辞書式一般順序積の完備性
-Completeness of lexicographic products of GO-spaces-

大分大学・理工学部　家本 宣幸
Nobuyuki Kemoto, Oita University

概要

次の奇妙な結果が [11] で示されている。

• 自然数 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ に対して, X_n は最小元を持つが最大元を持たない順序位相空間とすると, 辞書式順序積 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ が連結なら, すべての X_n は非連結である。

この報告書では, この結果を導くに至った背景, 証明の概略や未解決問題について述べる。

1　序

位相空間の通常の Tychonoff 積について次はよく知られている。

• Tychonoff 積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が連結であることの必要十分条件は各 X_α が連結であることである,

• Tychonoff 積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ がコンパクトであることの必要十分条件は各 X_α がコンパクトであることである。

一方, 辞書式順序積については次がよく知られている。証明は Faber [2] に書かれている。

• 辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ がコンパクトであることの必要十分条件は各 X_α がコンパクトであることである。

では, 次が成立するであろうか？

• 辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が連結であることの必要十分条件は各 X_α が連結であることであるか？

残念ながら, Faber [2] では次が示されている。

• 辞書式順序積 ω_1^ω は連結である。ここで最小の非可算順序数 ω_1 は孤立点を含むので連結ではないことに注意しよう。 ω は最小の無限順序数である。

では, 辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ の連結性と, 各 X_α の連結性との間にはいったいどんな関係があるのだろうか？この解明に向けてプロジェクトは始まった。ここでは [11] の研究の背景, 証明の概略と未解決問題について述べたいと思う。

まず, 結論を先に述べておこう。特殊な状況においては, 次の予想外の結果が得られている。

• 順序数 γ が極限順序数で, 各 $\alpha < \gamma$ について X_α が最小元を持つが最大元を持たない一般順序位相空間とする。すると辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が連結であれば, すべての X_α は非連結である。

連結な順序位相空間の典型例は実数 $\mathbb{R}$ である。一方, 非連結な順序位相空間の典型例は有理数 $\mathbb{Q}$ である。これらの違いは何かという分析から始まった。実数は距離空間 $\mathbb{Q}$ の完備化として知られている。また, 実数は全順序集合 $\mathbb{Q}$ の Dedekind 切断による完備化としても知られている。キーワードは「完備」である。辞書式順序積の完備性から調べてみることにした。

2　一般順序位相空間の辞書式順序積

ここでは, [8] で定義された一般順序位相空間の辞書式順序積の概念について述べたい。集合や位相の基本的な概念は Jech [4], Kunen [12] や Engelking [1] に従うことにする。

順序集合 $\langle X, <_X\rangle$ とは通常の全順序集合を意味し、 $\{(\leftarrow, x)_X : x \in X\} \cup \{(x, \rightarrow)_X : x \in X\}$ を準基とする自然な順序位相と呼ばれる位相 λ を持つ, ここで $(x, \rightarrow)_X = \{z \in X : x <_X z\}$, $(x, y)_X = \{z \in X : x <_X z <_X y\}$, $(x, y]_X = \{z \in X : x <_X z \leq_X y\}$ 等である。三つの組 $\langle X, <_X, \lambda\rangle$ は順序位相空間と呼ばれ, 単に X と書くこともある。よく知られているように, 実数 $\mathbb{R}$ や有理数 $\mathbb{Q}$ は順序位相空間である。

一方, 三つの組 $\langle X, <_X, \tau\rangle$ は次の二つの条件をみたす時, 一般順序位相空間と呼ばれ, 同様に単に X と書くこともある。

• $\langle X, <_X\rangle$ は順序集合である。

- τ は X 上の T_2-位相で, 凸集合からなる基底を持つ。

この時, 位相 τ は自然な順序位相 λ より強い $(\lambda \subset \tau)$ ことが簡単にわかる。順序位相空間 $\langle X, <_X, \lambda\rangle$ を一般順序位相空間 $X = \langle X, <_X, \tau\rangle$ の元の順序位相空間という。Sorgenfrey line $\mathbb{S}$ や Michael line $\mathbb{M}$ は一般順序位相空間であるが, 順序位相空間でない典型的な例であることが知られている。これらの元の順序位相空間は実数 $\mathbb{R}$ である。あきらかに順序位相空間 X の元の順序位相空間は X のままである。一般順序位相空間については [13] を参考にするとよい。

各 $\alpha < \gamma$ に対して, 順序位相空間 X_α が与えられたとき, その積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ に辞書式順序と呼ばれる順序 $<_X$ を次のように定義する: $x, x' \in X$ に対し, $x <_X x'$ を

ある $\alpha < \gamma$ が存在して, $x \restriction \alpha = x' \restriction \alpha$ かつ $x(\alpha) <_{X_\alpha} x'(\alpha)$ が成立することとする,

ただし, x を列 $\langle x(\beta) : \beta < \gamma\rangle$ とみなし, $x \restriction \alpha = \langle x(\beta) : \beta < \alpha\rangle$ とする。

$X = \langle X, <_X, \tau\rangle$ を一般順序位相空間とし, λ を自然な順序位相とする。

$$X^+ := \{x \in X : (\leftarrow, x]_X \in \tau \setminus \lambda\}$$

$$X^- := \{x \in X : [x, \rightarrow)_X \in \tau \setminus \lambda\}$$

とおくと, 明らかに次がわかる。

- X が順序位相空間であることの必要十分条件は $X^+ \cup X^- = \emptyset$ となることである。

そこで,

$$X^* := X^- \times \{-1\} \cup X \times \{0\} \cup X^+ \times \{1\}$$

とおいて, X^* に辞書式順序 $<_{X^*}$ を入れて X^* を順序位相空間と考える。ただし, X^* の辞書式順序とは $X \times \{-1, 0, 1\}$ 上の辞書式順序の X^* への制限順序である。もちろん $-1 < 0 < 1$ である。この定義において, x を $\langle x, 0\rangle$ と同一視し, $X = X \times \{0\}$ と見る。すなわち, $X^* = X^- \times \{-1\} \cup X \cup X^+ \times \{1\}$ と考える。特に $X \subset X^*$ である。次は明らかである。

- X が順序位相空間なら $X^* = X$ である。
- 順序 $<_{X^*}$ は 順序 $<_X$ の拡張で, 位相空間 $\langle X, \tau\rangle$ は自然な順序位相空間 X^* の稠密な部分空間である。.

その他の X^* の性質については [14] を参照するとよい。

以上の概念を利用して, 一般順序位相空間達の辞書式順序積が定義できる ([8])。各 $\alpha < \gamma$ に対して, 一般順序位相空間 X_α が与えられたとき, $\hat{X} = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha^*$ は辞書式順序位相空間となるが, $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ にその制限順序と部分空間位相を付与することで X は一般順序位相空間となる。この X を一般順序位相空間 X_α 達の辞書式順序積という。一般順序位相空間の Tychonoff 積や辞書式順序積については, [3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] を参考にするとよい。

以降, 断らない限り考える空間はすべて一般順序位相空間とし, 辞書式順序積と言えば一般順序位相空間達の辞書式順序積を意味する。

3　一般順序位相空間の完備性

ここでは完備性の定義について述べることにする。俗に言う距離空間の完備性はコンパクト性から導かれることがよく知られている。

順序位相空間 X がコンパクトであることの必要十分条件は, 次の二つが満たされることであることはよく知られている。

(a) 任意の空でない X の部分集合は上限を持つ,

(b) 任意の空でない X の部分集合は下限を持つ。

辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ がコンパクトであることの必要十分条件は各 X_α がコンパクトであったから, 次が成立すると予想される。

- 辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が (a) を満たすことの必要十分条件は各 X_α は (a) を満たす。

しかし, 残念ながら $(0,\ 1]_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ の $(0,1]$ 半開区間とすると, 辞書式順序積 $X = (0\ ,\ 1]_{\mathbb{R}} \times (0,\ 1]_{\mathbb{R}}$ は $A = (0, \frac{1}{2})_{\mathbb{R}} \times (0,1]_{\mathbb{R}}$ を考えることで (a) の性質をもたないことがわかる。一方 $(0,\ 1]_{\mathbb{R}}$ が (a) の性質を持つことは容易にわかる。考察のポイントは, 順序位相空間のある性質を上の (a), (b) のように, 上と下に分けて別々に考えることである。こうして次の問題が浮かび上がってきた。

- 辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が (a) を満たすことの特徴付けをせよ。

この問題を考察するため, (a) をもう少し弱めた概念を導入する。

定義 3.1. 一般順序位相空間 X の部分集合 A は, 次の条件を満たす時 0-切片と呼ばれる。

• $x, x' \in X$ について $x \leq x'$ と $x' \in A$ がみたされるなら, $x \in A$ が成立する。

また, 一般順序位相空間 X は

• 任意の上に有界な空でない閉集合である 0-切片 A が最大元を持つとき, 0-完備と呼ばれる,

• 任意の空でない閉集合である 0-切片 A が最大元を持つとき, 0-コンパクトと呼ばれる。

定義から「0-コンパクト = 0-完備 + X の最大元の存在」が成立する。

定義 3.2. 順序位相空間 X は次の条件を満たす時, デデキント 0-完備と呼ばれる。

• 任意の空でない上に有界な部分集合 A は上限を持つ。

デデキント 0-完備性は順序位相空間の性質であるが, 0-完備は一般順序位相空間の性質であることに注意しよう。

1-切片, (デデキント) 1-完備, 1-コンパクトも同様に定義できる。また, 順序位相空間 (一般順序位相空間) は デデキント 0-完備 (0-完備) かつデデキント 1-完備 (1-完備) の時, デデキント完備 (完備) と言われる。

デデキント完備性と完備性の違いは次のようになっている。

補題 3.3. 一般順序位相空間 X について次は同値である。

1. X は 0-完備,

2. 次が成り立つ。

（a）$X^- = \emptyset$,

（b）X の元の順序位相空間がデデキント 0-完備。

順序位相空間では上の (a) が成立するので「0-完備 = デデキント 0-完備」, 従って「0-コンパクト = 0-完備 + X の最大元の存在 = デデキント 0-完備 + X の最大元の存在 = コンパクトの同値条件のうちの (a) の条件」がわかる。これから一般順序位相空間の 0-完備性を調べれば, その他の性質は簡単に導かれることがわかる。また次がわかる。

系 3.4. X を一般順序位相空間とする時, 次が成り立つ。

1. X が完備であることの必要十分条件は X は順序位相空間かつデデキント完備であることである,

2. X が 0-コンパクトかつ 1-コンパクトであることの必要十分条件は X はコンパクトな順序位相空間であることである。

4 辞書式順序積の 0-完備性

ここでは辞書式順序積の 0-完備性を特徴付けてみよう。二つの積の場合は次のように特徴付けできる。

補題 4.1. $X = X_0 \times X_1$ を辞書式順序積とする。X が 0-完備であることの必要十分条件は次が成立することである。

1. X_0 と X_1 の両方が 0-完備である,
2. X_1 は最小元か最大元を持つ,
3. もし X_1 が最小元を持たなければ, すべての $u \in X_0$ について $(\leftarrow, u) \neq \emptyset$ が成り立てば $(\leftarrow, u)$ は最大元を持つ,
4. もし X_1 が最大元を持たなければ, すべての $u \in X_0$ について $(u, \rightarrow) \neq \emptyset$ が成り立てば $(u, \rightarrow)$ は最小元を持つ。

後で使うので上の 4 番目の条件に注目しておく。これは X_1 が最大元を持たなければ X_0 は整列順序集合に似た性質を持っていると主張している。X が 0-完備, X_1 が最大元を持たず, $(u, \rightarrow) \neq \emptyset$ であるが $(u, \rightarrow)$ は最小元を持たないような $u \in X_0$ が存在したとすると $A = (\leftarrow, u] \times X_1$ が X の 0-完備性の反例になることから示される。

上の X が最大元を持てば, X_0 と X_1 の両方が最大元を持つことと同値だから, 上の 2 番目と 4 番目の条件は成立してしまう。従って次がわかる。

補題 4.2. $X = X_0 \times X_1$ を辞書式順序積とする。X が 0-コンパクトであることの必要十分条件は次が成立することである。

1. X_0 と X_1 の両方が 0-コンパクトである,
2. もし X_1 が最小元を持たなければ, すべての $u \in X_0$ について $(\leftarrow, u) \neq \emptyset$ が成り立てば $(\leftarrow, u)$ は最大元を持つ,

続いて, 上の補題を利用してもっと長い長さの辞書式順序積の 0-完備性や 0-コンパクト性を特徴付けよう。そのために次の定義を導入する。

定義 4.3. $X = \prod_{\alpha < \gamma} X_\alpha$ を辞書式順序積とする。

$$J^+ = \{\alpha < \gamma : \ X_\alpha \text{ は最大元を持たない } \},$$

$$J^- = \{\alpha < \gamma : \ X_\alpha \text{ は最小元を持たない } \},$$

とおく。

この定義を利用すれば 0-完備性は次のように特徴付けできる。

定理 4.4. $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ を辞書式順序積とする。X が 0-完備であることの必要十分条件は次が成立することである。

1. 任意の $\alpha < \gamma$ について, X_α は 0-完備である,
2. $J^- \subset \{0\}$ または $J^+ \subset \{0\}$ が成り立つ,
3. $J^- \cup J^+ \subset \omega$ が成り立つ,
4. 任意の $\alpha < \sup J^-$ と $u \in X_\alpha$ について, もし $(\leftarrow, u) \neq \emptyset$ であれば $(\leftarrow, u)$ は最大元をもつ,
5. 任意の $\alpha < \sup J^+$ と $u \in X_\alpha$ について, もし $(u, \rightarrow) \neq \emptyset$ であれば $(u, \rightarrow)$ は最小元をもつ。

補題 4.2 の 4 番目で述べたように, この定理の 5 番目の性質は「任意の $\alpha < \sup J^+$ について X_α は整列順序集合すなわち順序数に似た性質を持っている」と言っている。これを補題 4.2 を使って示してみよう。

$\alpha_0 < \sup J^+$ で $\alpha_1 = \min\{\alpha > \alpha_0 : \ X_\alpha \text{ は最大元をもたない } \}$ とする。$(u_0, \rightarrow) \neq \emptyset$ で $(u_0, \rightarrow)$ が最小元を持たないような $u_0 \in X_{\alpha_0}$ が存在したと仮定してみる。補題 4.2 の 1 番目の性質を $X = \prod_{\alpha\leq\alpha_1} X_\alpha \times \prod_{\alpha_1<\alpha} X_\alpha$ に適用して $\prod_{\alpha\leq\alpha_1} X_\alpha$ は 0-完備であることがわかる。$y_0 \in \prod_{\alpha<\alpha_0} X_\alpha$ を適当に固定して $z_0 = y_0 {}^\frown\langle u_0\rangle^\frown\langle \max X_\alpha : \alpha_0 < \alpha < \alpha_1\rangle$, すなわち z_0 は y_0 の後に u_0, その後に $\max X_\alpha$ $(\alpha_0 < \alpha < \alpha_1)$ を順に並べた $\prod_{\alpha<\alpha_1} X_\alpha$ の要素である。すると $(z_0, \rightarrow)$ は最小元を持たず空でないので, $\prod_{\alpha\leq\alpha_1} X_\alpha = \prod_{\alpha<\alpha_1} X_\alpha \times X_{\alpha_1}$ に注意すれば補題 4.2 の 4 番目の性質に矛盾することがわかる。

この補題と同様に辞書式順序積の 1-完備が特徴付けできるので, 両方を合体させて辞書式順序積の完備性は次のように特徴付けできる。

系 4.5. $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ を辞書式順序積とする。X が 完備であることの必要十分条件は次が成立することである。

1. 任意の $\alpha < \gamma$ について, X_α は完備である,
2. $J^- \subset \{0\}$ または $J^+ \subset \{0\}$ が成り立つ,
3. $J^- \cup J^+ \subset \omega$ が成り立つ,
4. 任意の $\alpha < \sup J^-$ と $u \in X_\alpha$ について, もし $(\leftarrow, u) \neq \emptyset$ であれば $(\leftarrow, u)$ は最大元をもつ,
5. 任意の $\alpha < \sup J^+$ と $u \in X_\alpha$ について, もし $(u, \rightarrow) \neq \emptyset$ であれば $(u, \rightarrow)$ は最小元をもつ。

一般順序位相空間について「コンパクト $\Leftrightarrow$ 完備＋最大元と最小元が共に存在」が成立するので, 上の系の完備をコンパクトに置き換えれば, 2 番目から 5 番目の性質は不要な条件となってしまう。従って, よく知られた結果「辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ がコンパクト $\Leftrightarrow$ 各 X_α がコンパクト」が直接得られる。

5 ほぼ整列集合 (順序数)

さて, ここでは補題 4.2 の 4 番目や定理 4.4 の 5 番目の性質で出てきた殆ど (ほぼ) 整列集合的な概念について考えてみよう。

定義 5.1. 一般順序位相空間 X がほぼ整列とは, 任意の $x \in X$ について, 部分空間 $[x, \rightarrow)_X$ がある整列集合 α と順序同型となることである。ほぼ整列な一般順序位相空間をほぼ順序数と言う。

明らかに, 順序数はほぼ順序数である。次が成立する。

- ほぼ順序数は完備順序位相空間である,
- 最小限を持つほぼ順序数は順序数である,
- α が順序数なら, 辞書式順序積 $(-\omega) \times \alpha$ はほぼ順序数である, ここで $-\omega$ は ω に逆順序を入れた順序位相空間である,
- 辞書式順序積 $\omega \times (-\omega)$ は完備であるがほぼ順序数ではない,
- $-\omega$ はほぼ順序数であるが $-\omega_1$ はほぼ順序数ではない。

次の補題が示すように, 補題 4.2 の 4 番目や定理 4.4 の 5 番目の性質とほぼ順序数の差分は 0-完備である。

補題 5.2. 一般順序位相空間 X がほぼ順序数である必要十分条件は次の両方が成立することである。

1. X は 0-完備である,
2. すべての $u \in X$ について $(u, \to) \neq \emptyset$ が成り立てば $(u, \to)$ は最小元を持つ。

定理 4.4 と上の補題から次がわかる。

系 5.3. 辞書式順序積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が 0-完備なら, 任意の $\alpha < \sup J^+$ について, X_α はほぼ順序数である, 特に $0 < \alpha$ をみたす $\alpha < \sup J^+$ について, X_α は順序数である。

なぜなら, 前半は定理 4.4 の 1 番目と 5 番目の条件, 及び上の補題からわかる。後半は $J^+ \not\subset \{0\}$ と定理 4.4 の 2 番目の条件から, $J^- \subset \{0\}$ が成立することからわかる。

定理 4.4 から次の特殊な場合も予想通り成り立つことがわかる。

系 5.4. 辞書式順序積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ について, $J^- = J^+ = \emptyset$ が成り立つとする, すなわちどの X_α も最大と最小を持つ。この時, X が 0-完備 *(*1-完備, 完備*)* であることの必要十分条件はすべての $\alpha < \gamma$ について X_α が 0-完備 *(*1-完備,, 完備*)*. となることである。

面白いのは次の場合である。

系 5.5. 辞書式順序積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ について, $J^- = \emptyset$ と $\sup J^+ = \gamma$ が成り立つとする *(*従って γ は極限順序数で, どの X_α も最小元を持ち, 最大を持たない α が γ の中で非有界*)*。この時, 次が成立する。

1. X が 0-完備であることの必要十分条件は $\gamma = \omega$ でどの X_α も順序数となることである,
2. X が 0-完備なら, それは 1-完備, 従って完備である。

なぜなら, 1 番目の $\Rightarrow$ について $\gamma = \omega$ は 定理 4.4 の 3 番目から従う。また $J^- = \emptyset$ であるから X_0 は順序数である。

6 連結性

最後に辞書式順序積の連結性を考察しよう。一般順序位相空間において連結性と完備性の差分は次の補題が示すように「補題 4.2 の 4 番目や定理 4.4 の 5 番目の性質の否定」である。証明は簡単である。

補題 6.1. 一般順序位相空間 X が連結であることの必要十分条件は次が成立することで

ある。

1. X は完備である (従って順序位相空間),
2. すべての $u \in X$ について, もし $(u, \rightarrow) \neq \emptyset$ が成立するなら $(u, \rightarrow)$ は最小元を持たない。

系 5.4 から次がわかる。

系 6.2. 辞書式順序積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ について $J^- = J^+ = \emptyset$ が成り立つとする。この時, X が連結であることの必要十分条件はすべての $\alpha < \gamma$ について, X_α が連結であることである。

系 5.5 の 2 番目と補題 6.1 から次がわかる。

系 6.3. 辞書式順序積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ について $J^- = \emptyset$ と $\sup J^+ = \gamma$ が成立しているとする。この時, X が 0-完備であることの必要十分条件は X が連結であることである。

この証明は, 仮定から γ は極限順序数であるので, 補題 6.1 の 2 番目の条件は成立していることに注意すればよい。従って系 5.5 の 1 番目から次の奇妙な結果を得る。

系 6.4. 辞書式順序積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ について $J^- = \emptyset$ と $\sup J^+ = \gamma$ が成立しているとする。もし X が 0-完備なら $\gamma = \omega$ ですべての X_α は順序数である。特に X が連結ならすべての X_α は非連結である。

これから, 次がわかる。

系 6.5. 各 $n \in \omega$ について X_n は最小元を持つが最大元を持たないとする。この時, 辞書式順序積 $\prod_{n\in\omega} X_n$ が連結ならすべての X_n は非連結である。

次を聞きたい。

問題 6.6. 連結性以外で, 次のような位相的性質 P はあるか?

「ある適当な条件の下, 辞書式順序積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が 性質 P を持てば, すべての X_α は P を持たない。」

参考文献

[1] R. Engelking, *General Topology-Revised and completed ed.*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[2] M. J. Faber, *Metrizability in generalized ordered spaces*, Mathematical Centre Tracts, No. 53. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1974.

[3] Y. Hirata and N. Kemoto, *Countable metacompactness of products of LOTS'*, Top. Appl., 178 (2014) 1-16.

[4] T. Jech, *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[5] N. Kemoto, *Normality of products of GO-spaces and cardinals*, Top. Proc. 18 (1993) 133-142.

[6] N. Kemoto, *The lexicographic ordered products and the usual Tychonoff products*, Top. Appl., 162 (2014) 20-33.

[7] N. Kemoto, *Orderability of products*, Top. Proc., 50 (2017) 67-78.

[8] N. Kemoto, *Lexicographic products of GO-spaces*, Top. Appl., 232 (2017), 267-280.

[9] N. Kemoto, *Paracompactness of Lexicographic products of GO-spaces*, Top. Appl., 240 (2018) 35-58.

[10] N. Kemoto, *Hereditary paracompactness of lexicographic products*, Top. Proc., 53 (2019) 301-317.

[11] N. Kemoto, *Completeness of lexicographic products*, Top. Proc., 58 (2021) 105-123.

[12] K. Kunnen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 102, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[13] D.J. Lutzer, *On generalized ordered spaces*, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 89 (1971).

[14] T. Miwa and N. Kemoto, *Linearly ordered extensions of GO-spaces*, Top. Appl., 54 (1993), 133-140.