多肢選択問題の自動生成
– 数学 III の微分積分から偏微分まで – [1]

神戸大学・人間発達環境学研究科 長坂 耕作
Kosaku Nagasaka
Graduate School of Human Development and Environment,
Kobe University

1 はじめに

2019 年度開催の研究集会「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」では，Jupyter Notebook 環境における Python の環境にて，Moodle 向けの多肢選択問題を生成するためのモジュールの開発について講演を行った [2]。これまでの多肢選択問題では，Mathematica を用いた方法 [1] も含め，基本的に線形代数分野を中心としていたが，本報告では，数学 III の微分積分から偏微分までの問題生成について取りあげる（本報告では，使用しているモジュールなどの説明は割愛するので，過去の報告 [2] を参照して欲しい）。

1.1 経緯と作成済み問題

これまでの問題生成が線形代数を中心としていたことと，今回，数学 III の微分積分から偏微分までを取り上げたことには深い理由はなく，単に実践の場としての講義を担当していたかいなかったかに過ぎない。2020 年度前期に，数学 III 未習得者向けの微分積分学の入門的講義を担当したことから，以下の問題生成器を作成し，それで生成した多肢選択問題を実際の講義で使用した。

1 変数の微分法: 合成関数（初等関数），多項式又は有理関数の極限（両側極限），多項式又は有理関数の極限（両側極限がないのも含む），有理関数の片側極限（基本的に分母の根への片側極限），無限小・無限大（収束・発散の速さ），三角関数の極限（両側極限がないのも含む），指数関数と対数関数の極限，平均変化率（微分係数の導入前段階），微分係数の計算（多項式，有理関数及び区分的関数），微分係数の途中式（不適切なものを選択），導関数の途中式（定義に基づく極限計算による），線形性に基づく導関数の計算（基本公式と線形性の活用），積の微分法に基づく導関数の計算（基本公式と積の微分法の活用），商の微分法に基づく導関数の計算（基本公式と商の微分法の活用），合成関数の微分法に基づく導関数の計算（基本公式と合成関数の微分法の活用），対数微分法に基づく導関数の計算（基本公式と対数微分法の活用），高階導関数の計算，極大値と極小値（増減表からの

[1] This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K02941.

決定），変曲点（増減表からの決定），級数展開（マクローリンとテイラー展開）（20 種類）

1 変数の積分法: 線形性に基づく不定積分の計算（基本公式と線形性の活用），線形性に基づく定積分の計算（基本公式と線形性の活用），置換積分に基づく不定積分の計算（合成関数の微分法の逆），置換積分に基づく定積分の計算（合成関数の微分法の逆），部分積分に基づく不定積分の計算（積の微分法の逆），部分積分に基づく定積分の計算（積の微分法の逆），定積分の応用（体積，曲線の長さ，側面積）（7 種類）

偏微分: 2 変数有理関数の極限（原則代入で求まる定義域への極限），2 変数有理関数の極限（約分後，原則代入で求まる定義域への極限），2 変数有理関数の極限（定義域の境界点への極限），2 変数有理関数の極限（分解で sin や log の 1 変数に帰着），偏導関数，高階偏導関数，極値を取るための必要十分条件，極値（全次数が 2 次の 2 変数多項式の場合の極値問題），ラグランジュの未定乗数法（解くべき方程式の確認），陰関数の導関数（陰関数定理），陰関数の 2 階導関数（陰関数定理），陰関数が極値を取るための条件（12 種類）

2　実際の問題生成器

微分積分学の多肢選択問題の自動生成にあたっては，線形代数に比べ，単純な計算問題としてのバラリエーションに限りがあり，より構造的な問題生成が求められるという大きいな違いがある。以下では，個々の問題生成器を取り上げ，その考え方を報告する。

2.1　有理関数の片側極限（基本的に分母の根への片側極限）

左極限・右極限が異なる典型的な問題が解けるかを意図したものであり，実際の問題は次の通り。ここで，$f(x), a$ や極限の向き (± 0) は，実際の問題毎に変化する部分となる。

> 次の極限を選択してください。
>
> $$\lim_{x\to a-0} f(x) \ \ (\text{または } \lim_{x\to a+0} f(x))$$

問題生成は，$a_{min}, a_{max}, e_{min}, e_{max} \in \mathbb{Z}$ をあらかじめ与えた上で，次の手順で行った。

1. $a \in [a_{min}, a_{max}) \subset \mathbb{Z}$
2. $f(x) = p(x)/q(x)$

$$q(x) = (x-a)\textstyle\sum_{i=0}^{i_{max}} c_i x^i,\ c_i \in [e_{min}, e_{max}] \subset \mathbb{Z},\ i_{max} \in \{1,2\}$$

$$p(x) = \begin{cases} |x-a| + c(x-a),\ c \in [e_{min}, e_{max}] \subset \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ |x^2-a^2| + c(x-a),\ c \in [e_{min}, e_{max}] \subset \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ \sum_{i=0}^{i_{max}} c_i x^i,\ c_i \in [e_{min}, e_{max}] \subset \mathbb{Z},\ i_{max} \in \{1,2,3\} \end{cases}$$

3. 向き（左極限・右極限）はランダム

多肢選択問題で重要となる誤答の選択肢は，正答をα，逆側極限をβ，$[a_{min}, a_{max})+\{\pm\infty\}$での極限値を$\gamma$（複数あり），ランダムな値を$\delta$（構造的な誤答が重なる場合に生成）として，次のようなフィードバックを生成した。図 1 に実際に生成された問題を掲載しておく。

- β：右側極限と左側極限を取り違えている可能性があります
- $-\alpha$：符号を間違えています。計算を丁寧に行ってください
- $-\beta$：符号を間違えています。計算を丁寧に行ってください
- γ：近づける先が間違っています。計算を丁寧に行ってください
- δ：計算を丁寧に行ってください

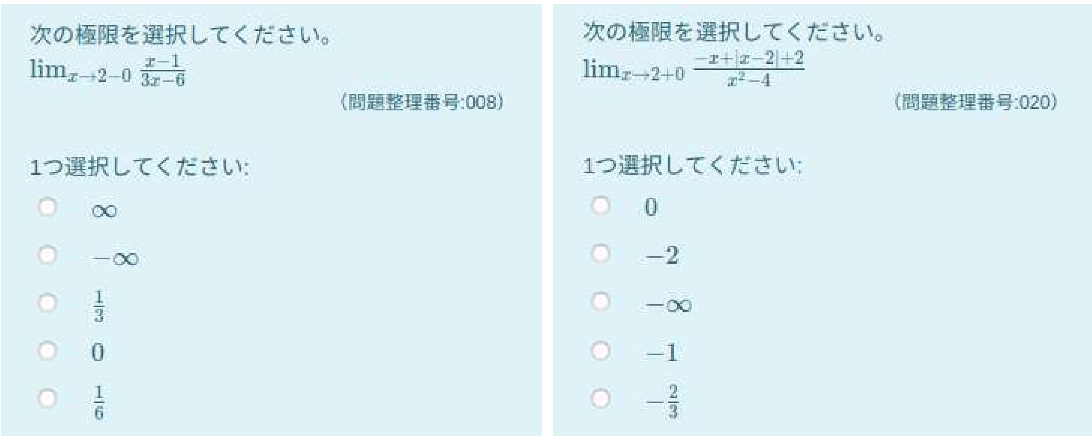


図 1: 有理関数の片側極限（基本的に分母の根への片側極限）

2.2　極大値と極小値（増減表からの決定）

極大値と極小値を求める問題を構成的に生成することは，問題のバリエーションを制限しやすいため，この問題では，増減表を正しく読み解けるかどうかに特化している。実際の問題は次の通り。ここで，a_i, s_i, α_i や導関数の零点の個数は，実際の問題毎に変化する部分となる。

以下は，ある関数 $f(x)$ の増減表です。$f(x)$ に関して最も適切なものを選択してください。

x	$\cdots$	a_1	$\cdots$	a_2	$\cdots$
$f'(x)$	s_0	0	s_{12}	0	s_2
$f(x)$		α_1		α_2	

問題生成は，$e_{max} \in \mathbb{Z}$ をあらかじめ与えた上で，次の手順で行った。

1. N を表に使う数の集合（整数，素数，素数の二乗根，それらの $-1, 1/2, -1/2$ 倍）
2. a_i, α_i を N からランダムに選択（ただし，a_i は増加列）
3. 両端 s_i は $\pm$ をランダム，それ以外は α_i の増減から $\pm$ を決定

多肢選択問題で重要となる誤答の選択肢とそのフィードバックは，次のように生成した。図 2 に実際に生成された問題を掲載しておく（同様に生成した変曲点の問題が図 3)。

- 極値をもたない：増減表をきちんと確認してください。極値をもちます
- 極大と極小が逆：極大と極小の定義を確認しましょう。取り違えています
- 極値の欠落：全ての極値を調べてください。不足があります
- 極値の欠落と極大極小逆：
  極大と極小の定義を確認しましょう。不足もありますし，取り違えてもいます
- 変曲点などが多い：極大と極小の定義を確認しましょう。多すぎます

以下は，ある関数$f(x)$の増減表です。$f(x)$に関して最も適切なものを選択してください。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\sqrt{2}$	

(問題整理番号:001)

1つ選択してください:

- $x = e$のとき極大値$-\sqrt{2}$をとる
- 極値をもたない
- $x = -\sqrt{3}$のとき極小値$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x = e$のとき極小値$-\sqrt{2}$をとる
- $x = e$のとき極小値$-\sqrt{2}$をとる
- $x = -\sqrt{3}$のとき極大値$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x = e$のとき極小値$-\sqrt{2}$をとる

図 2: 極大値と極小値（増減表からの決定）

以下は，ある関数$f(x)$の増減表です。$f(x)$に関して最も適切なものを選択してください。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$-\pi$		-6		-5	

(問題整理番号:002)

1つ選択してください:

- $x = 0, 4$で変曲点をもつ
- $x = -5$で変曲点をもつ
- $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$で変曲点をもつ
- 変曲点をもたない
- $x = 0$で変曲点をもつ

図 3: 変曲点（増減表からの決定）

2.3　置換積分に基づく不定積分の計算（合成関数の微分法の逆）

基本的な置き換えによる置換積分が可能であるかを確認するための問題であり，問題形式として特別なことはないが，後述の通り作問には工夫が必要である。実際の問題は次の通り。ここで，被積分関数 $f(x)$ が，実際の問題毎に変化する部分となる。

> 次の不定積分を求めた結果を選択してください。なお，C を積分定数とします。
> $$\int f(x)dx$$

問題生成は，$e_{min}, e_{max}, d_{min}, d_{max} \in \mathbb{Z}, r \in [0,1]$ をあらかじめ与えた上で，置換積分で不定積分が授業範囲で可能になるように，次の手順で行った。

1. 記号的に合成関数を生成（定数項あり・なしはランダム）
   - 単項式，三角関数（$\sin, \cos$），自然指数関数，自然対数関数を対象に，{ 関数, 原始関数, 原始関数の計算間違い } の形式のデータベースを作成
     例) sin: $\{\sin(x), -\cos(x), \{\sin(x), \cos(x)\}\}$
2. 原始関数の合成を実際に行い，導関数を計算（積分と置換積分の可否が保証される）

多肢選択問題で重要となる誤答の選択肢とそのフィードバックは，次のように生成した。図 4 に実際に生成された問題を掲載しておく。

- 原始関数の計算間違いに置き換え:
  基本的な関数の不定積分の公式を確認してください
- 定数倍の部分が途中で消える: 不定積分の線形性に基づいて計算してください。定数倍や加減算を忘れている可能性があります
- 和で表される関数の部分のみ: 不定積分の線形性に基づいて計算してください。定数倍や加減算を忘れている可能性があります

2.4　2 変数有理関数の極限（分解で sin や log の 1 変数に帰着）

2 変数有理関数の極限計算において，$z = g(x,y)$ と変数変換する典型的な問題を解けるかという意図の問題である。実際の問題は次の通り。ここで，関数 $f(x,y)$ と近づける先の (a,b) は，実際の問題毎に変化する部分となる。

> 次の極限を選択してください。
> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

問題生成は，係数の範囲，近づける先の点の範囲，次数の範囲，単項式の数の範囲，極限の有無などをあらかじめ与えた上で，次の手順で行った。

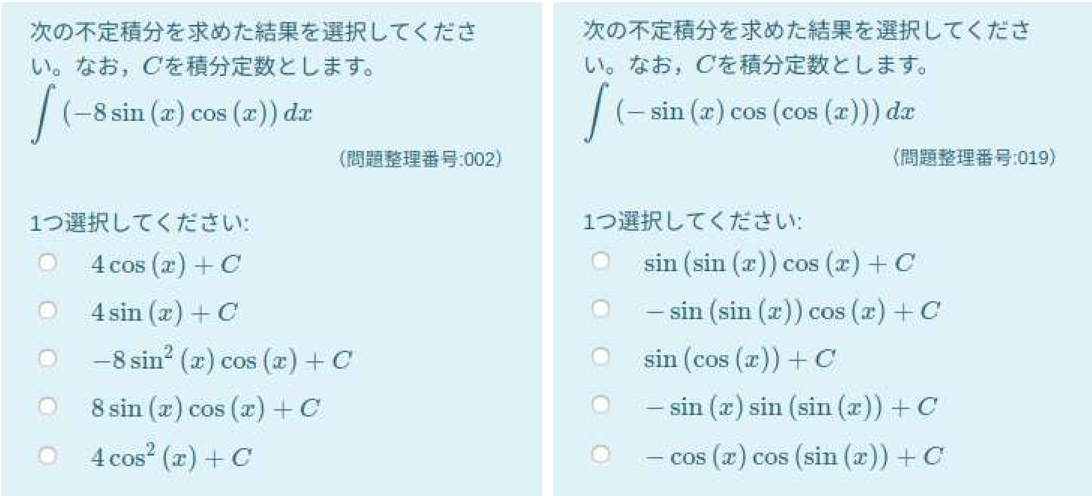


図 4: 置換積分に基づく不定積分の計算（合成関数の微分法の逆）

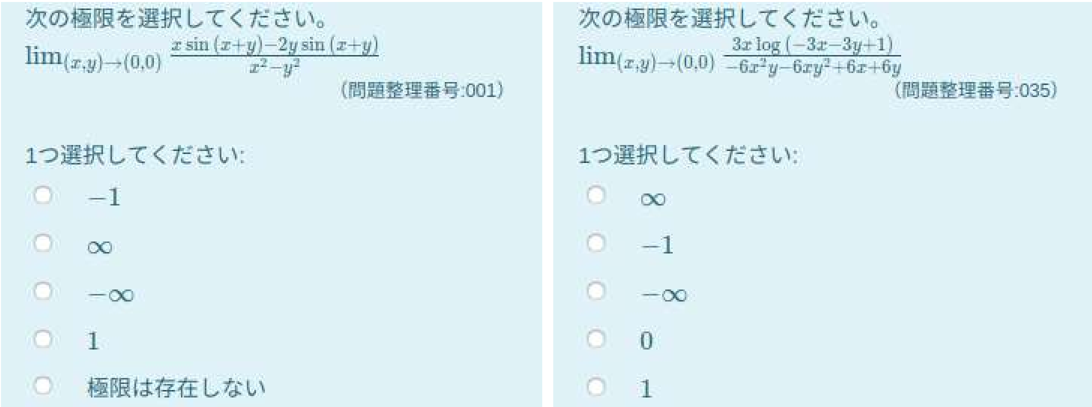
1. 近づける先の点 (a,b)，係数 c をランダム生成
2. $f_1(x,y)=\frac{\sin(c(x-a)+c(y-b))}{c(x-a)+c(y-b)}$ または $f_1(x,y)=\frac{\log(1+c(x-a)+c(y-b))}{c(x-a)+c(y-b)}$ をランダム選択
3. $f_2(x,y)$ を多項式または有理関数（極限が存在しない場合も含む）で生成
4. $f_1(x,y)f_2(x,y)$ の分子と分母の積を展開し，$f(x,y)$ とする
（実際の極限値は $f_2(x,y)$ のものになる）

多肢選択問題で重要となる誤答の選択肢とそのフィードバックは，次のように生成した。図 5 に実際に生成された問題を掲載しておく。

- 極限が存在しない場合の誤選択肢: $0,-\infty,\infty,1,-1$
  フィードバック: 因数分解などで分離した上で，$y=mx$ などの変換を行い，本当に，近づけ方によらずに一定の値に近づくのかを確認しましょう
- 極限 α が存在の場合の誤選択肢: $-\alpha,1/\alpha,-1/\alpha,-\infty,\infty,1,-1,$ 存在せず
  フィードバック: 因数分解などで分離した上で，代入操作や式の形によっては極座標変換などで挟み込みなどを検討してみましょう

2.5 極値を取るための必要十分条件

C^2 級の関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において極値を取るかは標準的な問題で，$f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$, $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$, $f_{xx}(a,b)$, $f_{yy}(a,b)$ を調べることで判定できる。この二変数関数の極値の必要十分条件が定着しているかを確認する問題で，実際の問題は次の通り。ここで，点 (a,b) と各偏導関数の (a,b) での値は，実際の問題毎に変化する部分となる（以下の問題文中の下線部）。


次の極限を選択してください。

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x+y)-2y\sin(x+y)}{x^2-y^2}$

（問題整理番号:001）

1つ選択してください:

- -1
- ∞
- $-\infty$
- 1
- 極限は存在しない

次の極限を選択してください。

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x\log(-3x-3y+1)}{-6x^2y-6xy^2+6x+6y}$

（問題整理番号:035）

1つ選択してください:

- ∞
- -1
- $-\infty$
- 0
- 1

図 5: 2 変数有理関数の極限（分解で sin や log の 1 変数に帰着）

ある C^2 級の関数 $f(x,y)$ は，点 $(a,b)=(\underline{a},\underline{b})$ において，それぞれ次のような条件を満たしています。極値に関して最も適切な選択肢を選んでください。

$$f_x(a,b)=\underline{0},\ f_y(a,b)=\underline{0},$$
$$f_{xx}(a,b)=\underline{5},\ f_{yy}(a,b)=\underline{-6},\ f_{xy}(a,b)=\underline{1}$$

問題生成は，e_{min}, e_{max} をあらかじめ与えた上で，次の手順で行った。

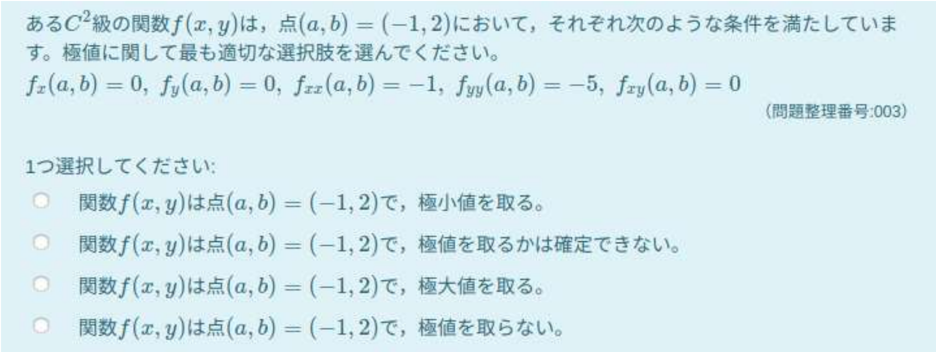
1. 下記の式でランダムに生成（$P(\cdot)$ は確率を表す）

$$\begin{aligned}
&a,b\in[e_{min},e_{max}]\subset\mathbb{Z},\\
&f_x,f_y\in\{0\}\cup[e_{min},e_{max}]\subset\mathbb{Z},\ P(f_*=0)=5/6,\\
&f_{xx}\in[e_{min},e_{max}]\setminus\{0\}\subset\mathbb{Z},\ f_{yy}\in[e_{min},e_{max}]\setminus\{0\}\subset\mathbb{Z},\\
&f_{xy}\in[\lfloor e_{min}/5\rfloor,\lceil e_{max}/5\rceil]\subset\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

多肢選択問題で重要となる選択肢とそのフィードバックは，次の固定とした。図 6 に実際に生成された問題を掲載しておく。

- 選択肢
  - 極値を取らない。
  - 極大値を取る。
  - 極小値を取る。
  - 極値を取るかは確定できない。
- フィードバック:

極値を取るための必要条件と十分条件をそれぞれ確認してください



あるC^2級の関数$f(x,y)$は，点$(a,b)=(-1,2)$において，それぞれ次のような条件を満たしています。極値に関して最も適切な選択肢を選んでください。
$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0,\ f_{xx}(a,b)=-1,\ f_{yy}(a,b)=-5,\ f_{xy}(a,b)=0$
(問題整理番号:003)

1つ選択してください:
- 関数$f(x,y)$は点$(a,b)=(-1,2)$で，極小値を取る。
- 関数$f(x,y)$は点$(a,b)=(-1,2)$で，極値を取るかは確定できない。
- 関数$f(x,y)$は点$(a,b)=(-1,2)$で，極大値を取る。
- 関数$f(x,y)$は点$(a,b)=(-1,2)$で，極値を取らない。

図 6: 極値を取るための必要十分条件

3　まとめと今後の展開

今回の取り組みにより，線形代数に分野が偏っていた状況を改善でき，中等数学後半から大学初年級数学までに多肢選択問題の可能性を広げたと言える。しかしながら，個々の問題に関しては，線形代数に比べると質の観点で完成度が低い部分も見られるため，今後の継続的な改善が必要と考えられる。また，典型的な問題の種類という観点で比べた際に，線形代数に比べ微分積分の方が「計算」より「証明」に近いように思え，この性質が完成度に影響を与えている可能性もある。これらも考慮しつつ，数学における多肢選択問題の次のステージを目指すためには,「証明」的な問題への取り組みが必要と考えている。

参考文献

[1] 長坂耕作. 数式処理と学習管理システム - 静的評価の再評価 -. 研究集会 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究 (2017 年 9 月). **数理解析研究所講究録**, 2067:160–169. 2018.

[2] 長坂耕作. Moodle XML Question Generator for Python. 研究集会 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究 (2019 年 8 月). **数理解析研究所講究録**, 2142:67–70. 2019.