An interpolation theorem of metrics and geometric properties in spaces of metrics

筑波大学大学院数理物質科学研究科 伊敷 喜斗
Yoshito Ishiki
Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

RIMS 共同研究「一般位相幾何学とその関連分野の進展」における筆者の発表のもとになった論文 [3] の要約を本稿で行う．

1 はじめに

距離化可能空間 X に対して記号 $\mathrm{M}(X)$ で X 上の距離関数で，X と同じ位相を生成するもの全体を表すことにする．二つの距離 $d, e \in \mathrm{M}(X)$ に対して，∞ の値も許した距離 $\mathcal{D}_X(d,e) = \sup_{x,y\in X} |d(x,y) - e(x,y)|$ を導入することにより，$\mathrm{M}(X)$ にも距離空間の構造が入る．以下では $\mathrm{M}(X)$ には $\mathcal{D}_X$ によって生成される位相が備わっているとする．

1930 年に Hausdorff [2] は距離化可能空間 X の閉部分集合 A とその上の距離 $d \in \mathrm{M}(A)$ に対して X 上の距離 $D \in \mathrm{M}(X)$ が存在して $D|_{A^2} = d$ となることを示した．また，Nguyen Van Khue と Nguyen To Nhu [6] は Hausdorff の拡張定理を同時拡張定理に一般化した．すなわち距離化可能空間 X の閉部分集合 A に対して二つの写像 $\phi_1, \phi_2 : \mathrm{M}(A) \to \mathrm{M}(X)$ であって以下の三つを満たすものを構成した．

(1) 任意の $d \in \mathrm{M}(A)$ に対して $\phi_1(d)$ と $\phi_2(d)$ は関数 d の拡張になっている．
(2) ϕ_1 は $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_X$ に関する 20-リプシッツ写像で，
(3) ϕ_2 は順序を保つ連続写像である．

位相空間 X の部分集合族 $\{S_i\}_{i\in I}$ が疎であるとは任意の X の点に対してその点の近傍で $\{S_i\}_{i\in I}$ の高々一個の元としか交わらないものが存在するときにいう．筆者は上で述べたハウスドルフの拡張定理の一般化として，次の補間定理を示した．

定理 1.1 ([3]). X を距離化可能とし，$\{A_i\}_{i\in I}$ を X の閉集合からなる疎な空でない族とする．そして $d \in \mathrm{M}(X)$ とし，$\{e_i\}_{i\in I}$ を各 $i \in I$ について $e_i \in \mathrm{M}(S_i)$ を満たす距離関数の族とする．このとき X 上の距離関数 $m \in \mathrm{M}(X)$ が存在して以下を満たす．

(1) 任意の $i \in I$ について $m|_{A_i^2} = e_i$ である．
(2) $\mathcal{D}_X(m, d) = \sup_{i\in I} \mathcal{D}_{A_i}(e_i, d|_{A_i^2})$.

この定理を用いて位相空間 $\mathrm{M}(X)$ の位相構造を調べることができる．特に距離空間の有限集合を用いて定義される幾何学的性質を満たす距離関数全体が $\mathrm{M}(X)$ の中でどのような位相的分布を持つのか決定することができた．以下で必要な定義を述べる．

記号 $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ で $\mathbb{N}$ の空でない部分集合からなる集合を表し，$W \in \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ に対して，$\mathrm{Seq}(W, S)$ で S 内の単射な添字を持つ点列 $\{a_i\}_{i=1}^M$ で $M \in W$ を満たすもの全体を表すことにする．また，位相空間 T に対して $\mathcal{F}(T)$ で T の閉集合全体からなる集合を表す．

定義 1.1 ([3]). Q を高々可算な集合とし，P を位相空間とする．また，F は Q から $\mathcal{F}(P)$ への写像で，G は Q から $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ への写像とする．そして Z は集合として，ϕ は $q \in Q$ と距離化可能空間 X に対して写像 $\phi^{q,X} : \mathrm{Seq}(G(q), X) \times Z \times \mathrm{M}(X) \to P$ を割り当てる対応であるとする．このとき 6 つ組 $\mathfrak{G} = (Q, P, F, G, Z, \phi)$ が以下の条件を満たすとき，これを**伝播径数**と呼ぶ．

(1) 任意の $q \in Q$ と任意の距離化可能空間 X と $a \in \mathrm{Seq}(G(q), X)$，そして $z \in Z$ を固定したとき，$\phi^{q,X}(a, z, d)$ は $d \in \mathrm{M}(X)$ について連続写像である．
(2) 任意の $q \in Q$ と任意の距離化可能空間 X，そして X の任意の部分集合 S と任意の $z \in Z$ 及び任意の $a \in \mathrm{Seq}(G(q), S)$ について，$\phi^{q,X}(a, z, d) = \phi^{q,S}(a, z, d|_{S^2})$ が成り立つ．

定義 1.2 ([3]). 伝播径数 $\mathfrak{G} = (Q, P, F, G, Z, \phi)$ に対して，距離空間 (X, d) が **$\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つ**とは，ある $q \in Q$ が存在して，任意の $z \in Z$ と任意の $a \in \mathrm{Seq}(G(q), X)$ に対して $\phi^{q,X}(a, h, d) \in F(q)$ を満たすときにいう．また，(X, d) が $\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たさないとき，(X, d) は**反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つ**という．

距離空間が $\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たすとき，その部分距離空間も $\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たす．

定義 1.3 ([3]). 伝播径数 $\mathfrak{G} = (Q, P, F, G, Z, \phi)$ が**特異的である**とは，任意の $q \in Q$ と $\epsilon \in (0, \infty)$ に対して $z \in Z$ と有限距離空間 (S, d_S) が存在して，以下を満たすときにいう．

(1) $\mathrm{diam}_{(S,d_S)}(S) \le \epsilon$.

(2) $\mathrm{card}(S) \in G(q)$.
(3) $\phi^{q,S}(S, h, d_S) \in P \setminus F(q)$.

ここで，diam は直径を表し，card は濃度を表す．

位相空間の部分集合が G_δ であるとは，それが可算個の開集合の共通部分として表されるときにいう．以上の定義のもとで，定理 1.1 を利用して筆者は以下の定理を証明した．

定理 1.2 ([3])**.** 距離化可能空間 X は離散空間ではないとし，伝播径数 $\mathfrak{G}$ は特異的であるとする．このとき集合

$$\{\, d \in \mathrm{M}(X) \mid (X, d) \text{ は反 } \mathfrak{G} \text{ 伝播性質をもつ} \,\}$$

は位相空間 $M(X)$ の中で稠密 G_δ 集合である．

特異的な伝播径数を持つ伝播性質として具体的には以下のものがある．

命題 1.1. 距離空間に対する以下の性質は特異的な伝播径数を持つ伝播性質として表すことができる．

(1) 二倍性質.
(2) 一様不連結性.
(3) 超距離不等式を満たすこと.
(4) トレミーの不等式を満たすこと.

よって，定理 1.2 から X を離散的ではない距離化可能空間とするとき，命題 1.1 にあげられた性質の否定を満たす距離関数は $\mathrm{M}(X)$ の稠密 G_δ 集合をなす．一方でグロモフ双曲性は伝播性質として表すことができるが特異的な伝播径数を持たず，グロモフ双曲性の否定を満たす距離関数の全体は $\mathrm{M}(X)$ の中で稠密ではない．
局所化された伝播性質についても距離関数の空間の中での位相分布を調べた．

定義 1.4 ([3])**.** 伝播径数 $\mathfrak{G}$ に対して距離空間 (X, d) が**局所反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つ**とは X の任意の空でない開集合が反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つときにいう．

位相空間 X を第二可算で局所コンパクトハウスドルフ空間とすると，空間 $\mathrm{M}(X)$ は完備距離付可能であり，特にベール空間である．これを利用して次の定理を証明した．

定理 1.3 ([3])**.** 位相空間 X は第二可算で局所コンパクトハウスドルフであるとし，さら

に任意の開部分空間が離散ではないとする．このとき特異的な伝播径数 $\mathfrak{G}$ に対して集合

$$\{\, d \in \mathrm{M}(X) \mid (X,d) \text{ は局所反 } \mathfrak{G} \text{ 伝播性質をもつ} \,\}$$

は位相空間 $\mathrm{M}(X)$ の中で稠密 G_δ である．

以上で述べた定理 1.2 と 1.3 は数学でしばしば現れる特異な数学的対象の typicality に関する定理の一つであることを注意する．例えば，微分可能多様体に対する Thom の横断性定理や，連続でかつ至る所微分不可能な関数が $C[0,1]$ の中で第二類集合になっているというバナッハの結果などは typicality に関する定理の例である．

2　距離関数の補間定理

この節では定理 1.1 の証明の概略を解説する．X と Y を集合とし，$\tau : X \to Y$ を全単射とする．このとき Y 上の距離関数 d に対して，X 上の距離関数 $\tau^* d$ を $\tau^*(x,y) = d(\tau(x), \tau(y))$ で定義する．距離化可能関数 X と $d, e \in \mathrm{M}(X)$ に対して $\mathcal{D}_X(d,e) \le r$ であることは二つの距離空間 (X,d) と (X,e) の Gromov–Hausdorff 距離がおおよそ r で抑えられることと同値という観察から次の補題を得る ([1, Theorem 7.3.25] も参照のこと)．

補題 2.1. X を距離化可能空間とし，$r \in (0,\infty)$ で $d, e \in \mathrm{M}(X)$ とし，なおかつ $\mathcal{D}_X(d,e) \le r$ とする．そして $X_0 = X$ とし, X_1 を $\mathrm{card}(X_0) = \mathrm{card}(X_1)$ と $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ を満たす集合とし，$\tau : X_0 \to X_1$ を全単射とする．このとき，$h \in \mathrm{M}(X_0 \sqcup X_1)$ で以下を満たすものが存在する．

(1) $h|_{X_0^2} = d$.
(2) $h|_{X_1^2} = (\tau^{-1})^* e$.
(3) 任意の $x \in X_0$ に対して $h(x, \tau(x)) = r/2$.

次の補題は距離関数の融合補題と呼ばれている．証明は省略する．

補題 2.2. (X,d) と (Y,e) を距離空間とし，$Z = X \cap Y$ と置く，もし $d|_{Z^2} = e|_{Z^2}$ ならば $X \cup Y$ 上の距離 h が存在して $h|_{X^2} = d$ と $h|_{Y^2} = e$ を満たす．

補題 2.1 と 2.2 と超限帰納法を用いて次の補題が示せる．

補題 2.3. X を距離化可能空間とし，$\{A_i\}_{i \in I}$ を疎な X の閉部分集合族とする．そして $d \in \mathrm{M}(X)$ とし $\{e_i\}_{i \in I}$ は $e_i \in \mathrm{M}(A_i)$ を満たす距離関数の族とする．ここで $\eta = \sup \mathcal{D}_X(e_i, d|_{A^2})$ と置き，$\eta < \infty$ と仮定する．そして，$\{B_i\}_{i \in I}$ を互いに素な集合族

で，任意の $i \in I$ に対して $\operatorname{card}(A_i) = \operatorname{card}(B_i)$ と $X \cap B_i = \emptyset$ を満たすとする．さらに $\tau_i : A_i \to B_i$ を全単射とし，$\tau : \coprod_{i \in I} A_i \to \coprod_{i \in I} B_i$ を $\{\tau_i\}_{i \in I}$ から誘導される自然な全単射とする．このとき $X \sqcup \coprod_{i \in I} B_i$ 上の距離関数 h が存在して次を満たす．

(1) 任意の $i \in I$ について $h|_{B_i^2} = (\tau^{-1})^* e_i$.
(2) $h|_{X^2} = d$.
(3) 任意の $x \in \coprod_{x \in I} A_i$ について $h(x, \tau(x)) = r/2$.

次に Michael の連続選択子定理を紹介する．V をバナッハ空間とする．記号 $\mathcal{CC}(V)$ で V の空でない凸閉部分集合全体を表すとする．そして X を位相空間とする．このとき写像 $\phi : X \to \mathcal{CC}(V)$ が**下半連続**であるとは V の任意の開集合 O に対して集合 $\{ x \in X \mid \phi(x) \cap O \neq \emptyset \}$ が X の開集合であるときにいう．下半連続な集合値関数に対して連続な選択関数の存在を保証するのが Michael の連続選択子定理である ([5] を参照のこと).

定理 2.1. X をパラコンパクトハウスドルフ空間とし，A をその閉集合とする．そして V をバナッハ空間とし，$\phi : X \to \mathcal{CC}(V)$ を下半連続な写像とする．連続写像 $f : A \to V$ は任意の $x \in A$ に対して $f(x) \in \phi(x)$ を満たしているとする．このとき連続写像 $F : X \to V$ が存在し，$F|_A = f$ を満たしさらに任意の $x \in X$ に対して $F(x) \in \phi(x)$ を満たす．

定理 1.1 の証明に入る前に証明の中心的なアイデアを紹介する．距離化可能空間 X に対して，距離関数 $d \in \mathrm{M}(X)$ を与えると Kuratowski の等長埋め込み定理などの距離空間をバナッハ空間へ埋め込む定理などを適応することによって X からバナッハ空間への位相埋め込みが誘導される．逆に X からバナッハ空間 $(V, \| * \|_V)$ への位相埋め込み $I : X \to V$ が与えられたとすると，$m : X^2 \to [0, \infty)$ を $m(x, y) = \|I(x) - I(y)\|_V$ と定義することによって距離関数 $m \in \mathrm{M}(X)$ が誘導される．このように $\mathrm{M}(X)$ の元と X からバナッハ空間への位相埋め込みの写像全体の間には対応関係が存在している．この対応関係を用いることによって距離関数の補間定理である定理 1.1 の主張をバナッハ空間への埋め込みの族の補間問題へと変換することができる．この位相埋め込みの補間問題を Michael の連続選択子定理を利用して解くのが定理 1.1 の大まかな流れである．

定理 *1.1* の証明の概略. X を距離化可能とし，$\{A_i\}_{i \in I}$ を X の閉集合からなる疎な空でない族とする．そして $d \in \mathrm{M}(X)$ とし，$\{e_i\}_{i \in I}$ を各 $i \in I$ について $e_i \in \mathrm{M}(S_i)$ を満たす距離関数の族とする．そして $\eta = \sup_{i \in I} \mathcal{D}_{A_i}(e_i, d|_{A_i^2})$ とする．$\eta = \infty$ のときは

Hausdorff の拡張定理を適応すると定理が証明される．以下では $\eta < \infty$ と仮定する．集合族 $\{B_i\}_{i\in I}$ と $\{\tau_i\}_{i\in I}$ を補題 2.3 の主張に現れるものとする．補題 2.3 を適応することにより，$X \sqcup \coprod_{i\in I} B_i$ 上の距離関数 h が存在して次を満たす.

(1) 任意の $i \in I$ について $h|_{B_i^2} = (\tau^{-1})^* e_i$.
(2) $h|_{X^2} = d$.
(3) 任意の $x \in \coprod_{x\in I} A_i$ について $h(x, \tau(x)) = r/2$.

簡単のために $Z = X \sqcup \coprod_{i\in I} B_i$ と置く．さて，Kuratowski の等長埋め込み定理などの距離空間をバナッハ空間に等長に埋め込む定理を用いることによってバナッハ空間 $(Y, \|*\|_Y)$ と等長埋め込み $H : (Z, h) \to (Y, \|*\|_Y)$ が存在する．写像 $\phi : Z \to \mathcal{CC}(Y)$ を $\phi(x) = B(H(x), \eta/2)$ とする．ここで，$B(x, r)$ で中心 x 半径 r の閉球を表す．このように定義された ϕ は下半連続である．写像 $f : \coprod_{i\in I} A_i \to Y$ を $f(x) = H(\tau(x))$ と定義すると f は連続写像であり，任意の $x \in \coprod_{i\in I} A_i$ に対して $f(x) \in \phi(x)$ を満たす．いま，$\{A_i\}_{i\in I}$ が疎であることと，X がパラコンパクトであることから定理 2.1 を適用することができ，連続写像 $F : X \to Y$ で $F(x) \in \phi(x)$ を満たすものが存在する．ここで，$F(x) \in \phi(x)$ は $\|F(x) - H(x)\|_Y \leq \eta/2$ と同値である．補題 2.2 と超限帰納法，そして Hausdorff の拡張定理により $r \in \mathrm{M}(X)$ であって，$r|_{A_i^2} = e_i$ となるものが存在する．この r を用いて $l \in \mathrm{M}(X)$ を $l(x.y) = \min\{r(x, y), \eta/2\}$ と定義する．さて写像 $E : X \to Y \times X$ を

$$E(x) = (F(x), x)$$

と定義すると E は位相埋め込みになっている．いま，$Y \times X$ 上の距離 D を $D((a, b)(c, d)) = \max\{\|a - c\|_Y, l(b, d)\}$ と定義する．基点 $o \in X$ を固定して写像 $K : X \to Y \times X$ を

$$K(x) = (H(x), o)$$

と定義すると，K は距離関数 d と D について等長埋め込み写像である．

任意の $x \in X$ に対して $\|F(x) - H(x)\|_Y \leq \eta/2$ が成り立つので

$$D(E(x), K(x)) = \max\{\|F(x) - H(x)\|_Y, l(x, y)\} \leq \eta/2 \tag{1}$$

が成り立つ．いま，X 上の距離関数 m を $m(x, y) = D(E(x), E(y))$ と定義する．この m が定理の主張を満たすことを見ていく．写像 E が位相埋め込みなので $m \in \mathrm{M}(X)$ はすぐにわかる．また，任意の $x, y \in A_i$ に対して $\|F(x) - F(y)\|_Y = e_i(x, y)$ で，$l(x, y) \leq e_i(x, y)$ なので $x, y \in A_i$ に対して

$$m(x, y) = \max\{\|F(x) - F(y)\|_Y, l(x, y)\} = e_i(x, y)$$

がわかる．これで定理の中の条件 (1) が成り立つことがわかった．次に条件 (2) を示す．まず $m|_{A_i^2} = e_i$ となることから $\eta \leq \mathcal{D}_X(m,d)$ となることがわかる．逆の不等式を示そう．距離関数 D の定義と K が等長埋め込みになっていることと，式 (1) を使うと，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\begin{aligned}|m(x,y) - d(x,y)| &= |D(E(x),E(y)) - D(K(x),K(y))| \\ &\leq D(E(x),K(x)) + D(E(y),K(y)) \leq \eta/2 + \eta/2 = \eta\end{aligned}$$

が成り立つことがわかるので定理が示された． □

3　定理 1.2 と定理 1.3 の証明

この節では定理 1.2 と定理 1.3 の証明の概略を紹介する．まず定理 1.1 において I を一点集合とすると次を得る．

系 3.1 ([3])**.** X を距離化可能とし，A を X の閉集合とする．そして $d \in \mathrm{M}(X)$ とし，$e \in \mathrm{M}(A)$ とする．このとき X 上の距離関数 $m \in \mathrm{M}(X)$ が存在して以下を満たす．

(1) $m|_{A^2} = e$ である．
(2) $\mathcal{D}_X(m,d) = \sup_{i\in I} \mathcal{D}_A(e, d|_{A^2})$.

この系 3.1 を使って定理 1.2 を証明する．

定理 *1.2* の証明の概略. 距離化可能空間 X は離散空間ではないとし，伝播径数 $\mathfrak{G}$ は特異的であるとする．そして $E = \{\, d \in \mathrm{M}(X) \mid (X,d)$ は反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質をもつ $\}$ と置く．伝播性質の定義から X によらずに集合 E が G_δ になることが従うが，詳細は省略する ([3, Corollary 4.4] を参照のこと)．以下では E が稠密になることを示す．任意に $d \in \mathrm{M}(X)$ と $\epsilon \in (0,\infty)$ をとる．伝播径数 $\mathfrak{G}$ が特異的であることは次のことと同値である．任意の $\epsilon \in (0,\infty)$ に対して可算離散空間の一点コンパクト化と同相な距離空間 (R,e) が存在してその直径は ϵ 以下であり，なおかつ (R,e) は反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たす．仮定より X は可算離散空間の一点コンパクト化と同相な部分集合を含む．それを A と置く．さらに A の d に関する直径は ϵ 以下であると仮定しても良い．ここで A と上で述べた R を同一視する．以下では $e \in \mathrm{M}(A)$ とみなす．空間 X とその閉集合 A，そして $d \in \mathrm{M}(X)$ と $e \in \mathrm{M}(A)$ に対して系 3.1 を適応すると $m \in \mathrm{M}(X)$ であって，$m|_{A^2} = e$ と $\mathcal{D}_X(m,d) = \mathcal{D}_A(e, d|_{A^2})$ を満たすものが存在する．集合 R の d と e に関する直径は ϵ 以下なので，$\mathcal{D}_X(m,d) \leq 2\epsilon$ がわかる．一般に $\mathfrak{G}$ 伝播性質は部分集合に遺伝するので，$\mathfrak{G}$ の特異性と e の定義から

(X, m) は反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たすことがわかり，$m \in E$ がわかる．距離関数 d と ϵ は任意であったので E が $\mathrm{M}(X)$ の中で稠密であることがわかる． $\square$

定理 *1.3* の証明の概略．位相空間 X は第二可算で局所コンパクトハウスドルフであるとし，さらに局所的に離散ではないとする．そして $\mathfrak{G}$ を特異的な伝播径数とする．

$$E = \{\, d \in \mathrm{M}(X) \mid (X, d) \text{ は局所反 } \mathfrak{G} \text{ 伝播性質をもつ} \,\}$$

と置く．空間 X の可算な開基を $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ とする．そして各 $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$E_i = \{d \in \mathrm{M}(X) \mid (U_i, d|_{U_i}) \text{ は反 } \mathfrak{G} \text{ 伝播性質をもつ} \,\}$$

と置くと，定理 1.2 と同様の議論で各 E_i は $\mathrm{M}(X)$ の中で稠密 G_δ であることがわかる．さらに

$$E = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i \tag{2}$$

が成り立つ．空間 X は第二可算で局所コンパクトハウスドルフであるから空間 $\mathrm{M}(X)$ はベール空間となる ([3, Lemma 5.1] を参照のこと)．よって式 (2) より E も $\mathrm{M}(X)$ の稠密 G_δ 集合であることがわかる． $\square$

注意 3.1. 本研究の発展の一つとして，以上で述べた距離関数の補完定理や距離関数の空間の位相的性質の研究結果について超距離空間でも類似の結果が得られることがわかっている ([4] を参照のこと)．

参考文献

[1] D. Burago, Y. Burago and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 33, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2001.

[2] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöorphie*, Fund. Math. 16 (1930), 353–360.

[3] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, preprint, arXiv:2003.13227.

[4] Y. Ishiki, *An embedding, an extension, and an interpolation of ultrametrics*, preprint, arXiv:2008.10209.

[5] E, Michael, *Continuous selections. I*, Ann. of Math. (2) 63 (2) (1956), 361–382.

[6] Nguyen Van Khue and Nguyen To Nhu, *Two extensors of metrics*, Bull. Acad. Polon. Sci. 29 (1981), 285–291.