Ramanujan's contribution to approximate π and visualization via Mathematica

N. Hirata-Kohno, K. Kurishima, H. Nishibayashi, K. Suzuki,

Y. Suzuki, S. Tonegawa, Yukiko Washio (Nihon Univ.)
and Yusuke Washio (Buzan-J.H.S., Nihon Univ.)

日本大学大学院理工学研究科数学専攻　栗島昂大・鈴木雄大・西林大樹,

日本大学理工学部　鈴木潔光・利根川聡・鷲尾夕紀子・平田 典子

日本大学豊山女子中学校高等学校 鷲尾勇介

Abstract

In the present notes, we study how he computed, Srinivasa Ramanujan (1887-1920), the exact value of π. We try to understand what is behind, from the viewpoint of number theory, especially Diophantine approximations, to compare several series using Mathematica. We also look at further development of Ramanujan's investigation to learn the effect of hypergeometric functions related to *Periods*.

Mathematics Subject Classification [2010]: 11J, 11F67, 11K60, 33C20

1　π を表す Ramanujan の級数

本稿では，π を表す級数をいくつか紹介する．特に Srinivasa Ramanujan に負う π の様々な表示および，π の逆数に収束する級数の収束速度比較について，数学ソフトウェア Mathematica を用いた視覚化のもとに論ずる．円周率とは格別に魅力的な『周期』であるが，その数値計算において超幾何級数の果たす役割についても言及する．

まず，Ramanujan の論文の選集 [27] に掲載されている著名な 17 個の級数（数論的に深い意味を持つ）のうちの 3 個をとりあげ，[27] の式番号を用いて紹介しよう．Ramanujan は次の級数 (28)(29) を 1914 年に定義している．以下，n は 0 以上の整数の範囲を動くものとする．また，$0! = 1$ と定める．

$$\pi = 16 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (42n+5) \left\{ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right\}^3 \cdot \frac{1}{2^{6n}} \right\}^{-1}, \qquad \text{(Ram(29))}$$

$$\pi = 32 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left((42\sqrt{5}+30)n + 5\sqrt{5} - 1 \right) \left\{ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right\}^3 \cdot \frac{1}{2^{6n}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{8n} \right\}^{-1}, \qquad \text{(Ram(30))}$$

$$\pi = \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}} \right\}^{-1}. \tag{Ram(44)}$$

分母において n 乗で表されている指数部分については，Ram(29) では 512^n，Ram(30) では 24064^n，Ram(44) では 24591257856^n である．

これらは Ramanujan のノート原本の 2 冊目に記されていた．いずれも Ramanujan のイギリス渡航前のノートに書かれたもので，B. C. Berndt らによる *Ramanujan's Notebook*, Part IV にも紹介されている．

π に関する Ramanujan の考察に目を止めた者は多い．周期の考察に関連して D. V. and G. V. Čudnovsky 兄弟（Chudnovsky, Chudnovskii とも記載する）は特に Ramanujan の級数を詳しく調べている．彼らは Ramanujan の考察を発展させ，円周率 π の数値計算に役立つ等式を証明し，それを用いて当時の円周率計算桁数の世界記録を 1994 年に更新した．

Čudnovsky (1988 年）の考察した級数は以下で定められるものである．

$$\pi = \left\{ 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + 545140134n}{(640320)^{3n+\frac{3}{2}}} \right\}^{-1} \tag{Chud}$$

この等式の証明には楕円関数とディオファントス近似が巧妙に活用されているが，それはまさに，超幾何級数の重要な性質を直視した計算方法なのである．

分母の n 乗部分であるが，(Chud) のそれは 262537412640768000^n である．

このような級数を Ramanujan-like 級数と呼ぶことにしよう．H. H. Chan, S. H. Chan, Z. Liu によって 2004 年に示された級数は以下の通りである．

$$\pi = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{2(n-j)}{n-j} \binom{2j}{j} \left(\frac{1}{64} \right)^n (1+5n) \right\}^{-1}. \tag{CCL}$$

(CCL) の分母累乗部は 64^n であある．

さらなる Ramanujan-like 級数として，H. H. Chan, Y. Tanigawa, Y. Yang & W. Zudilin により 2011 年に

$$\pi = \left\{ \frac{3\sqrt{6}}{1225} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left\{ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^3 \right\} \frac{53 + 561n}{39200^n} \right\}^{-1} \tag{CTYZ}$$

が発表された．この分母累乗部 (CTYZ) は，39200^n である．

翌年の H. H. Chan & S. Cooper によって 2012 年に示された級数は

$$\pi = \left\{ \frac{5\sqrt{47}}{7614} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left\{ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{j} \right\} (-1)^n \frac{71 + 682n}{15228^n} \right\}^{-1} \tag{CC}$$

である．この分母累乗部 (CC) は 15228^n である．

2 Takeshi Sato の級数

ここで日本数学会の一般講演として 2002 年に佐藤 猛氏により発表された内容を示そう．

Takeshi Sato の級数 (2002, revised 2012)

$$\pi=\left\{\frac{846}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}t(n)\times\left(n+\frac{1}{2}-\frac{25\sqrt{5}}{141}\right)\times(-1)^n\times\left\{\frac{1}{5\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{15}\right\}^{n+\frac{1}{2}}\right\}^{-1}. \tag{NTS}$$

ただし $t(n)$ は，$t(-1)=0$，$t(0)=1$, および

$$(n+1)^3\times t(n+1)=-(2n+1)(11n^2+11n+5)\times t(n)-125n^3\times t(n-1)$$

で定まる数列である．証明未出版であったところ，H. H. Chan & S. Cooper が式を上記の修正版にして証明したようだ．

これらの級数を歴史順に並べ，Stirling の公式より有界になるところを青い字で記そう．級数 (NTS) の緑色の部分は，$t(n)$ の挙動も含めた数値計算より，分母累乗部は概ね 1174^n 程度のように思われる．ここで改めて，Ramanujan が最も気に入っていたと言われる (44) を含む 5 個の級数を改めて再掲載しよう．

$$\pi=\left\{\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{4^{4n}(n!)^4}\frac{1103+26390n}{99^{4n}}\right\}^{-1}, \tag{Ram(44)}$$

$$\pi=\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(6n)!}{12^{3n}(n!)^3(3n)!}\frac{13591409+545140134n}{(53360)^{3n+\frac{3}{2}}}\right\}^{-1}, \tag{Chud}$$

$$\pi=\left\{\frac{846}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}t(n)\times\left(n+\frac{1}{2}-\frac{25\sqrt{5}}{141}\right)\times(-1)^n\times\left\{\frac{1}{5\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{15}\right\}^{n+\frac{1}{2}}\right\}^{-1}, \tag{NTS}$$

$$\pi=\left\{\frac{\sqrt{3}}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{16^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{2(n-j)}{n-j}\binom{2j}{j}\right\}\frac{1+5n}{4^n}\right\}^{-1}, \tag{CCL}$$

$$\pi=\left\{\frac{3\sqrt{6}}{1225}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\left\{\frac{1}{8^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^3\right\}\frac{53+561n}{1225^n}\right\}^{-1}, \tag{CTYZ}$$

$$\pi=\left\{\frac{5\sqrt{47}}{7614}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\left\{\frac{1}{12^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j}\right\}(-1)^n\frac{71+682n}{(317.25)^n}\right\}^{-1}. \tag{CC}$$

3 Visualization via Mathematica

さて π の値に合致する精度の高さ順で級数を並べると，どのような順番になるかを見てみよう．

歴史的には，古いほうから並べると

$Ram(44) < (Chud) < (NTS) < (CCL) < (CTYZ) < (CC)$ となる．

最も精度の高い級数を見分けるために，5 個の級数の第 N 項までの有限部分和を考え，N を横軸，無限級数と π が一致する桁数 (10 進法) を縦軸に表示したグラフを描き，有限部分のプロットを比較しよう．

(Chud) の例で見ると

$$\pi = \left\{ 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + 545140134n}{(640320)^{3n+\frac{3}{2}}} \right\}^{-1}$$

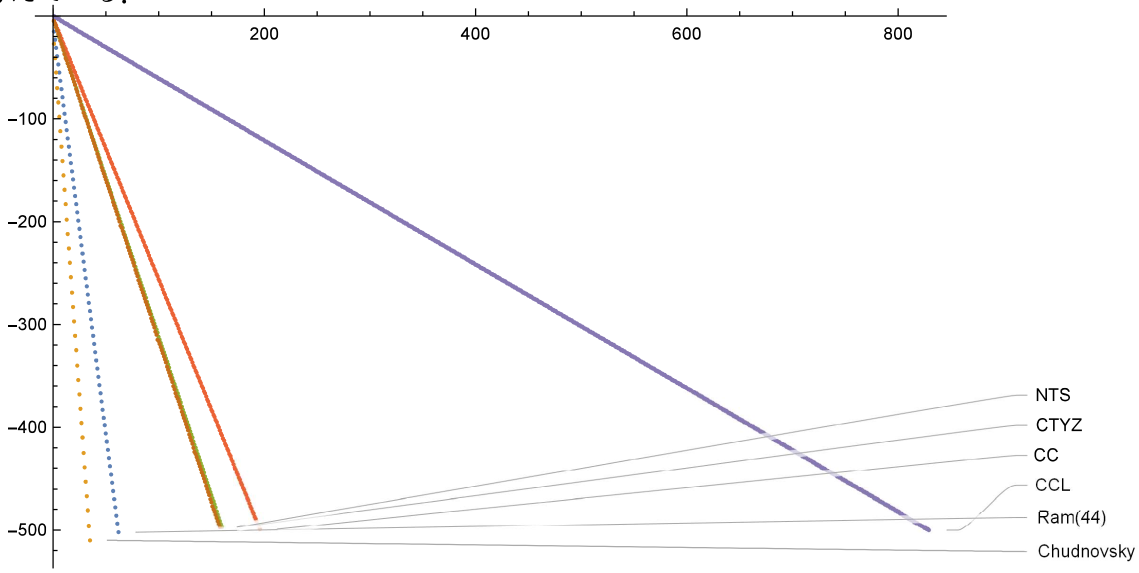
$$\downarrow$$

$$\pi = \left\{ 12 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + 545140134n}{(640320)^{3n+\frac{3}{2}}} \right\}^{-1}$$

と考える．ここで各級数の分母の累乗部分の底を比較すると，その大きさの順番は
$(Chud) > Ram(44) > (CTYZ) > (CC) > (NTS) > (CCL)$ であり，実際には

$(Chud)151931373056000^n > Ram(44)96059601^n > (CTYZ)1225^n >$ 概ね $(NTS)1174^n$
$> (CC)317.25^n > (CCL)4^n$ である．

ここで N を横軸，無限級数と π が一致している桁数を縦軸に表示したグラフを掲載する．このグラフは Mathematica の動画教材として講演の際には提示し，自動あるいは手動のいずれでも点を動かせるものとした．点が動く速さで，その級数が円周率に近づく精度が直感的に把握できるようにした．実際には「数論的な精度の高さ」と「収束の速度」という意味はかなり違うのであるが，まずは「収束の速度」という観点からの考察を実施した．超幾何級数の値は数論的な観点から言うと,「実数を有理数で非常に精度良く近似できる連分数展開」の関数版である Hermite-Padé 近似の構築が可能な関数であって，その性質の良さが背後に介在していると実は考えている．



グラフから読み取れる π に合致する精度の高い順番は
$(Chud) > Ram(44) > \underline{(NTS)} > (CTYZ) > (CC) > (CCL)$ であるが，
分母累乗比較結果は
$(Chud) > Ram(44) > (CTYZ) > \underline{(NTS)} > (CC) > (CCL)$
であって，相違がある．

(Chud) は，1994 年の円周率の計算桁数の世界記録の基盤となった級数であり，Čudnovsky 兄弟が π を 2,260,331,336 桁まで計算しているが，これもやはり Ramanujan の数論的な原理に基づくと言って良い．筆者の直感としては G 関数と呼ばれる範疇の関数である超幾何級数に現れる良い性質が反映していると考える．現時点で筆者の知る円周率計算の最長桁数は 31,415,926,535,897 桁であって，Google 社の日本人女性 Emma Haruka Iwao 氏の研究チームにより 2019 年 3 月に作られた記録とのことである．

4 Ramanujan の考察の鍵

整数 $p \geq 1,\ x \in \mathbb{C}\ (|x| < 1)$, 自然数 n に対する Pochhammer 記号 $(a)_0 := 1,\quad (a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$ を用いて定まる関数 ${}_pF_{p-1}$ を一般超幾何級数と称する．即ち

$$ {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_p \\ b_1,\, \cdots,\, b_{p-1} \end{matrix} \,\middle|\, x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_{p-1})_n} \cdot \frac{x^n}{n!}. \tag{1} $$

ただし $(b_1)_n \cdots (b_{p-1})_n \neq 0$ とする．$p = 2$ の場合は Gauss の超幾何級数に相当する．微分方程式を満たすことが知られており，広範囲に有用である．例えばClausen の恒等式 (1828 年)は T. Clausen によって証明された恒等式であって，一つの超幾何級数が別の超幾何級数の積で表されることに繋がる．例えば

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, x\right)^2 = {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2} \\ 1, 1 \end{matrix} \,\middle|\, 4x(1-x)\right) \tag{2} $$

という形である．Clausen 自身も Matin の公式 $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$ を用いて 250 桁まで円周率を手計算している．

さて k, k' をパラメータとして，楕円積分つまり楕円の弧長を表すときに現れる一般に第 1 種楕円積分（周期）を

$$ K := K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad (0 < k < 1) \tag{3} $$

とおき，第 2 種楕円積分（擬周期）を

$$ E := E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \quad (0 < k < 1) \text{ とおく．} \tag{4} $$

超幾何級数が周期の比でかける事実

$$ \frac{2K}{\pi} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, k^2\right) = z(k^2) $$

と Clausen の公式から $x = k^2, k' = \sqrt{1-k^2}, k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, 4x(1-x) = (2kk')^2$ に対し

$$ \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2} \\ 1, 1 \end{matrix} \,\middle|\, (2kk')^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(n!)^3} (2kk')^{2n} \tag{5} $$

が現れる．ここで Ramanujan は無限積 $(a;q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)$ を導入し，$q = e^{-\pi\cdot\frac{K'}{K}}$ に対し

$$q^{\frac{1}{3}}(q^2;q^2)_\infty^4 = \left(\frac{1}{4}kk'\right)^{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(n!)^3}(2kk')^{2n} \tag{6}$$

と表し，k に関し対数微分すると Eisenstein 級数 $P(q)$ に対し $P(q^2)$ が見えたところに，Eisenstein 級数の変換公式を適用したのである．つまり

$$P(q) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n} \quad (|q|<1) \tag{7}$$

に対し，$z = z(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle|\, x\right)$ とおいたときに，Eisenstein 級数の変換公式

$$P(q^2) = (1-2x)z^2 + 6x(1-x)z\frac{dz}{dx} \tag{8}$$

を適用した．まとめると Ramanujan の着想は，超幾何級数が周期の比で表せる事実に注目し，

$$\frac{2K}{\pi} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle|\, k^2\right) = z(k^2) = z$$

に Eisenstein 級数の変換公式と Clausen の恒等式を用いたことと思われる．

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,1\end{matrix}\middle|\, x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n, \quad A_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3},$$

$z = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle|\, x\right)$ を Clausen の恒等式 $z^2 = {}_2F_1^2 = {}_3F_2$ に代入すると $z^2 = \sum_{n=0}^{\infty}A_n X^n$，$X = 4x(1-x)$ となる．z を x で項別微分して得られる式は，$2z\frac{dz}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}nA_nX^{n-1}\cdot 4(1-2x)$ で，Eisenstein 級数の変換公式

$$P(q^2) = (1-2x)z^2 + 6x(1-x)z\frac{dz}{dx} \tag{9}$$

において，z は $\frac{2K}{\pi}$，z^2 は $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$ になる．z を x で項別微分して得られる式

$$2z\frac{dz}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}nA_nX^{n-1}\cdot 4(1-2x)$$

を用いると $\frac{2K}{\pi}$ と $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$ と級数が現れ，$\frac{2K}{\pi}$ がうまく『約せて』π が級数で表される．

Clausen の公式と精度との関係についてであるが，Clausen の公式を使わないで示されたのは (CCL) のみであると考えている．π に合致する精度の高さ順は，グラフによると

$(Chud) > Ram(44) > (NTS) > (CTYZ) > (CC) > \underline{(CCL)}$ であったので，Clausen の公式によって級数を積表示したことが，精度向上に関連したのではないかと考えている．

5　π の数論的性質

ここで円周率の数論的な性質を簡単にまとめておこう．まず，π は無理数である (1771 年, J. H. Lambert, 1956 年，I. Niven が証明を簡素化)．そして π は超越数である (1882 年, F. Lindemann).

ちなみに，超越数とは有理数を係数とする 1 変数多項式の根に決してならない複素数を指す．

無理数の分類については

- $\lambda \in \mathbb{R}$ が Liouville 数 $\Longleftrightarrow \forall$ 正数 d に対し $\exists$ 有理数 p/q:

$$0 < \left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^d}$$

  という定義がある．d はいくらでも大きく取れるので，右辺はいくらでも小さく取れる．即ち λ は，有理数で非常に速く近似できる数であることを示している．

- Liouville 数 λ は必ず超越数になる．つまり有理数で「数論的に」速く近似できる数 λ は，有理数から最もかけ離れた性質を持つ「超越数」なのである．Liouville 数全体の集合は，非加算であるが Lebesgue 速度は 0 である．

しかし π は Liouville 数ではない (1953 年, K. Mahler が証明)．従って，π は超越数であるにも拘らず「数論的に」それほど速くは有理数で近似できない数なのである．

また D. V.& G. V. Čudnovsky 兄弟は，十分大きな正整数 q に対し以下を示した：

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{14.65}}.$$

上記の形の現時点での最良の近似は，D. Zeilberger & W. Zudilin (2019 年) によるものであり，Čudnovsky 兄弟の不等式の右辺の指数を 7.10320533 に改良したものである．
$q^{-14.65}$ よりも $q^{-7.10320533}$ が『大きい』ことに注意されたし．

ここにも Ramanujan から続く数論的な近似が用いられているのである．
なお，S. Ramanujan 直筆ノートは，[30] の Website にて閲覧可能ですので，是非ご覧ください：
https://www.imsc.res.in/ rao/ramanujan /introindex.html　です．

参考文献

[1] G. E. Andrews & B. C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook, Part II*, Springer, 2009.

[2] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Math. Tracts, **32**, Cambridge Univ. Press, 1935.

[3] N. D. Baruah, B. C. Berndt & H. H. Chan, *Ramanujan's Series for* $1/\pi$*: A Survey*, Amer. Math. Monthly, **116**, no. 7, (2009), 567–587.

[4] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part II*, Springer, 1989.

[5] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part III*, Springer, 1991.

[6] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part IV*, Springer, 1994.

[7] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part V*, Springer, 1998.

[8] B. C. Berndt, S. Bhargava & F. G. Garvan, *Ramanujan's theories of elliptic functions to alternative bases*, Trans. Amer. Math., Soc., **347**, (1995), 4236–4244.

[9] J. M. Borwein & P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, Wiley, 1987.

[10] J. M. Borwein, P. B. Borwein & D. H. Bailey, *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to compute One Billion Digits of PI*, Amer. Math. Monthly, **96**, no. 3, (1989), 201–219.

[11] H. H. Chan & S. Cooper, *Rational analogues of Ramanujan's series for* $1/\pi$, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **153**, no. 2, (2012), 361–383.

[12] H. H. Chan, Y. Tanigawa, Y. Yang & W. Zudilin, *New analogues of Clausen's identities arising from the theory of modular forms*, Advances in Math., **228**, (2011), 1294–1314.

[13] S. Chowla, *Series for* $1/K$ *and* $1/K^2$, J. London Math. Soc. **3**, (1928), 9–12.

[14] D. V. & G. V. Chudnovsky, *Padé and Rational Approximation to Systems of Functions and Their Arithmetic Applications*, Lecture Notes in Math., **1052**, Springer, (1984).

[15] D. V. Chudnovsky & G. V. Chudnovsky, *Approximation and complex multiplication according to Ramanujan*, in Ramanujan Revisited (Urbana-Champaign, 1987), eds. G. E. Andrews et al., Academic Press, (1988), 375–472.

[16] D. V. & G. V. Chudnovsky, *The computation of classical constants*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Mathematics, **86**, (1989), 8178–8182.

[17] T. Clausen, *Über die Fälle wenn die Reihe* $y = 1 + \dfrac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \cdots$ *ein quadrat von der Form* $z = +\dfrac{\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma'}{1\cdot\delta'\epsilon'}x + \cdots$ *hat*, J. für die reine angew. Math.,**3**, (1828), 89–95.

[18] J. Guillera & W. Zudilin, *Ramanujan-Type Formulae for* $1/\pi$*: The art of Translation*, Proceedings of an International Conference in Celebration of the 125 the Anniversary of Ramanujan's Birth, University of Delhi, 2012, eds. B. & D. Prasad, Lecture Notes Series No. 20, The Legacy of Srinivasa Ramanujan, Ramanujan Mathematical Society, (2013), 181–195.

[19] J. -P. Delahaye, Le Fascinant Nombre π, Pour la Science, 1997, π -魅惑の数-, ジャン＝ポール・ドゥラエ著, 畑 政義訳, 朝倉書店, 2001.

[20] M. Hata, R*ational approximations to* π *and some other numbers*, Acta Arith., **63**, (1993), 335–349.

[21] F. Lindemann, *Über die Zahl* π, Math. Ann., **20**, (1882), 213–225.

[22] K. Mahler, *On the Approximation of* π, Indag. Math., **15**, (1953), 30–42.

[23] I. Niven, A Simple Proof that π is Irrational, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 509.

[24] I. Niven, *Irrational Numbers*, first edition 1956, reprinted in the Carus Mathematical Monographs, **11**, Math. Association of America, 2005.

[25] H. Padé, *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*, Annales Scientifiques de l'ENS. de Paris, **9**, (1892), 1–93.

[26] S. Ramanujan, *Squaring the circle*, J. of Indian Math. Soc., **5**, (1913), 132, reprinted in *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, G. H. Hardy et al. (eds.), Cambridge Univ. Press, 1927, 22 (reprinted by Chelsea Publ., 1962), reprinted by Cambridge Univ. Press paperback edition, 2015).

[27] S. Ramanujan, *Modular equations and approximations to* π, Quarterly J. of Math. (Oxford), ser. 2, **45**, (1914), 350–372, reprinted in *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, G. H. Hardy et al. (eds.), Cambridge Univ. Press, 1927, 23–39 (reprinted by Chelsea Publ., 1962), reprinted by Cambridge Univ. Press paperback edition, 2015).

[28] S. Ramanujan, *Notebooks (2 volumes' edition)*, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, 1957, reprinted by Narosa, New Delhi, 1984.

[29] S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, with an introduction by G. E. Andrews, Narosa, New Delhi, 1988, North American and European Distribution, Springer.

[30] K. Srinivasa Rao, https://www.imsc.res.in/ rao/ramanujan /introindex.html, Website on Srinivasa Ramanujan, Institute of Mathematical Sciences, Chennai, India, 2004.

[31] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer, 1980.

[32] L. J. Slater, *Confluent hypergeometric functions*, Cambridge Univ. Press, 1960.

[33] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge Univ. Press, 1966.

[34] 竹之内 脩 & 伊藤 隆, π -πの計算 アルキメデスから現代まで-, 共立出版, 2007.

N. Hirata-Kohno, Kiyomitsu Suzuki, Satoshi Tonegawa, Yukiko Washio

College of Science & Technology
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan

email: hirata at math.cst.nihon-u.ac.jp

Kodai Kurishima, Hiroki Nishibayashi, Yudai Suzuki

Mathematics Major,
Graduate School of Science & Technology,
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan

Yusuke Washio

Buzan-joshi High School;
Nihon University
Nakadai 3-15, Itabashi, Tokyo
174-0064, Japan