積空間における基数関数 extent の等式

神奈川大学 工学部
平田 康史 (Yasushi Hirata)　矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1　積空間上の基数関数 extent の等式と不等式

ここでは，すべての空間は空でない正則 T_1-空間とする。また，2 つの空間 X と Y による積空間 $X \times Y$ を，単に積空間 $X \times Y$ とよぶ。

いま，φ をある基数関数（任意の空間 X に対して，ある基数 $\varphi(X)$ が対応する関数）とする。例えば，空間 X に対して，X の **weight** $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ は X の基 $\}$ はよく知られた基数関数の一つである。

先ず，一般的な問題として，次の形の問題が考えられる。

問題 0. どんな積空間 $X \times Y$ とどんな基数関数 φ に対して，等式 $\varphi(X \times Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y)$ が成り立つか？

すべての基数関数 φ には，通常 $\varphi\,(X) \geq \omega = \aleph_0$ を仮定するから，

$$\varphi(X \times Y) \geq \varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(X) + \varphi(Y) = \max\{\varphi(X), \varphi(Y)\}$$

が成り立っている。これまで，上記の問題 0 はほとんど議論されてこなかった。ただひとつの例外は，下記の古典的結果である。

空間 X に対して，X の **tightness** $t(X)$ は次のように定義される：

$$t(X) = \omega \cdot \min\{\kappa : \forall A \subset X, \forall x \in \overline{A}\ \exists B \subset A\ (|B| \leq \kappa \text{ and } x \in \overline{B})\}.$$

定理 1.1 (Malyhin 1972, [8]). 積空間 $X \times Y$ に対して，もし X がコンパクトならば，等式 $t(X \times Y) = t(X) \cdot t(Y)$ が成り立つ。

ここでは，空間 X に対して，次に定義される基数関数を扱う：

$$e(X) = \omega \cdot \sup\{|D| : D \text{ は } X \text{ における discrete 閉集合 }\}.$$

この基数関数 e を X の **extent** という (ここで，X における **discrete 閉集合** D とは，任意の点 $x \in X$ に対して，x のある近傍 U_x が存在して，$|U_x \cap D| \leq 1$ となること)。

もし X が可算コンパクト空間（i.e., X の任意の可算開被覆が有限部分被覆をもつ）またはリンデレーフ空間（i.e., X の任意の開被覆が可算部分被覆をもつ）ならば，$e(X) = \omega$ となる。

ここでは，上記の問題 0 において，$\varphi = e$ と見なして次のように考えていく。

問題 I. どんな積空間 $X \times Y$ に対して，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

この問題で X, Y がリンデレーフ空間としても，この等式は成り立たない。なぜなら，Sorgenfrey 直線 S はリンデレーフ空間であるが，$e(S \times S) = 2^\omega > \omega = e(S) \cdot e(S)$ となるからである。これに関しては，Shelah が提起した次のような古典的問題がある。

問題 II (Shelah 1978 年頃). リンデレーフ空間 X, Y で，$e(X \times Y) > 2^\omega$ となるものが存在するか？

この問題に対して，彼自身が最初に無矛盾性のもとにその肯定解を与えた。

定理 1.2 (Shelah 1996, [16]). あるリンデレーフ空間 X で，その各点が G_δ-集合であり，$e(X \times X) > 2^\omega$ となるものが存在することは無矛盾である。

その後，この結果は Hajnal-Juhász [3], Gorelic [2] および Usuba [18] などにより，いろいろな集合論的仮定のもとで証明されてきた。しかし，残念ながら現在に至るも ZFC においては証明されていない。

一方，上記の問題 I については，最近次のことが証明された。

定理 1.3 (HY 2020, [4]) . A, B をある順序数の部分空間とするとき，次が成り立つ。

(1) もし $A \times B$ が可算パラコンパクトならば，$A \times B$ の任意の閉長方形 $A' \times B'$ に対して，等式 $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が成り立つ。

(2) 弱到達不可能基数が存在しないという仮定のもとで，逆が成り立つ。

上記 (2) における集合論的仮定は外すことができないことが，簡単な例からわかる。しかも，この仮定は ZFC と無矛盾であることが知られている。従って，定理 1.3 は実質的に上記の積空間 $A \times B$ に関して，その可算パラコンパクト性を容易に判定できる形で特徴付けている。

さて，上記の積空間 $A \times B$ について，次の結果を思い出そう。

定理 1.4 (家本-大田-玉野 1992, [6]). A, B をある順序数の部分空間とする。もし $A \times B$ が正規ならば，それは可算パラコンパクトとなる。

定理 1.3 および 1.4 に鑑みて問題 I を俯瞰すると，次の問題が自然に提起される。

問題 1. もし積空間 $X \times Y$ が正規であるならば，どんな空間 X（および Y）に対して，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

2 σ-空間をファクターにもつ積空間

空間 X が **σ-空間** [13] であるとは，それがある σ-局所有限なネット $\mathcal{F}$ (i.e., $\forall U$: 開集合, $\forall x \in U\ \exists F \in \mathcal{F}\,(x \in F \subset U)$) をもつとき。

問題 1 の解答として，次を得る。

定理 2.1. X を σ-空間，Y を空間とする。もし $X \times Y$ が正規ならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

次に，定理 1.4 と 2.1 から次の問題が考えられる。

問題 2. X を σ-空間，Y を空間とする。もし $X \times Y$ が可算パラコンパクトならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

空間 X が**強 σ-空間** [5] であるとは，X の σ-局所有限な閉被覆の列 $\{\mathcal{F}_n\}$ が存在して，X の任意の閉集合 E に対して，$\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{St}(E, \mathcal{F}_n) = E$ となるとき。ここで，$\mathrm{St}(E, \mathcal{F}_n) = \bigcup\{F \in \mathcal{F}_n : F \cap E \neq \emptyset\}$ とする。

この概念を用いて，問題 2 の部分解が次のように与えられる。

定理 2.2. X を強 σ-空間，Y を空間とする。もし $X \times Y$ が可算パラコンパクトならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

任意の M_3-空間は強 σ-空間だから（[5] 参照），この定理からすぐに次の系を得る。

系 2.3. X を M_3-空間，Y を空間とする。もし $X \times Y$ が可算パラコンパクトならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

注意. 定理 2.1 における $X \times Y$ の正規性および系 2.3（従って定理 2.2）における $X \times Y$ の可算パラコンパクト性の条件なしには，これらの結果は成り立たない。実際，可分距離空間 X とリンデレーフ空間 Y で，$e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$ となる例が，[9] において見られる。

3　長方形的積空間

空間 X に対して，$U \subset X$ が**コゼロ集合**（または**コゼロ**）であるとは，ある連続関数 $f : X \to [0, 1]$ が存在して，$U = \{x \in X : f(x) > 0\}$ となるとき。

積空間 $X \times Y$ に対して，その部分集合で $P \times Q$ の形のものを，$X \times Y$ の**長方形**という。特に，$X \times Y$ の長方形 $P \times Q$ が**閉長方形**（**コゼロ長方形**）であるとは，P および Q がそれぞれ X および Y の閉集合（コゼロ集合）であるとき。

完全正則空間 X, Y による積空間 $X \times Y$ が**長方形的** [14] であるとは，$X \times Y$ の任意の有限コゼロ被覆が，σ-局所有限な細分でコゼロ長方形からなるものをもつとき。

もともと積空間 $X \times Y$ の長方形的の概念は，[14] において次元論の積定理の不等式 $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ を証明するための十分条件として導入された。そして，積空間 $X \times Y$ が長方形的になるための具体的な十分条件が与えられた。

命題 3.1 (Pasynkov 1975, [14]). 完全正則空間 X, Y に対して，次の条件の一つを満たせば，積空間 $X \times Y$ は長方形的となる。

(1) 射影 $\pi : X \times Y \to Y$ が閉写像である。

(2) X がパラコンパクトかつ局所コンパクトである。

(3) X が離散でない距離空間であり，積空間 $X \times Y$ が正規（$\Leftrightarrow$ 可算パラコンパク

ト [15] 参照）である。

(4) X がパラコンパクト Σ-空間であり，Y がパラコンパクト P-空間（森田 [10] の意味で）である。

(5) X がパラコンパクト $\mathbb{DC}$-like 空間であり，Y がパラコンパクトである（[19] 参照）。

この命題によって，これまでの多くの次元論の積定理の結果は「長方形的積空間」という概念によって統一されることとなった。しかし，この概念は次元論の積定理以外では，あまり用いられることはなかった。ところが，順序数の部分空間による積空間に関して，次の結果が証明された。

定理 3.2 (家本-Y 2007, [7]). A, B をある順序数の部分空間とする。このとき，$A \times B$ が可算パラコンパクトであるための必要十分条件は，それが長方形的となることである。

この定理 1.3 と 3.2 に鑑みて，問題 1 は次の自然ような問題に変えることができる。

問題 3. もし積空間 $X \times Y$ が長方形的であるならば，どんな空間 X（および Y）に対して，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

4 $\mathbb{DC}$-like 空間をファクターにもつ積空間

問題 3 を扱う場合に，命題 3.1 に沿って考えていく。実際，命題 3.1(1) と (2) の場合に，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つことは簡単に分かる。命題 3.1(3) の場合は，定理 2.1 からこの等式が成り立つことは明らか。さらに，命題 3.1(4) の場合にも，この等式が成り立つことは，[11] における標準的な証明によって確認できる。残るは，命題 3.1 の (5) の場合であるが，それも成り立つことをここで示そう。

位相ゲーム $G(\mathbb{DC}, X)$ の概念は，Telgársky [17] により導入された。また，その必勝戦略に関しては，[1] において顕著な結果が得られた。先ずは，それについて定義していきたい。

空間 X に対して，2^X を X の閉集合全体を表すとする。$\mathbb{DC}$ をコンパクト集合からなる離散被覆をもつ空間全体からなる族とする。

対応 $s : 2^X \to 2^X$ が位相ゲーム $G(\mathbb{DC}, X)$ における**プレヤー I の必勝戦略**であるとは，それが次の 2 つの条件を満たすとき:

(i) 任意の $F \in 2^X$ に対して，$s(F) \in \mathbb{DC}$ かつ $s(F) \subset F$ であり，

(ii) もし $F_0 = X$ であり $\{F_n\}_{n\in\omega}$ が X の閉集合からなる減少列で，任意の n に対して $s(F_{n-1}) \cap F_n = \emptyset$ を満たすならば，$\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$ となる。

これは直感的に言うと，プレーヤー I (追跡者) とプレーヤー II （逃亡者）からなる追跡ゲーム $G(\mathbb{DC}, X)$ において，プレーヤー I が $\mathbb{DC} \cap 2^X$ の範囲で追跡し，プレーヤー II がその範囲に重ならないように逃げる。プレーヤー I に必勝戦略 s があるとは，プレーヤー II がどのように逃げてもプレーヤー I が s に従って追跡する限り，最終的にプレーヤー II の逃げるところがなくなることを上の条件 (ii) は示している。

空間 X が **$\mathbb{DC}$-like** であるとは，位相ゲーム $G(\mathbb{DC}, X)$ においてプレーヤー I がある必勝戦略をもつときである。

例えば,「空間 X がコンパクト集合からなる σ-閉包保存な閉被覆をもつとき，X は $\mathbb{DC}$-like となる」ことはよく知られている。$\mathbb{DC}$-like 空間の最も重要な結果は，積空間のパラコンパクト性に関して，Telgársky により与えられた次のような十分条件である。

定理 4.1 (Telgársky 1975, [17] and Y 1981, [19]). 空間 X, Y をパラコンパクト空間とする。もし X が $\mathbb{DC}$-like ならば，$X \times Y$ はパラコンパクトかつ長方形的となる。

現在に至るも，この積空間のパラコンパクト性に関して，$\mathbb{DC}$-like より良い十分条件は見つかっていない。ここで，我々は問題 3 に対して，次のようなひとつの解を与えることができる。

定理 4.2. 空間 X を $\mathbb{DC}$-like とする。もし $X \times Y$ が正規かつ長方形的ならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

5　いくつかの反例

ここからは等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立たない例を考えていく。先ずは問題 3 が無条件では成り立たないことを，大田が指摘した。

例 5.1 (大田 [12]). 完全正則空間 X, Y で，$X \times Y$ が長方形的であるが，$e(X) = e(Y) = \omega$ かつ $e(X \times Y) = \omega_1$ となるものが存在する。

この結果に関連して，Shelah の問題（上記の問題 II）を少し弱めた形で，
「完全正則空間 X, Y で，$e(X) = e(Y) = \omega$ かつ $e(X \times Y) > 2^\omega$ となるものは存在するか？」
という問題が考えられる。しかし，この問題は次の例によって解決される。

例 5.2. 任意の正則基数 $\lambda > \omega_1$ に対して，λ のリンデレーフ部分空間 A と λ の可算コンパクト部分空間 B で，$e(A \times B) = \lambda$ となるものが存在する。

さらに，例 5.2 をさらに強調する形で，次の例を得ることができる。

例 5.3. λ を任意の非可算正則基数とする。このとき，ある完全正則空間 X, Y で，$X \times Y$ が長方形的であり，$e(X) = e(Y) = \omega$ かつ $e(X \times Y) = \lambda$ となるものが存在する。

例 5.1 と 5.3 における積空間 $X \times Y$ は，pseudo コンパクトであるが，$e(X \times Y) > \omega$ より可算コンパクトではない。従って，この $X \times Y$ は正規ではない。また，例 5.2 における A, B はともに順序数の部分空間だから，定理 1.3 から $A \times B$ は長方形的ではない。従って定理 1.4 から，この $A \times B$ は正規ではない。

以上のことから，次の問題が自然に提起される。

問題 4. もし積空間 $X \times Y$ が正規かつ長方形的であるならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

定理 4.2 は問題 4 の肯定的な部分解である。しかし，著者は問題 4 の否定解を予想している。

感謝. 静岡大学名誉教授・大田春外博士には，例 5.1 を指摘していただきました。この指摘を契機として，我々の研究は大いに進展することになりました。ここに厚くお礼申し上げます。

参考文献

[1] F. Galvin and R. Telgársky, *Stationary strategies in topological games*, Topology and Appl. **22** (1986), 51-69.

[2] I. Gorelic, *On powers of Lindelöf spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae **35** (1994), 383–401.

[3] A. Hajnal and I. Juhasz, *Lindelöf spaces à la Shelah*, in: Topology II (Budapest, 1978), Colloq. Math. Soc. Bolyai 23, North-Holland, 1978, 555-567.

[4] Y. Hirata and Y. Yajima, *A characterization of the countable paracompactness for products of ordinals*, Topology and Appl. **282** (2020), 107325, 10 pp.

[5] H. J. K. Junnila and Y. Yajima, *Normality and countable paracompactness of products with σ-spaces having special nets*, Topology and Appl. **85** (1998),375–394.

[6] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology and Appl. **45** (1992), 245–260.

[7] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Topology and Appl. **154** (2007), 758–770.

[8] V. I. Malyhin, *On the tightness and the Souslin number of* $\exp X$ *and in a product of spaces*, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 496–499.

[9] E. Michael, *The product of a normal space and a metric space need not to be normal*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 375–376.

[10] K. Morita, *Products of normal spaces with metric spaces*, Math. Ann. **154** (1964), 365–382.

[11] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math. **65** (1969), 169–192.

[12] H. Ohta, A private communication.

[13] A. Okuyama, *Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces*, Sci. Rep. Tokyo Kyouiku Daigaku Sect. A **9** (1967), 236–254.

[14] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.

[15] M. E. Rudin and M. Starbird, *Products with a metric factor*, General Topology and Appl. **5** (1975), 235–248.

[16] S. Shelah, *On some problems in general topology*, Contemp. Math. **192** (1996), 91–101.

[17] R. Telgársky, *Spaces defined by topological games*, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.

[18] T. Usuba, *Products of Lindelöf spaces with points G_δ*, Topology and Appl. **252** (2019), 90–96.

[19] Y. Yajima, *Topological games and products I*, Fund. Math. **113** (1981), 141–153.