in[0,\infty),$$
$$\varphi(2^{-j}r)\varphi(2^{-k}r)=0,\quad r\in[0,\infty),\ j,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\text{ s.t. }|j-k|\geq 2,$$
$$\chi(r)\varphi(2^{-j}r)=0,\quad \xi\in\mathbb{R}^3,\ j\in\mathbb{N}.$$

この χ,φ を用いて, dyadic blocks $\{\Delta_j; j\in\mathbb{N}\cup\{-1,0\}\}$ を

$$\Delta_{-1}f:=\chi\left(\sqrt{-\triangle}\right)f,\quad \Delta_j f:=\varphi\left(2^{-j}\sqrt{-\triangle}\right)f,\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

で定める。このとき

$$\Delta_{-1}f=\mathcal{F}^{-1}\left(\chi(|\cdot|)\mathcal{F}f\right),\quad \Delta_j f=\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi(2^{-j}|\cdot|)\mathcal{F}f\right),\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$
$$f=\sum_{j=-1}^{\infty}\Delta_j f$$

となっている。つまり, $\{\Delta_j\}$ はフーリエ変換の空間で局所化するような, 関数 (超関数) の分解に当たる作用素の族である。特に, Δ_j は φ のスケーリング $\varphi(2^{-j}|\cdot|)$ で定められていて, これが関数の正則性をスケーリングを用いて議論できる理由であり, またパラプロダクトの計算で使い易い理由でもある。

$\nu(x)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の至るところ正値をとる関数とし, ν で重みを付けた L^p 空間 $L^p(\nu)$ を $L^p(\mathbb{R}^3;\nu dx)$ で定める。これらを用いて重み付きベゾフノルム $\|\cdot\|_{B^s_{p,r}}$ とベゾフ空間 $B^s_{p,r}$ $(s\in\mathbb{R},\,p,r\in[1,\infty])$ を

$$\|f\|_{B^s_{p,r}(\nu)}:=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{j=-1}^{\infty}2^{jsr}\|\Delta_j f\|^r_{L^p(\nu)}\right)^{1/r}, & r\in[1,\infty),\\ \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{N}\cup\{-1,0\}}2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p(\nu)}, & r=\infty,\end{cases}$$
$$B^s_{p,r}(\nu):=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3);\|f\|_{B^s_{p,r}(\nu)}<\infty\}$$

で定める。ここで, 重み付きベゾフ空間の定義は複数あり, 同様に特異確率偏微分方程式を用いて $\mathbb{R}^3$ における Φ^4_3 モデルの確率量子化方程式について議論している論文 [4] において用いられている重み付きベゾフ空間とは異なることを注意として述べておく。ベゾフ空間は定義が複雑であるが, これは実解析的に良い空間である一方で, ソボレフ空間と大きくは変わらない。実際, $s\in\mathbb{R}$ と $p\in[1,\infty]$ に対して, 重み付きソボレフ空間を $W^{s,p}(\nu)$ と定めると, 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\nu)\subset B^s_{p,1}(\nu)\subset W^{s,p}(\nu)\subset B^s_{p,\infty}(\nu)$$

が成り立つ。議論の途中でパラプロダクトが出てくるため, ここではパラプロダクトと対応するベゾフ空間を用いて議論を進める。簡単のため $B^s_{p,\infty}(\nu)$ を $B^s_p(\nu)$ と書くことにする。パラプロダクトを定義するため, 作用素 S_j を

$$S_j f := \sum_{k=-1}^{j-1} \Delta_k f, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

で定め, 数式の簡略化のため $\Delta_{-2} f := 0$, $S_{-1} f := 0$ とする。パラプロダクトとレゾナンス項を次で与える。

$$f \circledless g := \sum_{j=-1}^{\infty} S_j f \Delta_{j+1} g, \quad f \circledgtr g := g \circledless f,$$
$$f \circleddash g := \sum_{j=-1}^{\infty} \Delta_j f \left(\Delta_{j-1} g + \Delta_j g + \Delta_{j+1} g\right).$$

$\circledless$ と $\circledgtr$ はパラプロダクトと呼ばれるものであり, $\circleddash$ はレゾナンス項と呼ばれるものである。簡単のため, 全てまとめてパラプロダクトと呼ぶことにする。このとき, 次の分解が成り立つ。

$$fg = f \circledless g + f \circleddash g + f \circledgtr g$$

これは Bony 分解と呼ばれるものである。これは Φ^4_3 モデルの確率量子化方程式の変形で現れる。この Bony 分解を用いることにより, 関数や超関数の積の正則性を詳細に調べることができる。

Φ^4_3 測度の近似列を用意するために関数 ψ と ρ を次のように用意する。ψ を $\mathbb{R}^3$ 上の非負値 C^∞ 級関数で, $|\xi| \le 1$ のとき $\psi(\xi) = 1$, $|\xi| \ge 2$ のとき $\psi(\xi) = 0$, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^3$ に対して $\psi(\xi) = \psi(-\xi)$ を満たすものとし, ρ もまた $\mathbb{R}^3$ 上の非負値 C^∞ 級関数で, $|x| \le 1$ において $\rho(x) = 1$, $|x| \ge 2$ において $\rho(x) = 0$ を満たすものとする。$M, N \in \mathbb{N}$ に対して, $\psi_N(\cdot) := \psi(2^{-N}\cdot)$, $\rho_M(\cdot) := \rho(M^{-1}\cdot)$ と定め, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 上の作用素 P_N, $P_{M,N}$, $P^*_{M,N}$ を, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$\begin{aligned} P_N f(x) &:= \mathcal{F}^{-1}\left[\psi_N(\mathcal{F}f)\right](x), \\ P_{M,N} f(x) &:= \rho_M(x) P_N f(x), \\ P^*_{M,N} f(x) &:= P_N(\rho_M f)(x) \end{aligned}$$

で定める。ここで, $P^*_{M,N}$ は $P_{M,N}$ の $L^2(dx)$ における双対作用素であることに注意する。$P_{M,N}$ が Φ^4_3 測度を近似するために用意した近似作用素に当たる。

以上の準備の下, Φ^4_3 測度の近似列を用意する。本来はどのように繰り込み定数を定めるのかも含めて問題となるが, ここではあらかじめ繰り込み定数を指定して近似列を与える。$\lambda \in (0, \infty)$ を固定する。λ はカップリング定数と呼ばれるものであ

る。$m_0 \in (0,\infty)$ も固定する。これは自由場の mass に当たる定数である。繰り込み定数 $C_1^{(N)}$ と $C_2^{(M,N)}$ を次で定める。

$$
\begin{aligned}
C_1^{(N)} &:= \left\langle [2(m_0^2 - \triangle)]^{-1} P_N^2 \delta_0, \delta_0 \right\rangle, \\
C_2^{(M,N)}(x) &:= 2 \sum_{i,j=-1}^{\infty} \mathbb{I}_{[-1,1]}(i-j) \\
&\quad \times \int_0^\infty \left\langle [2(m_0^2 - \triangle)]^{-1} e^{t(\triangle - m_0^2)} \left(\rho_M^2 \Delta_i \delta_x \right), \rho_M^2 e^{t(\triangle - m_0^2)} P_N^2 \Delta_j \delta_x \right\rangle^2 dt.
\end{aligned}
$$

ここで, δ_x はディラックのデルタ関数, $\triangle$ は $\mathbb{R}^3$ におけるラプラス作用素である。$C_1^{(N)}$ はWick積から現れる1つ目の繰り込み定数であり, M や x には依存しない。一方, 2つ目の繰り込みから現れる $C_2^{M,N}(x)$ は M や x にも依存していることに注意する。また, 2つ目の繰り込み定数は, 特異確率偏微分方程式の手法によると Ornstein-Uhlenbeck 過程の多項式のレゾナンス項から現れる発散項に対する繰り込みとして現れるため, dyadic blocks $\{\Delta_j\}$ にも依存していることに注意。トーラスの場合と比べると複雑になっているように見えるが, これは $\mathbb{R}^3$ で考えているためフーリエ展開が使えず和の形で書けないことと, 局所化による関数 ρ_M が混ざることに起因するものであり, トーラスの場合と大きな違いはない。実際, トーラスの場合と同様に次のような漸近的挙動をもつことが分かる。

命題 1. 正の定数 c_1, c_2, c_3 が存在して

$$
\begin{aligned}
&c_1 2^N \le C_1^{(N)} \le c_2 2^N, \quad N \in \mathbb{N}, \\
&0 \le C_2^{(M,N)}(x) \le c_3 N = \frac{c_3}{\log 2} \cdot \log 2^N, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ M, N \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

$C_2^{(M,N)}(x)$ の下限の評価が緩いが, これは局所化により相互作用が消えている部分があることに由来するものである。$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 上の関数 $U_{M,N}$ を

$$
\begin{aligned}
&U_{M,N}(\phi) \\
&:= \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\lambda}{4} (P_{M,N}\phi)(x)^4 - \frac{3\lambda}{2} \left(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(M,N)}(x) \right) \rho_M(x)^2 (P_{M,N}\phi)(x)^2 \right\} dx
\end{aligned}
$$

で定め, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 上の確率測度 $\mu_{M,N}$ を

$$
\mu_{M,N}(d\phi) = \frac{1}{Z_{M,N}} \exp\left(-U_{M,N}(\phi)\right) \mu_0(d\phi)
$$

で定める。ただし, $Z_{M,N}$ は正規化定数, μ_0 は positive mass m_0 をもつ自由場, つまり $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 上の中心化ガウス測度で共分散作用素 $[2(-\triangle + m_0^2)]^{-1}$ をもつものである。

$N \to \infty$ のとき $P_N \to I$ (恒等写像), $M \to \infty$ のとき $\rho_M \to 1$ であるから, $\{\mu_{M,N}\}$ は, 形式的に書かれる $\mathbb{R}^3$ 上の Φ^4_3 測度

$$\mu(d\phi) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\lambda}{4}\phi(x)^4 - \infty \cdot \phi(x)^2\right)dx\right)\mu_0(d\phi)$$

の近似列となっている。ここで ∞ は繰り込み定数の極限に相当するものである。この近似の仕方は, 相互作用を平滑化 P_N と局所化 ρ_M によって近似するものであり, 空間の離散化やトーラスの幅を大きくするような近似とは異なる。

特異確率偏微分方程式の手法を用いるため, $\mu_{M,N}$ の確率量子化方程式を考える。D を Gâteaux 微分とすると,

$$\begin{aligned}
&DU_{M,N}(\phi)[f] \\
&= \lambda\left\langle (P_{M,N}\phi)^3 - 3(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(M,N)})\rho_M^2(P_{M,N}\phi), P_{M,N}f\right\rangle_{L^2(dx)} \\
&= \lambda\left\langle P_{M,N}^*\left\{(P_{M,N}\phi)^3 - 3(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(M,N)})\rho_M^2(P_{M,N}\phi)\right\}, f\right\rangle_{L^2(dx)}
\end{aligned}$$

となるため, $\mu_{M,N}$ の確率量子化方程式は

$$\begin{cases}
\partial_t X_t^{M,N}(x) & = \dot{W}_t(x) - (-\triangle + m_0^2)X_t^{M,N}(x) \\
& \quad -\lambda P_{M,N}^*\Big\{(P_{M,N}X_t^{M,N})^3(x) \\
& \qquad -3\left(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(M,N)}(x)\right)\rho_M(x)^2 P_{M,N}X_t^{M,N}(x)\Big\}, \\
X_0^{M,N}(x) & = \xi_{M,N}(x), \quad t \in [0,\infty),\ x \in \mathbb{R}^3
\end{cases}$$

で与えられる。ここで, $\xi_{M,N}$ は分布として $\mu_{M,N}$ をもつ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 値確率変数であり, $\dot{W}_t(x) = \dot{W}(t,x)$ は時空間のホワイトノイズで $\xi_{M,N}$ と独立なものである。初期値 $\xi_{M,N}$ の分布は $\mu_{M,N}$ となるようにしているが, これは $X^{M,N}$ が定常過程で各時刻で分布 $\mu_{M,N}$ をもつように設定するためである。このようにすることで, $X^{M,N}$ の確率過程としての収束が示せれば, その周辺分布 $\mu_{M,N}$ の収束も得られ, Φ^4_3 測度の構成ができる。さらに定常過程である利点を生かし, 時間局所解を経由することなく, 直接時間大域解が構成できるのである。

ここで, この方程式は他の研究における Φ^4_3 確率量子化方程式とは少々異なることを注意として述べておく。実際, [4] で扱われている方程式にはここでの $P_{M,N}$ に当たる近似作用素は現れず, その代わりにホワイトノイズ $\dot{W}_t(x)$ を滑らかな関数で近似するという極限をとっている。一方, ここでは Φ^4_3 測度の構成に興味があるため, 上のような Φ^4_3 測度の近似に対応する確率量子化方程式を考える。この違いにより, Regularity structure や Paracontrolled calculus といった一般論の形とは少々異なっている。しかし, このような繰り込みを伴う方程式を解く際の難点自体は同じであ

るため, これらの一般論と同様の特異確率偏微分方程式の手法で議論することができるのである。

特異確率偏微分方程式の手法を用いるため, 無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程 Z_t を次の方程式の解で定める。

$$\begin{cases} \partial_t Z_t &= \dot{W}_t(x) - (-\triangle + m_0^2)Z_t \\ Z_0 &= \zeta. \end{cases}$$

ここで, $\dot{W}_t(x)$ は $X^{M,N}$ の確率偏微分方程式で現れた時空間のホワイトノイズと同じものであり, ζ は分布として自由場 μ_0 をもつ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 値確率変数で $\dot{W}_t(x)$ とは独立なものである。特に, $(\xi_{M,N}, \zeta)$ はペアにした確率過程 $(X^{M,N}, Z)$ が定常過程となるように選ぶことにする。このような選び方ができることを示すには, $X^{M,N}$ と Z をペアにしてもマルコフ過程を定めることと, それぞれが不変分布をもつことを使う。詳しくは [1] または [2] を参照。また, Z_t は $t \in (-\infty, \infty)$ の範囲で解いておく。この上で,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_t^{(1,M,N)} &:= \rho_M P_N Z_t, \\ \mathcal{Z}_t^{(2,M,N)} &:= \rho_M^2 \left\{ (P_N Z_t)^2 - C_1^{(N)} \right\}, \\ \mathcal{Z}_t^{(3,M,N)} &:= \rho_M^3 \left\{ (P_N Z_t)^3 - 3C_1^{(N)} P_N Z_t \right\}, \\ \mathcal{Z}_t^{(0,3,M,N)} &:= \int_{-\infty}^t e^{(t-s)(\triangle - m_0^2)} P_{M,N}^* \mathcal{Z}_s^{(3,M,N)} ds \end{aligned}$$

とおく。これらは Wick 積から現れる繰り込みである。これらとパラプロダクトを用いて, $X^{M,N}$ を

$$\begin{aligned} X_t^{M,N,(2)} &:= X_t^{M,N} - Z_t + \lambda \mathcal{Z}_t^{(0,3,M,N)}, \\ X_t^{M,N,(2),<} &:= -3\lambda \int_0^t e^{(t-s)(\triangle - m_0^2)} P_{M,N}^* \\ &\qquad \left[\left(P_{M,N} X_s^{M,N,(2)} - P_{M,N} \mathcal{Z}_s^{(0,3,M,N)} \right) \circledless \mathcal{Z}_s^{(2,M,N)} \right] ds, \\ X_t^{M,N,(2),\geqslant} &:= X_t^{M,N,(2)} - X_t^{M,N,(2),<} \end{aligned}$$

のように分解する。すると, $(X_t^{M,N,(2),<}, X_t^{M,N,(2),\geqslant})$ が満たす偏微分方程式が得られるのであるが, 具体的に記述すると紙面が足りなくなるため省略する。この部分は特異確率偏微分方程式の手法そのものであり, また代数的な構造を用いた変形であるため, 局所化の関数 ρ_M が混ざる部分を除いてトーラス上で考える場合と同じである。2 つ目の繰り込み $C_2^{(M,N)}$ はこの変形の過程で現れるものであり,

$$C_2^{(M,N)}(x) = E\left[\left(\mathcal{Z}_t^{(2,M,N)} \circleddash \int_{-\infty}^t e^{(t-s)(\triangle - m_0^2)} P_N^2 \mathcal{Z}_s^{(2,M,N)} ds \right)(x) \right]$$

となっている。この式もまたトーラスの場合とほぼ同じであるが, $\mathcal{Z}_t^{(2,M,N)}$ が現れるため局所化 ρ_M に依存している部分が異なる。

ここで, トーラスの場合にはない難点について述べる。変形して得られた $(X_t^{M,N,(2),<}, X_t^{M,N,(2),\geqslant})$ が満たす方程式には, 次のような無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程の Wick 積などから得られる確率過程

$$\mathcal{Z}_t^{(1,M,N)}, \mathcal{Z}_t^{(2,M,N)}, \mathcal{Z}_t^{(3,M,N)}, \mathcal{Z}_t^{(0,3,M,N)}, \ldots$$

が係数として含まれている。そのため, 解 $(X_t^{M,N,(2),<}, X_t^{M,N,(2),\geqslant})$ の一様評価を考える際には, これらのノルムが M と N に関して一様に評価される必要がある。しかし $\mathbb{R}^3$ で考えるとき, 重みの無いようなベゾフノルム (つまり, $\nu(x) = 1$ の場合) に対しては一様有界とならない。そのため, 重み付きベゾフ空間を用いて方程式の解の一様評価を考えることになる。またこの方程式の非線型性の最も高い項は $-\left(P_{M,N}X_t^{M,N,(2)}\right)^3$ であり, エネルギー汎関数を用いて他の非線形項を評価したいのであるが, 重み ν をおいたとき

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^3} X_t^{M,N,(2)} P_{M,N}^* \left[\left(P_{M,N}X_t^{M,N,(2)}\right)^3\right] \nu dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(P_{M,N}X_t^{M,N,(2)}\right)^4 \nu dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left[P_{M,N}X_t^{M,N,(2)} - \frac{1}{\nu}P_{M,N}\left(\nu X_t^{M,N,(2)}\right)\right] \left(P_{M,N}X_t^{M,N,(2)}\right)^3 \nu dx
\end{aligned}$$

となってしまい, $P_{M,N}X_t^{M,N,(2)}$ の $L^4(\nu)$ ノルムの他に, 重みをおく (ν をかける) という作用と近似作用素 $P_{M,N}$ の間の交換子が現れてしまう。しかも, 交換子は $X_t^{M,N,(2)}$ の 4 次のオーダーをもっていて, 非線形性の高さがエネルギー汎関数と同じになってしまう。これが $\mathbb{R}^3$ の場合に現れる困難な点である。

しかし, $N \to \infty$ のとき $P_{M,N} = \rho_M P_N \to \rho_M \mathrm{I}$ であることから,

$$\begin{aligned}
&P_{M,N}X_t^{M,N,(2)} - \frac{1}{\nu}P_{M,N}\left(\nu X_t^{M,N,(2)}\right) \\
&= \rho_M\left[P_N X_t^{M,N,(2)} - \frac{1}{\nu}P_N\left(\nu X_t^{M,N,(2)}\right)\right] \to 0 \quad (N \to \infty)
\end{aligned}$$

となる。この収束は M に比べて N を十分速く発散させるとき, 交換子が十分良い評価をもつことを暗示している。実際, 次が成り立つ。

補題 2. $\nu(x) = (1 + |x|^2)^{-\sigma/2}$ のとき, 任意の $M, N \in \mathbb{N}$ と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$\left\|P_{M,N}f - \frac{1}{\nu}P_{M,N}(\nu f)\right\|_{L^p(\nu)} \leq C_M 2^{-N}\|f\|_{L^p(\nu)}$$

が成り立つ。ただし, C_M は M に依存し, N と f に依らない定数である。

この評価により上で述べた難点が解消され, 全空間 $\mathbb{R}^3$ の場合にもエネルギー汎関数を用いて非線形項が制御ができる。これが [2] における最も重要なアイデアである。

以上で議論の大まかな流れとアイデアの説明が終わったので, [2] における結果を紹介する。$m_0^2 > 9/2$ を仮定し, σ を

$$9 < \sigma^2 < 2m_0^2$$

を満たすように選ぶ。重み付きベゾフ空間の重みは $\nu(x) := (1+|x|^2)^{-\sigma/2}$ とする。ここで, $\nu \in L^1(dx)$ であり, 任意の $\alpha \in (1/2, \infty)$ に対して $X_t^{M,N}$ は $B_2^{-\alpha}(\nu)$ 値定常マルコフ過程となっていることに注意。

確率過程 $X_t^{M,N}$ と $\mu_{M,N}$ の収束については, 次のような形で結論が得られた。

定理 3 ([2])**.** 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し, 部分列 $\{X^{M(k),N(k)}; k \in \mathbb{N}\}$ で, $\lim_{k\to\infty} M(k) = \infty$, $\lim_{k\to\infty} N(k) = \infty$, $\{X^{M(k),N(k)}; k \in \mathbb{N}\}$ が $C([0,\infty); B_{4/3}^{-1/2-\varepsilon}(\nu) \cap B_{12/5}^{-1/2-\varepsilon}(\nu^{9/5}))$ 上で法則収束するものが存在する。さらに, X が $\{X^{M(k),N(k)}; k \in \mathbb{N}\}$ の $C([0,\infty); B_{4/3}^{-1/2-\varepsilon}(\nu) \cap B_{12/5}^{-1/2-\varepsilon}(\nu^{9/5}))$ における法則収束先であるとき, X は $B_{4/3}^{-1/2-\varepsilon}(\nu) \cap B_{12/5}^{-1/2-\varepsilon}(\nu^{9/5})$ 上の連続な確率過程であり, 対応する部分列 $\{\mu_{M(k),N(k)}\}$ の弱収束先の確率測度 μ は, X の定常測度である。

前半の収束の部分は緊密性を示すことにより得られる。後半は $X_t^{M,N}$ の t を与えるごとの分布が $\mu_{M,N}$ であることから得られる。このようにして構成された測度 μ(Φ_3^4 測度) の性質として, 次が成り立つ。

定理 4 ([2])**.** μ を定理 3 で得られた測度 (Φ_3^4 測度) とする。このとき, μ は次のような性質をもつ。

(i) ψ と ρ が原点に関して回転不変な関数であるとき, μ は原点の周りでの回転と原点を通る超平面での反射に関して不変, つまり

$$\int f(\phi)\mu(d\phi) = \int f(\phi \circ \theta)\mu(d\phi), \quad f \in C_b(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)),\ \theta \in O(3)$$

である。

(ii) 任意の $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して $\psi(x_1,x_2,x_3) = \psi(-x_1,x_2,x_3)$, $\rho(x_1,x_2,x_3) = \rho(-x_1,x_2,x_3)$ が成り立つとき, μ は (1 つ目の成分 x_1 に関して) reflection positivity をもつ。

(iii) 任意の $p \in [2,\infty)$ に対して,

$$\int \|\phi\|^2_{B_p^{-1/2-\varepsilon}(\nu^{p/2})}\mu(d\phi) < \infty$$

となる。つまり, μ の台は $B_p^{-1/2-\varepsilon}(\nu^{p/2})$ に含まれる。

(iv) μ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ 上のガウス測度ではない。

(i) の μ の回転と反射に関する不変性は, ψ と ρ が原点に関して回転不変なときの, 各 M, N に対する $\mu_{M,N}$ の回転と反射に関する不変性から得られる。この部分は Φ^4_3 測度を相互作用の平滑化と局所化によって近似するという, ここでの設定の利点である。特に, トーラスの幅を大きくするような近似をした場合, 近似列は回転不変性を失うので, 構成した Φ^4_3 測度の回転不変性を示すのは難しくなる。

(ii) の reflection positivity については他の近似と同様に, 近似列の reflection positivity を用いて示すことができる。

(iii) は緊密性の証明の際に示した一様評価から得られるものである。[1] の結果と比べて大幅に良くなっているが, それは [3] において確率量子化方程式の解に当たる確率過程の状態空間の改良に由来するものであり, 特に新しいアイデアを用いているわけではなく, 単に途中の評価を改善したことによるものである。

(iv) は [5] による手法を用いて示すことができる。ただし, [2] では μ の高次のモーメントの存在を示していないため, 背理法を用いることとなる。

定理 3 で構成した Φ^4_3 測度の平行移動不変性は未だ得られていない。先行結果ではトーラスの幅を大きくするような近似を採用しているため, 平行移動不変性をもつような近似列を使って Φ^4_3 測度を構成している。そのため, 先行結果では平行移動不変性が直ちに得られている。一方, ここでは相互作用の局所化によって近似列を用意しているため, 近似列が局所化する場所に依存してしまう。このような理由から, ここで構成した Φ^4_3 測度の平行移動不変性は非自明な問題となる。

最後に, 先行結果である [5] と結果の比較を行う。[5] においても, 特異確率偏微分方程式を用いて Φ^4_3 測度を構成し, さらにそれが物理で期待される公理系を満たすかどうかについて議論をしている。しかし, [5] もまた離散近似とトーラスを用いて構成しているため, 平行移動不変性は得られているが, 定理 4(i) にある回転不変性は得られていない。一方, この研究成果では, 平行移動不変性を示すのが難しくなる代わりに回転不変性を得ている。これは, 近似の仕方によって示し易くなる性質と示し辛くなる性質があることによるものである。これまでに様々な方法で構成されたそれぞれ Φ^4_3 測度の性質のほとんどが, 近似列がもつ性質が極限に受け継がれることを使って示されている。逆に, 近似列がもたない性質を極限の Φ^4_3 測度がもつというようなことを示すのは非常に難しい。これが近似によって示すことができる性質が異なる理由である。その一方で, 物理では Φ^4_3 測度は近似の仕方に依らないものとされている。もしこのような Φ^4_3 測度の一意性に関する結果が得られれば, Φ^4_3 測度は異なる近似によって示される様々な性質を全てもつことになり, この Φ^4_3 測度の話題は大きく前進することとなる。ちなみに, [2] と [5] の結果を踏まえると, 特異確率偏微分方程式を用いた構成法に限った Φ^4_3 測度の一意性を示すだけで十分大きな前進と

なる。

参考文献

[1] S. Albeverio and Sei. Kusuoka, The invariant measure and the flow associated to the Φ_3^4-quantum field model, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **20** (2020), 1359–1427.

[2] S. Albeverio and Sei. Kusuoka, Construction of a nontrivial rotation invariant Φ^4-measure and associated flow on $\mathbb{R}^3$, in preparation.

[3] Sei. Kusuoka, An improvement of the integrability of the state space of the Φ_3^4-process and the support of the Φ_3^4-measure constructed by the limit of stationary processes of approximating stochastic quantization equations, in preparation.

[4] M. Gubinelli and M. Hofmanová, Global solutions to elliptic and parabolic Φ^4 models in Euclidean space, *Comm. Math. Phys.* **368** (2019), 1201–1266.

[5] M. Gubinelli and M. Hofmanová, A PDE construction of the Euclidean Φ_3^4 quantum field theory, arXiv:1810.01700.

[6] M. Gubinelli, P Imkeller and N. Perkowski, Paracontrolled distributions and singular PDEs, *Forum Math. Pi* **3** (2015), e6, 75pp.

[7] M. Hairer, A theory of regularity structures, *Invent. Math.* **198** (2014), 269–504.