線形構造と両立する二つの位相構造の共通部分が再び線形構造と両立する条件について

大阪大学・大学院理学研究科数学専攻 [*]

青山　昂頌 [†]

Takanobu Aoyama

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

概 要

付値体係数の有限次元線形空間を位相線形空間にする位相（両立する位相）を考える. 二つの両立する位相に対して, 共通部分をとった位相が再び両立するかは明らかではない. 本稿では Hausdorff な二つの両立する位相の共通部分は自明な場合を除き, 両立しないことを紹介する. 次に Hausdorff とはある種, 逆の両立する位相の概念（有理位相）を導入し, 有理位相と他の両立する位相の共通部分は必ず両立することを紹介する. 最後にこれらの結果を用いて二つの応用を紹介する.

1 はじめに

固定した集合 X に定まる位相構造全体の集合を $\Sigma(X)$ とする. このとき X 上の位相構造の強弱関係, すなわち $\Sigma(X)$ 上の包含関係は位相的性質の情報を持っている.1936 年に G. Birkhoff は [3] において半順序集合 $(\Sigma(X), \subset)$ が束構造という代数的構造をもつことを示した. ここで, 半順序集合 $(\mathbb{P}, \leq)$ が束構造をもつとは, 任意の $\mathbb{P}$ の二元 p_1, p_2 が順序 $\leq$ に関して上限と下限をもつことである. 二元 p_1, p_2 に対して上限と下限は唯一つ定まるので, 二項演算が二つ定まるという意味で代数構造をもつ. 記号として, 二元の上限をとる演算を $\vee_{\mathbb{P}}$, 下限をとる演算を $\wedge_{\mathbb{P}}$ とかき,$\mathbb{P}$ が自明なときは略して $\vee, \wedge$ とかく. また, 束の順序が自明なときは束を $\mathbb{P}$ と略記することにする.
次に $(\mathbb{P}, \leq)$ が完備束であるとは, 任意個数の $\mathbb{P}$ の元に対して上限, 下限が存在することである（したがって, とくに束である）. いま半順序集合 $(\Sigma(X), \subset)$ の場合は完備束であり, 実際に X の位相構造の族 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられた場合, その上限と下限は各々, 集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ で生成された位相 T_Λ と $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ である.
いま集合 X が群や環などの代数演算を備えている場合,$\Sigma(X)$ の部分集合で代数演算を連続にするような特別な位相（位相群や位相環となる位相）全体からなるものを考える事ができる. 群や環の場合はこの部分集合も包含関係 $\subset$ により束構造をもつ. 本稿では位相体, とくに付値体 K 係数の線形空間を X とした場合に演算を連続にする位相（両立する位相）全体 $\tau_K(X)$ のなす半順序集合 $(\tau_K(X), \subset)$ を考える. より詳しくは, 二つの線形演算である加法とスカラー倍：

$$
\begin{aligned}
+ :& X \times X \to X, \\
\cdot :& K \times X \to X
\end{aligned}
$$

[*] 〒 560-0044 大阪府豊中市待兼山町 1-1 Machikaneyama cho 1-1, Toyonaka, Osaka, Japan 560-0044

[†] E-mail: t-aoyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

を連続にする X 上の位相構造 T のなす集合を考える. ここで,K の位相は位相体としての位相を固定し, 各直積集合には直積位相を入れる. この場合も束構造をもつことがわかる. さらに強く,

命題 1. $(\tau_K(X), \subset)$ は完備束, すなわち任意個数の $\tau_K(X)$ の元に対しても上限と下限が存在する.

Proof. $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\lambda \in \Lambda$ で添え字づけられた $\tau_K(X)$ の元の族として,T_Λ を集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ により生成された X 上の位相構造とする. このとき T_Λ が X と両立する位相であることを示せば,T_Λ が族 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の上限となることがわかるが, それは各 $\lambda \in \Lambda$ に対して T_λ が両立することから加法とスカラー倍は連続であり, したがって定義域に T_Λ の直積や位相体の位相 T_K と T_Λ の直積を与え, 終域に T_λ を与えても連続となる :

$$+ : (X \times X, T_\Lambda \times T_\Lambda) \to (X, T_\lambda),$$
$$\cdot : (K \times X, T_K \times T_\Lambda) \to (X, T_\lambda).$$

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して上の連続性が成り立つので, 終域に T_Λ を与えた場合も連続となる, すなわち T_Λ は両立する. 次に任意個数の元に関する下限の存在であるが,$\{T_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ を再び $\tau_K(X)$ の元の族として, 上限の存在は示されたので

$$T_{\Lambda'} \coloneqq \sup\{T \in \tau_K(X) \mid \forall\lambda' \in \Lambda' \ \ T \subset T_{\lambda'}\}$$

となる $\tau_K(X)$ の元が存在し, これが $\{T_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ の下限である. よって $(\tau_K(X), \subset)$ は完備束であることが示された. □

とくに完備束は全体の上限, すなわち最大元をもち, それを $T_K^{\max}(X)$ とかくことにする.
そこでいま, 自然な疑問 : **半順序としては $\tau_K(X)$ は $\Sigma(X)$ の部分半順序集合であるが, 束としては部分束であるか**がある. すなわち $T_1, T_2 \in \tau_K(X)$ に対して $(\tau_K(X), \subset)$ における上限と下限が $(\Sigma(X), \subset)$ における上限 $T_1 \vee_{\Sigma(X)} T_2 = < T_1 \cup T_2 >$ と下限 $T_1 \wedge_{\Sigma(X)} T_2 = T_1 \cap T_2$ とに一致するかどうかという問題である. ここで,$< T_1 \cup T_2 >$ は $T_1 \cup T_2$ で生成される位相である. これは上限と下限の定義から,$< T_1 \cup T_2 >$ と $T_1 \cap T_2$ がともに両立する位相であることと同値である. さらに $< T_1 \cup T_2 >$ が両立する位相であることは命題 1 の証明からわかるので, したがって

$$\tau_K(X) \text{ が}\Sigma(X) \text{ の部分束である} \Leftrightarrow \text{勝手な } T_1, T_2 \in \tau_K(X) \text{ に対して } T_1 \cap T_2 \in \tau_K(X)$$

となる. このことから部分束かどうかを判断するのには二つの両立する位相構造の共通部分を考える事が重要となる.

2 線形構造と両立する位相全体と部分空間全体の間の束同型

まず, 記号として $L-$ 係数線形空間 Y のすべての $L-$ 線形部分空間のなす集合を $\sigma_L(Y)$ と表わすことにする. このとき半順序集合 $(\sigma_L(Y), \supset)$ は各部分空間 S_1, S_2 に対して上限, 下限を

$$S_1 \vee_{\sigma_L(Y)} S_2 = S_1 \cap S_2,$$
$$S_1 \wedge_{\sigma_L(Y)} S_2 = S_1 + S_2$$

として束構造をもつ. また, 付値体 (K,ν) の完備化により得られた付値体を $(\hat{K},\hat{\nu})$ とし,$\hat{X} \coloneqq \hat{K}\otimes_K X$ を X の係数拡大とする. また,$I : X \to \hat{X}$ を $x \mapsto 1\otimes x$ で定まる単射とする.

本稿の残りでは付値体 (K,ν) は完備化 $(\hat{K},\hat{\nu})$ が局所コンパクト空間で非自明な付値体であり,X は有限次元であるとする. [1]

さて, 両立する位相構造の成す束 $(\tau_K(X),\subset)$ の束構造について, 筆者は次の対応があることを発見した（[1]）.

補題 1. 以下の写像 $\hat{F}$ は $(\tau_K(X),\subset)$ と $(\sigma_{\hat{K}}(\hat{X}),\supset)$ の間の束同型を与える.

$$\hat{F} : \tau_K(X) \ni T \mapsto \bigcap_{0\in U\in T} \overline{I(U)} \in \sigma_{\hat{K}}(\hat{X}),$$

ここで,$I(U)$ の閉包は $(\tau_{\hat{K}}(\hat{X}),\subset)$ における最大元 $T^{\max}_{\hat{K}}(\hat{X})$ に関してとる.

束同型 $\hat{F}$ の逆写像を $\hat{G} : \sigma_{\hat{K}}(\hat{X}) \to \tau_K(X)$ と書くことにする.

3 ハウスドルフ位相と有理位相

さて, 前の Section における位相と部分空間の対応付け $\hat{F}$ を用いて, 両立する位相の中でハウスドルフな位相は次のように特徴づけられる：

命題 2. 両立する位相 T がハウスドルフである条件は $\hat{F}(T)\cap I(X) = \{0\}$ が成り立つことである.

例 1. K を通常の絶対値 $|\cdot|_\infty$ を与えた有理数体 $\mathbb{Q}$ とし,X を $\mathbb{Q}^2$ としたときの例を考える. このとき補題 1 により,$\mathbb{Q}^2$ に入る両立する位相は $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}-$ 部分空間と対応し,$I(X)$ は $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ となる為,1 次元 $\mathbb{R}-$ 部分空間（直線）で無理数傾きをもつものは命題 2 により, ハウスドルフな両立する位相が対応する. そこで, 二つの異なる無理数傾きの 1 次元部分空間 S_1, S_2 をとり,$T_i \coloneqq \hat{G}(S_i) \in \tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^2)\ \ (i=1,2)$ と定める. このとき $T_1 \wedge_{\tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^2)} T_2$ が対応する部分空間は,$\hat{G}$ が束同型であることから $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^2$ である. したがって $T_1 \wedge_{\tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^2)} T_2$ は密着位相となる. 他方で $T_1 \wedge_{\Sigma(\mathbb{Q}^2)} T_2 = T_1 \cap T_2$ の位相では $\mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$ が開集合であるので $T_1 \wedge T_2 \neq T_1 \cap T_2$ である. したがって, この例の場合では $\tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^2)$ は $\Sigma(\mathbb{Q}^2)$ の部分束ではないことがわかる. また $(\tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^2),\subset)$ における下限の定義より $T_1 \cap T_2 \notin \tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^2)$ である.

この例を一般化することで, ハウスドルフな位相の共通部分は自明な場合を除き, 両立しないことがわかった：

補題 2. $T_1, T_2 \in \tau_K(X)$ をハウスドルフな二つの両立する位相とする. このとき,$T_1 \cap T_2 \in \tau_K(X)$ である条件は $T_1 \subset T_2$ または $T_2 \subset T_1$ が成り立つことである.

次に, ハウスドルフな位相とはある種, 逆の位相を導入する. すなわち, 共通部分をとると再び両立する位相 T であるが, 命題 2 を参考にすると, 対応する部分空間 $\hat{F}(T)$ と $I(X)$ の共通部分が ”大きい ” 位相である.

[1] 局所コンパクトで非自明な付値体は, 実数体 $\mathbb{R}$ か p 進体 $\mathbb{Q}_p$ か有限体上のローラン級数体 $\mathbb{F}((t))$ の有限次拡大のいずれかに同型であることが知られている.[4] を参照されたい.

定義 1. 両立する位相 T が有理位相であるとは,

$$\hat{F}(T) = \mathrm{Span}_{\hat{K}}(\hat{F}(T) \cap I(X))$$

をみたすことである.
また, 有理位相全体のなす集合を $\tau_K^r(X)$ とする.

注意 1. 線形空間 X の両立する位相は $\hat{F}$ によって $\hat{X}$ の部分空間と対応がついた（補題 1）. これに対して各有理位相 T は次の対応で X の部分空間と対応がつくことがわかる：有理位相の定義から X の部分空間 S で $\hat{F}(T) = \mathrm{Span}_{\hat{K}}(I(S))$ となるものが唯一つとれる.
この対応により $(\tau_K^r(X), \subset)$ は $(\sigma_K(X), \supset)$ と順序同型となり, とくに $(\tau_K(X), \subset)$ は束となることがわかる.

さて, 実際に有理位相は共通部分をとる操作と相性がよいことがわかった：

補題 3. 両立する位相 T が有理位相である条件は, 勝手な両立する位相 T' に対して $T \cap T'$ が再び両立することである.

補題 3 により有理位相 T と勝手な位相 T' に対して $T \cap T' \in \tau_K(X)$ が成り立つことと,$(\tau_K(X), \subset)$ と $(\Sigma(X), \subset)$ の下限の定義から次が成り立つ：

系 1. T を有理位相,T' を勝手な両立する位相とするとき, $T \cap T' = T \wedge_{\tau_K(X)} T'$ が成り立つ.

ハウスドルフな位相と有理位相の各々の共通部分をとったときの性質（補題 2, 補題 3）を用いて, はじめの部分束に関する疑問について次のことがわかった：

定理 1. (K, ν) を完備化が局所コンパクトな非自明な付値体とし,X を 2 次元以上の有限次元 $K-$ 線形空間とする. このとき,$(\tau_K(X)\ \subset)$ が $(\Sigma(X), \subset)$ の部分束である条件は,(K, ν) が完備であることである.

ここでは, 証明の概略を示す.

Proof. 付値体 (K, ν) が完備であるとする. このとき $\hat{K} = K$ より $I(X) = \hat{X}$ であることから,$\mathrm{Span}_{\hat{K}}(\hat{F}(T) \cap I(X)) = \mathrm{Span}_{\hat{K}}(\hat{F}(T)) = \hat{F}(T)$ である. したがって $\tau_K(X)$ の元がすべて有理位相となる. ゆえに補題 3 により, 任意の $T_1, T_2 \in \tau_K(X)$ に対して, 共通部分 $T_1 \cap T_2$ は再び $\tau_K(X)$ の元（両立する位相）になる. よって,$\tau_K(X)$ は $\Sigma(X)$ の部分束である.
逆向きの証明は対偶を用いる.(K, ν) が完備ではないとする. すると完備化 $(\hat{K}, \hat{\nu})$ の元で K に属さない数 α がとれ,X が 2 次元以上であるという仮定から α を用いて互いに包含関係を持たない $\hat{X}$ の 1 次元部分空間 S_1, S_2 で $S_i \cap I(X) = \{0\}\ \ (i = 1, 2)$ となるものがとれる. このとき二つの両立する位相を $T_i := \hat{G}(S_i)\ \ (i = 1, 2)$ と定めれば, 命題 2 により T_1, T_2 はハウスドルフな位相であり, さらに互いに包含関係をもたない. 補題 2 により $T_1 \cap T_2$ は両立しないことがわかる. よって $\tau_K(X)$ は $\Sigma(X)$ の部分束ではない. □

以上により $\tau_K(X)$ が $\Sigma(X)$ の部分束である条件が係数体の完備性と同値であることがわかった. これは「両立する位相構造全体の束が位相構造全体の束の中にどのように入っているか」が係数体の完備性の情報を持っていることを示しており, 筆者は興味を覚える.

4 応用

最後に前セクションで紹介した補題 2 と補題 3 を用いた応用を二つ紹介する.

4.1 応用 1：両立する位相の共通部分が両立する判定

一つ目は係数体が完備ではないときにも個々の両立する位相構造の共通部分が再び両立するかどうかを或る程度, 対応する部分空間の基底を用いて判定でき, さらに共通部分が両立するときの対応する部分空間の基底を計算できるものである.
まず, 両立する位相を有理位相とハウスドルフな位相に分解する.

定義 2. 両立する位相 $T \in \tau_K(X)$ に対して,T の有理部分 $T^r \in \tau_K^r(X)$ を

$$T^r \coloneqq \hat{G}(\mathrm{Span}_{\hat{K}}(\hat{F}(T) \cap I(X)))$$

で定義する. すなわち T に対応する部分空間 $\hat{F}(T)$ の部分空間で,$\hat{F}(T) \cap I(X)$ の点で生成される部分空間に対応する両立する位相である.$\hat{F}(T) \cap I(X) \subset \hat{F}(T)$ であり,$\hat{G}$ は包含関係を逆にするので $T \subset T^r$ である.T^r は T より強い最小の有理位相であるとも捉えられる. また T が有理位相であることは $T^r = T$ が成り立つことと言い換えられる.

注意 2. 定義 2 に関連して $\hat{F}(T)$ の直和分解 $\hat{F}(T) = \mathrm{Span}_{\hat{K}}(\hat{F}(T) \cap I(X)) \bigoplus S$ を得るが, このとき $\hat{G}$ によって T の表示

$$T = T^r \wedge_{\tau_K(X)} \hat{G}(S)$$

を得る.T^r が対応する部分空間は $\hat{F}(T) \cap I(X)$ の点をすべて含むので $S \cap I(X) = \{0\}$ であるから, 命題 2 により $\hat{G}(S)$ はハウスドルフ位相である. よって両立する位相は有理位相とハウスドルフ位相の下限をとる操作 $(\wedge_{\tau_K(X)})$ によって表わされる. この表示の有理位相は一意的に決定されるが, ハウスドルフ位相は補空間のとり方の自由度から一意的には決まらない.

次に天下り的ではあるが, 二つの両立する位相 $T_1, T_2 \in \tau_K(X)$ に対して有理位相 $A(T_1, T_2) \in \tau_K^r(X)$ を次のように定める.

定義 3. T_1, T_2 を両立する位相とする. まず, 有理位相の列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に定める：

$$\begin{aligned} t_1 &\coloneqq T_1^r, \\ t_{n+1} &\coloneqq \begin{cases} (T_1 \wedge_{\tau_K(X)} t_n)^r & (n : \mathrm{even}) \\ (T_2 \wedge_{\tau_K(X)} t_n)^r & (n : \mathrm{odd}). \end{cases} \end{aligned}$$

このとき, 列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ は包含関係 $\subset$ に関して減少列：

$$\cdots \subset t_3 \subset t_2 \subset t_1$$

であるから部分空間の列 $\{\hat{F}(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は包含関係 $\subset$ に関して上昇列：

$$\hat{F}(t_1) \subset \hat{F}(t_2) \subset \hat{F}(t_3) \subset \cdots$$

となる.$\hat{X}$ は有限次元であるから, 上昇列 $\{\hat{F}(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ および減少列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある $n = n_0$ で停止する. すなわち,$t_n = t_{n_0}$ が n_0 以上のすべての自然数 n に対して成り立つ. このとき,$A(T_1, T_2) \coloneqq t_{n_0}$ と定める.

次の定理は有理位相 $A(T_1, T_2)$ を用いて共通部分が両立するかどうかの条件が次のように包含関係が成り立つかどうかに言い換えられるというものである. アイデアは系 1 の性質を用いて, 有理位相を T_1 と T_2 の間でやり取りすることで $T_1 \cap T_2$ を変形していくことである.

定理 2. 二つの両立する位相 T_1, T_2 に対して,$T_1 \cap T_2$ が再び両立する条件は $(A(T_1, T_2) \cap T_1) \subset T_2$ または $(A(T_1, T_2) \cap T_2) \subset T_1$ が成り立つことである. またこのとき, 各場合に対応して $T_1 \cap T_2 = A(T_1, T_2) \wedge_{\tau_K(X)} T_1$ または $T_1 \cap T_2 = A(T_1, T_2) \wedge_{\tau_K(X)} T_2$ が成り立つ.

Proof. 二つの両立する位相 T_1, T_2 を固定する. 定義 3 における $A(T_1, T_2)$ を定義する位相構造の列を $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする. このとき,n に関する帰納法によって

$$T_1 \cap T_2 = T_1 \cap T_2 \cap t_n$$

が成り立つことを示す.$n = 1$ のとき, 系 1 と $T_1 \subset T_1^r$ より

$$\begin{aligned} T_1 \cap T_2 &= (t_1 \wedge_{\tau_K(X)} T_1) \cap T_2 \\ &= (t_1 \cap T_1) \cap T_2 \end{aligned}$$

となり正しい.$n = n_1$ のとき正しいとして,$n = n_1 + 1, \quad n_1 : \mathrm{even}$ のときに成り立つことを示す. 実際,$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ の定義や有理位相の性質（系 1）により以下の等式が成り立つ :

$$\begin{aligned} T_1 \cap T_2 &= T_1 \cap T_2 \cap t_{n_1} && (n = n_1 \text{ のときの帰納法の仮定より}) \\ &= (T_1 \cap t_{n_1}) \cap T_2 \\ &= (T_1 \wedge_{\tau_K(X)} t_{n_1}) \cap T_2 && (\text{系 } 1 \text{ より}) \\ &= (t_{n_1+1} \wedge_{\tau_K(X)} T_1) \cap T_2 && ((T_1 \wedge_{\tau_K(X)} t_{n_1}) \subset t_{n_1+1} \subset t_{n_1} \text{ より}) \\ &= t_{n_1+1} \cap T_1 \cap T_2 && (\text{系 } 1 \text{ より}). \end{aligned}$$

したがって $n = n_1 + 1$ のときも正しい. 同様に $n_1 : \mathrm{odd}$ のときも示せる. よってすべての自然数 n に対して成立し, とくに $A(T_1, T_2) = t_{n_0}$ となる $n = n_0$ の場合も正しいので

$$T_1 \cap T_2 = T_1 \cap T_2 \cap A(T_1, T_2) \tag{1}$$

が成り立つ. したがって,$(A(T_1, T_2) \cap T_1) \subset T_2$ または $(A(T_1 T_2) \cap T_2) \subset T_1$ が成り立てば $A(T_1, T_2)$ が有理位相であることから系 1 を用いると $T_1 \cap T_2 = A(T_1, T_2) \wedge_{\tau_K(X)} T_1$ または $T_1 \cap T_2 = A(T_1, T_2) \wedge_{\tau_K(X)} T_2$ となり,$T_1 \cap T_2$ は両立する.
逆は背理法を用いて示される.$T_1 \cap T_2$ が両立し, かつ $(A(T_1, T_2) \cap T_1) \subset T_2$ と $(A(T_1, T_2) \cap T_2) \subset T_1$ のどちらも成り立たないとする.$A(T_1, T_2)$ が有理位相であることから X の部分空間 S で $\mathrm{Span}_{\hat{K}}(I(S)) = \hat{F}(A(T_1, T_2))$ となるものがとれる. 商空間 X/S への商写像を $\pi : X \to X/S$ とし,X の各位相に対して X/S 上にその商位相を対応させる写像を $\pi_* : T \mapsto \pi_*(T)$ とおく. このとき X/S には三つの商位相 $T_1' \coloneqq \pi_*(A(T_1, T_2) \cap T_1)$ と $T_2' \coloneqq \pi_*(A(T_1, T_2) \cap T_2)$ と $T' \coloneqq \pi_*(T_1 \cap T_2)$ が定まる. 実は, 商位相は X に与えた位相が両立していれば X/S の両立する位相となるので T' は X/S の両立する位相となる（[1] 参照）. さらに π_* が共通部分を保つことと (1) から $T' = \pi_*(A(T_1, T_2) \cap T_1) \cap \pi_*(A(T_1, T_2) \cap T_2) = T_1' \cap T_2'$ となる. 他方で $A(T_1, T_2) \cap T_1 \subset T_2$ と $A(T_1, T_2) \cap T_2 \subset T_1$ のどちらも成り立たないことから T_1' と T_2' は互いに包含関係がない X/S のハウスドルフ位相となる. 補題 2 により $T_1' \cap T_2'$ は両立しなくなるので矛盾する. □

次に具体的な計算を紹介する.

例 2. 係数体を通常の絶対値 $|\cdot|_\infty$ を与えた有理数体 $\mathbb{Q}$ とし,$X \coloneqq \mathbb{Q}^5$ とする. 完備化は $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ であり,$\hat{X}$ を $\mathbb{R}^5$ と同一視する. このとき $\mathbb{R}^5$ の部分空間 S_1, S_2, S_3 を次のように定める：

$$
\begin{aligned}
S_1 \coloneqq& \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, \sqrt{3}, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 1, \sqrt{2}\}),\\
S_2 \coloneqq& \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{1, 1, \sqrt{2}, 0, 0\}),\\
S_3 \coloneqq& \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{1, 1, \sqrt{2}, 1, 0\}).
\end{aligned}
$$

このとき $T_i \coloneqq \hat{G}(S_i)$ とすると,$T_1 \cap T_2 \in \tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5)$ であり $T_1 \cap T_3 \notin \tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5)$ であることを計算する.
まず $T_1 \cap T_2$ の場合に $A(T_1, T_2)$ を定義する列を $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする（定義 3 参照）.S_1 と $\mathbb{Q}^5$ との交点は原点のみなので t_1 は $\hat{G}(\{0\})$ に対応し,$T_{\mathbb{Q}}^{\max}(\mathbb{Q}^5)$ となる. 次に $T_2 \cap t_1 = T_2 \wedge_{\tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5)} t_1$ に対応する部分空間は S_2 であるから,S_2 と $\mathbb{Q}^5$ との交点で張られる部分空間は $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\})$ である. したがって,$t_2 = \hat{G}(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}))$ である.$T_1 \cap t_2$ が対応する部分空間は $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{1, \sqrt{3}, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 1, \sqrt{2}\})$ であるから, 基底をとり替えて $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 1, \sqrt{2}\})$ である. したがって $\mathbb{Q}^5$ との交点で張られる部分空間は $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\})$ であり, この部分空間に対応する位相が t_3 である. 同様に $T_2 \cap t_3$ が対応する部分空間は $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\}, \{1, 1, \sqrt{2}, 0, 0\})$ であるから $\mathbb{Q}^5$ との交点で張られる部分空間は $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0\})$ であり, これに $\hat{G}$ で対応する位相が t_4 である.$T_1 \cap t_4$ が対応する部分空間は

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 1, \sqrt{2}\})$$

であるからこれ以降は t_n は変化しない. ゆえに $A(T_1, T_2) = t_4$ であり,$(t_4 \cap T_1) \subset T_2$ なので定理 2 より $T_1 \cap T_2$ は両立し, 対応する部分空間は

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 1, \sqrt{2}\})$$

となる.
同様にして $A(T_1, T_3)$ を定義する列を $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすると, 次のようになる：

$$
\begin{aligned}
t'_1 &= \hat{G}(\{0\}),\\
t'_2 &= \hat{G}(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\})),\\
t'_3 &= \hat{G}(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\})),\\
t'_4 &= \hat{G}(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\})).
\end{aligned}
$$

したがって $A(T_1, T_3) = t'_3$ となる. このとき $A(T_1, T_3) \cap T_1$ と $A(T_1, T_3) \cap T_3$ が各々対応する部分空間は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 1, \sqrt{2}\}),\\
&\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, \sqrt{2}, 0\})
\end{aligned}
$$

であるから, 互いに包含関係がない. よって, 定理 2 により $T_1 \cap T_3$ は両立しない.

注意 3. この計算は対応する部分空間 $\hat{F}(T)$ と $I(X)$ との交点を求める必要があり, 有理数か無理数かまだ知られていないような数を成分に持つような部分空間に対しては計算ができなくなってしまうので, すべての場合に計算できるわけではない.

4.2 応用 2：射影幾何の基本定理

二つ目の応用として, 射影幾何の基本定理を用いることで次のことがわかる：線形空間 X に対して,「両立する位相構造全体 $\tau_K(X)$ が位相全体 $\Sigma(X)$ の中にどのように入っているか」が実は K や X の代数構造を決定する. これは両立する位相構造の位相構造全体における分布が元の体などの性質の情報を持っているという点で定理 1 と似ており, 筆者は興味を覚えるものである.
さて, まず補題を紹介する. 二つの体 K_1, K_2 の間の体同型 ψ に対し,K_1- 線形空間 X_1 と K_2- 線形空間 X_2 の間の $\psi-$ 半線形同型写像 $\phi : X_1 \to X_2$ とは,X_1 から X_2 への全単射で, 加法を保ち, 各スカラー $\alpha \in K_1$ とベクトル $x \in X_1$ に対して $\phi(\alpha{\cdot}x) = \psi(\alpha){\cdot}\phi(x)$ が成り立つことである.$\psi-$ 半線形同型写像は部分空間全体なすの束 $\sigma_{K_1}(X_1)$ と $\sigma_{K_2}(X_2)$ の間の束同型を, 部分空間をその ϕ による像へ写すことで誘導するが, 次の補題（射影幾何の基本定理）はその逆を主張するものである. 証明は（[2], pp.44-50）を参照されたい.

補題 4 (射影幾何の基本定理)**.** K_1, K_2 を二つの体とし,X_1 を K_1- 線形空間で 3 次元以上,X_2 を K_2- 線形空間とする. 部分空間全体のなす束 $\sigma_{K_1}(X_1)$ と $\sigma_{K_2}(X_2)$ が同型であり, 同型写像を $\Phi : \sigma_{K_1}(X_1) \to \sigma_{K_2}(X_2)$ とする. このとき, 体同型 $\psi : K_1 \to K_2$ と $\psi-$ 半線形同型写像 $\phi : X_1 \to X_2$ が存在し, 写像 Φ は各線形部分空間 S を ϕ で写した像 $\phi(S)$ に対応させる写像と一致する.

注意 1 により, 有理位相全体の束は部分空間全体と同型であるので有理位相全体の束に対して射影幾何の基本定理を用いることができ, 次の主張を得る.

定理 3. K_1, K_2 を完備化が局所コンパクトな非自明な付値体とする.X_1 を有限次元 K_1- 線形空間で 3 次元以上とし,X_2 を有限次元 K_2- 線形空間とする. いま, 位相構造全体のなす束の間の束同型 $\Phi : \Sigma(X_1) \to \Sigma(X_2)$ で, 両立する位相全体を保つ, すなわち $\Phi(\tau_{K_1}(X_1)) = \tau_{K_2}(X_2)$ が成り立つものが存在するとき, 体同型 $\psi : K_1 \to K_2$ と $\psi-$ 半線形同型写像 $\phi : X_1 \to X_2$ が存在する.

Proof. T を X_1 の有理位相とする.Φ は両立する位相全体を保つことから勝手な X_2 の両立する位相は $\Phi(T')$ とかける.Φ は位相構造全体の束同型であるから共通部分をとる操作を保つので,$\Phi(T) \cap \Phi(T') = \Phi(T \cap T')$ が成り立つ. いま補題 3 から $T \cap T'$ は X_1 の両立する位相なので,$\Phi(T \cap T')$ は X_2 の両立する位相である. よって補題 3 により $\Phi(T)$ は X_2 の有理位相である. したがって写像 Φ を有理位相全体 $\tau^r_{K_1}(X_1)$ に制限することで有理位相全体の間の同型写像を得る. 各 $i = 1, 2$ に対して有理位相全体の束 $\tau^r_{K_i}(X_i)$ は部分空間全体の束 $\sigma_{K_i}(X_i)$ と束同型であったから（注意 1 参照）, その束同型を $F_i : \tau^r_{K_i}(X_i) \to \sigma_{K_i}(X_i)$ とすると, 写像 $F_2 \circ \Phi \restriction_{\tau^r_{K_1}(X_1)} \circ F_1^{-1}$ は $\sigma_{K_1}(X_1)$ から $\sigma_{K_2}(X_2)$ への束同型写像となる. そこで射影幾何の基本定理を用いることで, 体同型 $\psi : K_1 \to K_2$ と $\psi-$ 半線形同型写像 $\phi : X_1 \to X_2$ を得る. □

注意 4. 定理 3 の仮定を,Φ の存在ではなく「$\tau_{K_1}(X_1)$ から $\tau_{K_2}(X_2)$ の間の束同型写像が存在する」と置き換えた仮定では主張は示せない. 実際,K_1 を通常の有理数体 $\mathbb{Q}$ とし,$X_1 := \mathbb{Q}^3$ とする. 次に K_2 を通常の実数体 $\mathbb{R}$ とし,$X_2 := \mathbb{R}^3$ とすると, どちらも両立する位相構造全体のなす束は $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ と同型であるが,K_1 と K_2 は同型ではない. これは両立する位相だけでは係数体を完備化した情報しか持たないが, 共通部分の演算をみることで有理位相全体の束構造がわかり, したがって完備化する前の体や線形空間の構造をみることができるのである.

定理 3 は係数体の代数的構造を決定するが, 位相的構造に関しては述べていない. すなわち $\psi : K_1 \to K_2$ の連続性に関しては述べられていない. 本稿の係数体は付値体として位相構造を固定していたので ψ の連続性を含めた主張を検討すべきであると筆者は考えている.

参考文献

[1] T. Aoyama, *The Canonical Lattice Isomorphism between Topologies Compatible with a Linear Space and Subspaces*, arXiv:math/1905.01880.

[2] R. Bael, *Linear Algebra and Projective Geometry*, Dover Publications, New York, 2005.

[3] G. Birkhoff, *On the combination of topologies*, Fund. Math. **26** (1936), 156-166.

[4] L. S. Pontryagin, *Continuous Groups*. (English translated version: *Topological Groups, Third Edition*, Translated by A. Brown, P. S. V. Naidu, 1986, Gordon and Breach, Science Publishers.)