

# 一次元基本セル・オートマトン Rule 150 と Rule 90 が埋め込まれた対称二次元基本セル・オートマトンについて

京都教育大学教育学部数学科 川原田 茜\*

Akane Kawaharada  
Department of Mathematics, Kyoto University of Education

## 1 はじめに

一次元基本セル・オートマトンの Rule 150 と Rule 90 は極限集合がフラクタルになることで知られる線型セル・オートマトンである。本稿では、対称性を持つ二次元基本セル・オートマトンの軌道に Rule 150, Rule 90 の軌道が埋め込まれているケースをそれぞれ紹介する。

ここでは初期値として一点のみの状態が 1, その他の点の状態が 0 となるような場合のみを考えるため, 対称二次元基本セル・オートマトンのうち,  $(T, L, C, R, B) = (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$  の次状態をそれぞれ 0, 1 と固定した 1024 個のセル・オートマトンを考える。数値計算の結果より, 1024 個の対称二次元基本セル・オートマトンが生成する時間発展パターンは 346 種であることが分かっている [1]。この 346 種の時間発展パターンを調べると, 時間発展パターンのタテヨコ断面が Rule 150 の時間発展パターンと一致するのは Table 2 の  $F_{S1}, F_{S2}, F_{S3}$  の 3 つのみであることが分かった。さらに  $F_{S3}$  については, ナナメ断面も Rule 150 と一致している。タテヨコ断面とナナメ断面がいずれも Rule 90 の時間発展パターンと一致するのは Table 2 の  $F_{S4}$  のみであるが, タテヨコ断面のみか, ナナメ断面のみが Rule 90 で表されるものは  $F_{S5}$  から  $F_{S10}$  までの 6 個が該当することが分かった。

Rule 150 と  $F_{S1}, F_{S2}, F_{S3}$  との関係については第 3 章, Rule 90 と  $F_{S4}$  から  $F_{S10}$  までのセル・オートマトンとの関係については第 4 章で論じる。

## 2 準備

各セルで二値  $\{0, 1\}$  をとるセル・オートマトンを考える。  $d$  次元の配置空間を  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  とおき, 以下のような配置  $x_o \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  を考える。

$$(x_o)_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{i} = \mathbf{0} (= (0, 0, \dots, 0)), \\ 0 & \text{if } \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}, \end{cases} \quad (1)$$

**Definition 1.** 一次元基本セル・オートマトン (1dECA)  $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, F)$  の遷移規則は, 配置  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  に対して,

$$(Fx)_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

で与えられる。ただし  $f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  は局所規則である。

1dECA は 256 個あるが, ここでは Rule 150 と Rule 90 について考える。これらの遷移規則は Table 1 のように与えられ,

$$(F_{150}x)_i = x_{i-1} + x_i + x_{i+1} \pmod{2}, \quad (3)$$

$$(F_{90}x)_i = x_{i-1} + x_{i+1} \pmod{2}, \quad (4)$$

とも表せる。

---

\*E-mail: aka@kyokyo-u.ac.jp

Table 1: 1dECA Rule 150 と Rule 90 の遷移規則

$x_{i-1}x_i x_{i+1}$	111	110	101	100	011	010	001	000
$(F_{150}x)_i$	1	0	0	1	0	1	1	0
$(F_{90}x)_i$	0	1	0	1	1	0	1	0

**Definition 2.** (i) **二次元基本セル・オートマトン (2dECA)**  $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}, F)$  の遷移規則は以下で与えられる. 配置  $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$  に対して,

$$(Fx)_{i,j} = f \begin{pmatrix} & x_{i,j+1} & \\ x_{i-1,j} & x_{i,j} & x_{i+1,j} \\ & x_{i,j-1} & \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} T \\ LCR \\ B \end{pmatrix}, \quad (i,j) \in \mathbb{Z}^2. \quad (5)$$

(ii) 局所規則  $f : \{0,1\}^5 \rightarrow \{0,1\}$  が以下の条件 (上下左右対称, 回転対称) を満たすとき, **2dECA**  $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}, F)$  は**対称 2dECA (Sym-2dECA)** であるという.

$$f \begin{pmatrix} T \\ LCR \\ B \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} B \\ LCR \\ T \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} T \\ RCL \\ B \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} T \\ LCR \\ B \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} T \\ BCT \\ R \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} B \\ RCL \\ T \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} R \\ TCB \\ L \end{pmatrix}. \quad (6)$$

2dECA は  $2^{32}$  個あるが, そのうち  $2^{12}$  個が Sym-2dECA である. Table 2 は 10 個の Sym-2dECA の遷移規則であり, Table 中の \* は 0, 1 いずれの値をとってもよいものとする (Result 1 より, これらの遷移は初期値  $x_0$  からの時間発展に影響しない).

Table 2: Sym-2dECA の遷移規則

$T$	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
$LCR$	111	111	010	011	010	010	101	101	000	001	000	000
$B$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
$F_{S1}$	1	0	*	*	0	1	0	*	0	0	1	0
$F_{S2}$	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
$F_{S3}$	1	0	*	0	0	1	0	1	*	1	1	0
$F_{S4}$	*	*	*	*	*	0	0	1	*	1	1	0
$F_{S5}$	*	*	*	*	*	0	0	*	*	0	1	0
$F_{S6}$	0	0	*	0	0	1	0	0	0	1	1	0
$F_{S7}$	0	0	*	0	0	1	0	0	1	1	1	0
$F_{S8}$	0	0	*	0	0	1	0	1	*	1	1	0
$F_{S9}$	0	0	0	1	1	1	0	1	*	1	1	0
$F_{S10}$	0	1	*	1	1	1	1	1	*	1	1	0

(\* is 0 or 1.)

Sym-2dECA の対称性について以下が得られる.

**Proposition 1.** *Sym-2dECA*  $F$  の初期値  $x$  が上下左右対称 (任意の  $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$  に対して  $x_{i,j} = x_{i,-j}$  かつ  $x_{i,j} = x_{-i,j}$  を満たす) で与えられるとき, 任意の時刻  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し,

(i)  $F^n x$  は上下左右対称 ( $(F^n x)_{i,j} = (F^n x)_{i,-j}$ ,  $(F^n x)_{i,j} = (F^n x)_{-i,j}$ ) である.

(ii)  $F^n x$  はナナメ対称 (任意の  $s,t,i \in \mathbb{Z}$  に対して  $(F^n x)_{s+i,t+i} = (F^n x)_{-s+i,-t+i}$ ,  $(F^n x)_{s+i,t-i} = (F^n x)_{-s+i,-t-i}$  を満たす) である.

*Proof.* (i) 上下対称な初期値  $x$  ( $x_{i,j} = x_{i,-j}$ ) を考えると, 局所規則の対称性より  $(Fx)_{i,j} = (Fx)_{i,-j}$  である. ある  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について  $(F^k x)_{i,j} = (F^k x)_{i,-j}$  とすると,  $(F^{k+1} x)_{i,j} = (F(F^k x))_{i,j} = (F(F^k x))_{i,-j} = (F^{k+1} x)_{i,-j}$  となる. 左右対称も同様に示すことができる.

(ii) ナナメ対称な初期値  $x$  ( $x_{s+i,t+i} = x_{-s+i,-t+i}$ ) を考えると、局所規則の対称性より  $(Fx)_{s+i,t+i} = (Fx)_{-s+i,-t+i}$  である。ある  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について  $(F^k x)_{s+i,t+i} = (F^k x)_{-s+i,-t+i}$  とすると、 $(F^{k+1} x)_{s+i,t+i} = (F(F^k x))_{s+i,t+i} = (F(F^k x))_{-s+i,-t+i} = (F^{k+1} x)_{-s+i,-t+i}$  となる。もう一方のナナメ対称性  $(F^n x)_{s+i,t-i} = (F^n x)_{-s+i,-t-i}$  も同様に示すことができる。  $\square$

初期値  $x_o$  からの Sym-2dECA の軌道については以下の数値計算結果が得られている。

**Result 1** ([1]). 数値計算結果より、時間ステップ  $0 \leq n \leq 1024$  に対して以下が成り立つ。Table 2 の Sym-2dECA について、初期値  $x_o$  からの軌道において、遷移が \* となる近傍の状態組は出現しない。

**Conjecture 1.** Result 1 がすべての  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について成り立つ。

### 3 Rule 150 が埋め込まれた Sym-2dECA

Sym-2dECA  $F_{S1}$ ,  $F_{S2}$ ,  $F_{S3}$  と 1dECA Rule 150 との関係について論じる。初期値  $x_o$  からの Sym-2dECA の時間発展パターン 346 種のうち、断面に Rule 150 が埋め込まれているのは 3 つのみであった。これら 3 つの時間発展パターンのタテヨコ断面には Rule 150 が埋め込まれており、 $F_{S3}$  のナナメ断面には Rule 150 が埋め込まれていることを示す。

#### 3.1 Sym-2dECA $F_{S1}$ と 1dECA Rule 150

Sym-2dECA  $F_{S1}$  の遷移規則は以下の式で与えられる。

$$(F_{S1}x)_{i,j} = C + T + R + B + L \pmod{2}. \quad (7)$$

このとき、 $f(T, L, C, R, B) = f(1, 0, 1, 0, 1) = f(0, 0, 1, 1, 1) = f(0, 1, 0, 1, 1) = 1$  としている点に注意する。(Conjecture 1 より、これらの遷移は初期値  $x_o$  からの軌道に影響しない。) 初期値  $x_o$  からの  $F_{S1}$  の軌道は Figure 1 のようになる。



Figure 1: Sym-2dECA  $F_{S1}$  の時間発展パターン  $\{F_{S1}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

**Theorem 1.** Conjecture 1 が成り立つと仮定すると、 $F_{S1}$  の初期値  $x_o$  からの時間発展パターンのタテとヨコの断面 ( $\{F_{S1}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$ ,  $\{F_{S1}^n x_o\}_{n \geq 0|i,0}$ ) は、それぞれ 1dECA Rule 150 の軌道  $\{F_{150}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する。(Figure 2 (a) 参照.)

*Proof.* Proposition 1 (i) より、時間発展パターンは上下左右対称であるから、

$$(F_{S1}^{n+1} x_o)_{0,j} = (F_{S1}^n x_o)_{0,j} + (F_{S1}^n x_o)_{1,j} + (F_{S1}^n x_o)_{-1,j} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2} \quad (8)$$

$$= (F_{S1}^n x_o)_{0,j} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2}. \quad (9)$$

$j = 0$  のときも同様に示せるので、時間発展パターンのタテヨコ断面はそれぞれ 1dECA Rule 150 で表されることが分かる。  $\square$

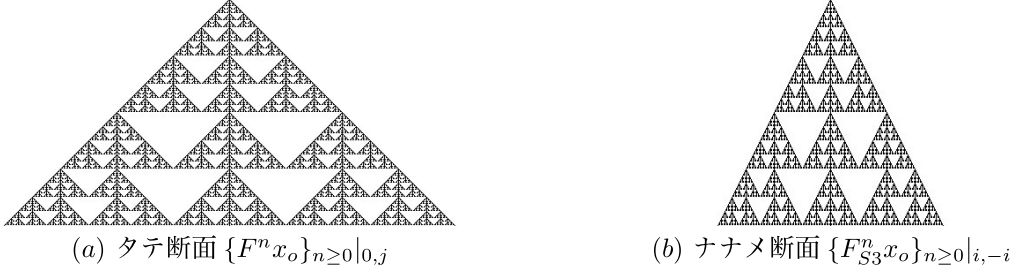


Figure 2: 初期値  $x_o$  からの  $F_{S_1}$ ,  $F_{S_2}$ ,  $F_{S_3}$  の時間発展パターン of タテ断面  $\{F^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$  と  $F_{S_3}$  のナナメ断面  $\{F_{S_3}^n x_o\}_{n \geq 0|i,-i}$

### 3.2 Sym-2dECA $F_{S_2}$ と 1dECA Rule 150

Sym-2dECA  $F_{S_2}$  の遷移規則は以下の式で与えられる.

$$(F_{S_2} x)_{i,j} = (C + T + R + B + L) + (1 - C)(TR + RB + BL + LT) \pmod{2}. \quad (10)$$

初期値  $x_o$  からの  $F_{S_2}$  の軌道は Figure 3 のようになる.



Figure 3: Sym-2dECA  $F_{S_2}$  の時間発展パターン  $\{F_{S_2}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

**Theorem 2.**  $F_{S_2}$  の初期値  $x_o$  から時間発展パターンのタテとヨコの断面 ( $\{F_{S_2}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$ ,  $\{F_{S_2}^n x_o\}_{n \geq 0|i,0}$ ) はそれぞれ 1dECA Rule 150 の軌道  $\{F_{150}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する. (Figure 2 (a) 参照.)

*Proof.* Proposition 1 (i) より, 初期値  $x_o$  からの時間発展パターンは上下左右対称であるから,

$$\begin{aligned} (F_{S_2}^{n+1} x_o)_{0,j} &= ((F_{S_2}^n x_o)_{0,j} + (F_{S_2}^n x_o)_{1,j} + (F_{S_2}^n x_o)_{-1,j} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j-1}) \\ &\quad + (1 - (F_{S_2}^n x_o)_{0,j})((F_{S_2}^n x_o)_{1,j}(F_{S_2}^n x_o)_{0,j-1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j-1}(F_{S_2}^n x_o)_{-1,j} \\ &\quad + (F_{S_2}^n x_o)_{-1,j}(F_{S_2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j+1}(F_{S_2}^n x_o)_{1,j}) \pmod{2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= ((F_{S_2}^n x_o)_{0,j} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j-1}) + (F_{S_2}^n x_o)_{1,j}(1 - (F_{S_2}^n x_o)_{0,j}) \\ &\quad \times ((F_{S_2}^n x_o)_{0,j-1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j-1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j+1}) \pmod{2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$= (F_{S_2}^n x_o)_{0,j} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_2}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2}. \quad (13)$$

$j = 0$  のときも同様に示せるので, 時間発展パターンのタテヨコ断面はそれぞれ 1dECA Rule 150 で表されることが分かる.  $\square$

### 3.3 Sym-2dECA $F_{S_3}$ と 1dECA Rule 150

Sum-2dECA  $F_{S_3}$  の遷移規則は以下の式で与えられる.

$$(F_{S_3} x)_{i,j} = x_{i,j} + \max(x_{i+1,j}, x_{i-1,j}, x_{i,j+1}, x_{i,j-1}) + x_{i+1,j}x_{i-1,j}x_{i,j+1}x_{i,j-1} \pmod{2}. \quad (14)$$

このとき、 $f(T, L, C, R, B) = f(1, 0, 1, 0, 1) = 0$ ,  $f(T, L, C, R, B) = f(1, 0, 0, 0, 1) = 1$  としている点に注意する。(Conjecture 1 より、これら 2 つの遷移は初期値  $x_o$  からの軌道に影響しない。) 初期値  $x_o$  からの  $F_{S_3}$  の軌道は Figure 4 のようになる。



Figure 4: Sym-2dECA  $F_{S_3}$  の時間発展パターン  $\{F_{S_3}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

**Theorem 3.** Conjecture 1 が成り立つと仮定するとき、以下を得る。

- (i)  $F_{S_3}$  の初期値  $x_o$  から時間発展パターンのタテとヨコの断面 ( $\{F_{S_3}^n x_o\}_{n \geq 0} |_{0,j}$ ,  $\{F_{S_3}^n x_o\}_{n \geq 0} |_{i,0}$ ) は、それぞれ 1dECA Rule 150 の軌道  $\{F_{150}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する。(Figure 2 (a) 参照.)
- (ii) 偶数時刻  $n = 2k$  と奇数時刻  $n = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) に対する  $F_{S_3}$  の初期値  $x_o$  から時間発展パターンにおいて、それぞれのナナメ断面 ( $\{F_{S_3}^{2k} x_o\}_{k \geq 0} |_{i,\pm i}$ ,  $\{F_{S_3}^{2k+1} x_o\}_{k \geq 0} |_{i,\pm i}$ ) は 1dECA Rule 150 の軌道  $\{F_{150}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する。(Figure 2 (b) 参照.)

*Proof of Theorem 3 (i).* 式 (14) において  $i = 0$  とすると、

$$(F_{S_3} x)_{0,j} = x_{0,j} + \max(x_{1,j}, x_{-1,j}, x_{0,j+1}, x_{0,j-1}) + x_{1,j}x_{-1,j}x_{0,j+1}x_{0,j-1} \pmod{2}. \quad (15)$$

Proposition 1 (i) より、初期値  $x_o$  のとき時間発展パターンは左右対称であるから

$$(F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,j} = (F_{S_3}^n x_o)_{0,j} + \max((F_{S_3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S_3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S_3}^n x_o)_{0,j-1}) + (F_{S_3}^n x_o)_{1,j}(F_{S_3}^n x_o)_{0,j+1}(F_{S_3}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2} \quad (16)$$

$$= \begin{cases} (F_{S_3}^n x_o)_{0,j} & \text{if } ((F_{S_3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S_3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S_3}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 0, 0), (1, 1, 1), \\ 1 - (F_{S_3}^n x_o)_{0,j} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (17)$$

式 (16) の 2 式目は以下のふたつの場合に分けられる。 $((F_{S_3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S_3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S_3}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$  のときは  $(F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,j} = 1 - (F_{S_3}^n x_o)_{0,j}$  であり、 $((F_{S_3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S_3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S_3}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 1, 0), (1, 0, 1)$  のときは初期値  $x_o$  からの時間発展には現れないので無視できる。よって  $(F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,j} = (F_{S_3}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,j} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,j+1} \pmod{2}$  と表せるので、タテ断面の局所遷移規則は 1dECA Rule 150 に従っていることが分かる。

同様に、初期値  $x_o$  とするとき  $j = 0$  に対して時間発展パターンは対称であるから  $(F_{S_3}^n x_o)_{i,1} = (F_{S_3}^n x_o)_{i,-1}$  であり、ヨコ断面も Rule 150 で生成されていることが分かる。□

Theorem 3 (ii) を示す。まず以下の Lemma を考える。

**Lemma 1.**  $F_{S_3}$  の  $x_o$  からの時間発展パターンは、任意の時刻  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し、 $(F_{S_3}^n x_o)_{l-m, \pm(m+1)} = (F_{S_3}^n x_o)_{l-m+1, \pm m}$ ,  $(F_{S_3}^n x_o)_{-(l-m), \pm(m+1)} = (F_{S_3}^n x_o)_{-(l-m+1), \pm m}$  ( $0 \leq m \leq l$ ) である。

*Proof.* Proposition 1 (i) より、初期値  $x_o$  からの時間発展パターンは上下左右対称であるから  $i, j \geq 0$  の場合のみを考えれば十分である。帰納法によって次式を示す。

$$(F_{S_3}^n x_o)_{l-m, m+1} = (F_{S_3}^n x_o)_{l-m+1, m} \quad (0 \leq m \leq l). \quad (18)$$

初期値  $x_o$  からの時間発展を計算すると,

$$(F_{S_3}^1 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,0), (1,0), (0,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

$$(F_{S_3}^2 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,0), (2,0), (0,2), (1,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (20)$$

$$(F_{S_3}^3 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,0), (2,0), (0,2), (1,1), (3,0), (2,1), (1,2), (0,3), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

より,  $n < 3$  のとき式 (18) を満たす. ある時刻  $n = k (\geq 3)$  に対して式 (18) が成り立っていると仮定すると,  $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m,m+1} = (F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m+1,m}$  となることを示す.

Table 3:  $(F_{S_3}^k x_o)_{l-m,m+1}$ ,  $(F_{S_3}^k x_o)_{l-m+1,m}$  が取り得る 8 種の近傍とその遷移結果  $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m,m+1}$ ,  $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m+1,m}$

$n$	$j$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$k$	$m+2$	0	0	0	0	1	1	1	1
	$m+1$	000	100	010	110	001	101	011	111
	$m$	000	100	010	110	001	101	011	111
	$m-1$	0	1	0	1	0	1	0	1
$k+1$	$m+1$	0	1	1	0	1	0	0	1
	$m$	0	1	1	0	1	0	0	1

$(F_{S_3}^k x_o)_{l-m+1,m}$  の Von Neumann 近傍を考えると, 取り得る Von Neumann 近傍の状態組は Table 3 の太字で示した 8 種のみである. さらにそれらに対して  $(F_{S_3}^k x_o)_{l-m,m+1}$  の Von Neumann 近傍の状態組も一意に決まる. これら 8 種すべての近傍に対して  $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m,m+1} = (F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m+1,m}$  が成り立っていることが分かる. よってすべての  $l, m$  ( $0 \leq m \leq l$ ),  $n \geq 0$  に対して式 (18) が成り立つことが示された.  $\square$

*Proof of Theorem 3 (ii).* 4点  $(\pm i, 0)$ ,  $(0, \pm i)$  を頂点とする正方形の周上の頂点集合を  $Q_i$  とおく. Lemma 1 より  $(F_{S_3}^n x_o)_{i,i} = (F_{S_3}^n x_o)_{2i,0} = (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i}$  であり, Theorem 3 (i) よりタテヨコ断面は Rule 150 に従うので, 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し

$$(F_{S_3}^{n+2} x_o)_{i,i} = (F_{S_3}^{n+2} x_o)_{0,2i} \quad (22)$$

$$= (F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,2i+1} \pmod{2} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &= ((F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i}) \\ &\quad + ((F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+1}) \\ &\quad + ((F_{S_3}^n x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+1} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+2}) \pmod{2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$= (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+2} \pmod{2} \quad (25)$$

$$= (F_{S_3}^n x_o)_{i-1,i-1} + (F_{S_3}^n x_o)_{i,i} + (F_{S_3}^n x_o)_{i+1,i+1} \pmod{2}. \quad (26)$$

$\square$

## 4 Rule 90 が埋め込まれた Sym-2dECA

7つの Sym-2dECA  $F_{S_4}$  から  $F_{S_{10}}$  と 1dECA Rule 90 との関係について論じる. 初期値  $x_o$  からの Sym-2dECA の時間発展パターン 346 種のうち, タテヨコ断面とナナメ断面が共に Rule 90 で表されるのは  $F_{S_4}$  のみであった. 時間発展パターンのタテヨコ断面のみ, もしくはナナメ断面のみに Rule 90 が現れる Sym-2dECA は  $F_{S_5}$  から  $F_{S_{10}}$  までの 6 個あることが分かったので, その結果も示す.

#### 4.1 Sym-2dECA $F_{S_4}$ と 1dECA Rule 90

Sym-2dECA  $F_{S_4}$  の遷移規則は以下で与えられる.

$$(F_{S_4}x)_{i,j} = 1 - (TRBL + (1-T)(1-R)(1-B)(1-L)). \quad (27)$$

ただし,  $f(T, L, C, R, B) = f(1, 1, 1, 1, 1) = 0$ ,  $f(T, L, C, R, B) = f(0, 1, 1, 1, 1) = f(1, 0, 1, 0, 1) = f(0, 0, 1, 1, 1) = f(0, 0, 1, 0, 1) = f(1, 0, 0, 0, 1) = 1$  としている点に注意する. (Conjecture 1 より, これらの遷移は初期値  $x_o$  からの軌道に出現しない.) 初期値  $x_o$  からの  $F_{S_4}$  の軌道は Figure 5 のようになる.

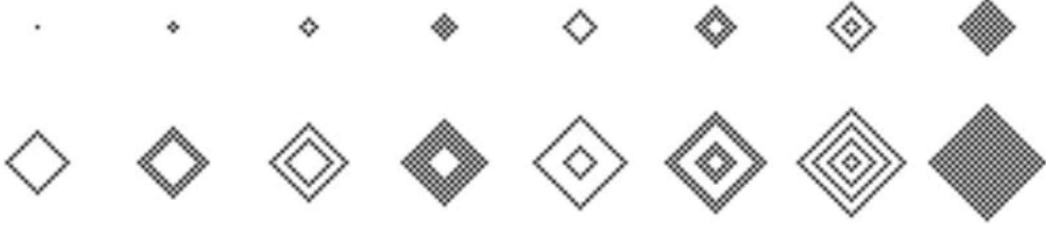
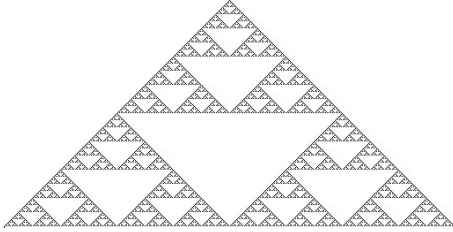


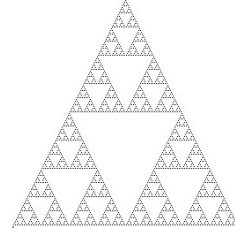
Figure 5: Sym-2dECA  $F_{S_4}$  の時間発展パターン  $\{F_{S_4}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

**Theorem 4.** Conjecture 1 が成り立つと仮定するとき, 以下を得る.

- (i)  $F_{S_4}$  の初期値  $x_o$  からの時間発展パターンのタテとヨコの断面 ( $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$ ,  $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0|i,0}$ ) は, それぞれ 1dECA Rule 90 の軌道  $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する. (Figure 6 (a) 参照.)
- (ii) 偶数時刻  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) に対する  $F_{S_4}$  の初期値  $x_o$  から時間発展パターンにおいて, ナナメ断面 ( $\{F_{S_4}^{2k} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$ ) は 1dECA Rule 90 の軌道  $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する. (Figure 6 (b) 参照.)



(a) タテ断面  $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$



(b) ナナメ断面  $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0|i,-i}$

Figure 6: 初期値  $x_o$  からの  $F_{S_4}$  の時間発展パターンのタテ断面  $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$  とナナメ断面  $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0|i,-i}$

*Proof of Theorem 4 (i).*  $F_{S_4}$  の定義より, 式 (27) において  $i = 0$  とすると,

$$(F_{S_4}x)_{0,j} = 1 - x_{0,j+1}x_{1,j}x_{0,j-1}x_{-1,j} - (1 - x_{0,j+1})(1 - x_{1,j})(1 - x_{0,j-1})(1 - x_{-1,j}). \quad (28)$$

ここで Proposition 1 (i) より, 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して  $(F_{S_4}^n x_o)_{1,j} = (F_{S_4}^n x_o)_{-1,j}$  であるから

$$(F_{S_4}^{n+1} x_o)_{0,j} = 1 - (F_{S_4}^n x_o)_{0,j+1}(F_{S_4}^n x_o)_{1,j}(F_{S_4}^n x_o)_{0,j-1} - (1 - (F_{S_4}^n x_o)_{0,j+1})(1 - (F_{S_4}^n x_o)_{1,j})(1 - (F_{S_4}^n x_o)_{0,j-1}) \quad (29)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } ((F_{S_4}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S_4}^n x_o)_{1,j}, (F_{S_4}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 0, 0), (1, 1, 1), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (30)$$

式 (30) の 1 式目について  $(T, L, C, R, B) = (1, 1, 1, 1, 1)$ , 2 式目について  $(T, L, C, R, B) = (0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 0, 1)$  は初期値  $x_o$  からの時間発展には現れないので無視できる. よって  $(F_{S_4}^{n+1}x_o)_{0,j} = (F_{S_4}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_4}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2}$  と表すことができる.

同様に  $j = 0$  とおくと,  $(F_{S_4}^n x_o)_{i,1} = (F_{S_4}^n x_o)_{i,-1}$  より, ヨコ断面  $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0 | i, 0}$  も Rule 90 で生成されていることが分かる.  $\square$

次に Theorem 4 (ii) を示す. まずは以下の Lemma を考える.

**Lemma 2.**  $F_{S_4}$  の初期値  $x_o$  からの時間発展パターンにおいて, 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し  $(F_{S_4}^n x_o)_{l-m, \pm(m+1)} = (F_{S_4}^n x_o)_{l-m+1, \pm m}$ ,  $(F_{S_4}^n x_o)_{-(l-m), \pm(m+1)} = (F_{S_4}^n x_o)_{-(l-m+1), \pm m}$  ( $0 \leq m \leq l$ ) である.

*Proof.* Proposition 1 (i) より, 初期値  $x_o$  からの時間発展パターン  $F_{S_4}^n x_o$  は上下左右対称であるから,  $i, j \geq 0$  の場合のみ考えれば十分である. まず帰納法によって次式を示す.

$$(F_{S_4}^n x_o)_{l-m, m+1} = (F_{S_4}^n x_o)_{l-m+1, m} \quad (0 \leq m \leq l). \quad (31)$$

初期値  $x_o$  からの時間発展パターンを計算すると

$$(F_{S_4}^1 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (1,0), (0,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (32)$$

$$(F_{S_4}^2 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (2,0), (0,2), (1,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (33)$$

$$(F_{S_4}^3 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (1,0), (0,1), (3,0), (2,1), (1,2), (0,3), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (34)$$

より,  $n \leq 3$  のとき, 式 (31) を満たしている. ある時刻  $n = k (\geq 3)$  に対して式 (31) が成り立っていると仮定すると,  $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m, m+1} = (F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m+1, m}$  となることを示す.

Table 4:  $(F_{S_4}^k x_o)_{l-m, m+1}$ ,  $(F_{S_4}^k x_o)_{l-m+1, m}$  が取り得る 5 種の近傍とその遷移結果  $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m, m+1}$ ,  $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m+1, m}$

$n$	$j$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$k$	$m+2$	0	0	0	1	1
	$m+1$	000	100	010	001	101
	$m$	000	100	010	001	101
	$m-1$	0	1	0	0	1
$k+1$	$m+1$	0	1	0	1	0
	$m$	0	1	0	1	0

$(F_{S_4}^k x_o)_{l-m+1, m}$  の Von Neumann 近傍を考えると, 取り得る Von Neumann 近傍の状態組は Table 4 の太字で示した 5 種のみである. さらにそれらに対する  $(F_{S_4}^k x_o)_{l-m, m+1}$  の Von Neumann 近傍の状態組も一意に決まる. これら 5 種すべての近傍に対して  $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m, m+1} = (F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m+1, m}$  が成り立っていることが分かる. よってすべての  $l, m$  ( $0 \leq m \leq l$ ),  $n \geq 0$  に対して, 式 (31) が成り立つことが示された.  $\square$

*Proof of Theorem 4 (ii).* 4 点  $(\pm i, 0)$ ,  $(0, \pm i)$  を頂点とする正方形の周上の頂点集合を  $Q_i$  とおく. Lemma 2 より, 任意の  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して  $(F_{S_4}^{2k+2} x_o)_{i,i} = (F_{S_4}^{2k+2} x_o)_{2i,0} = (F_{S_4}^{2k+2} x_o)_{0,2i}$  であり, Theorem 4 (i) より, タテヨコ断面は Rule 90 に従うので,

$$(F_{S_4}^{2k+2} x_o)_{i,i} = (F_{S_4}^{2k+2} x_o)_{0,2i} \quad (35)$$

$$= (F_{S_4}^{2k+1} x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_4}^{2k+1} x_o)_{0,2i+1} \pmod{2} \quad (36)$$

$$= ((F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i}) + ((F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i+2}) \pmod{2} \quad (37)$$

$$= (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i+2} \pmod{2} \quad (38)$$

$$= (F_{S_4}^{2k} x_o)_{i-1, i-1} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{i+1, i+1} \pmod{2}. \quad (39)$$



□

## 4.2 Sym-2dECA $F_{S5}$ から $F_{S10}$ と 1dECA Rule 90

前節と同様の議論により、以下の Corollary を得る。(Figure 7 は、 $F_{S5}$  から  $F_{S10}$  までの初期値  $x_o$  からの時間発展パターンである.)

**Corollary 1.** Table 2 の Sym-2dECA  $F_{S5}$  から  $F_{S10}$  について、以下が言える.

- (i)  $F_{S5}$  の時間発展パターンのタテヨコ断面 ( $\{F_{S5}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$ ,  $\{F_{S5}^n x_o\}_{n \geq 0|i,0}$ ) は Rule 90 の軌道  $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する.
- (ii)  $n = 2k$  と  $n = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) に対する  $F_{S6}$ ,  $F_{S7}$ ,  $F_{S8}$  の時間発展パターンにおいて、それぞれのナナメ断面 ( $\{F_{S6}^{2k} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$ ,  $\{F_{S7}^{2k+1} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$ ) は Rule 90 の軌道  $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する.
- (iii)  $n = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) に対する  $F_{S9}$  の時間発展パターンにおいて、ナナメ断面 ( $\{F_{S9}^{2k+1} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$ ) は Rule 90 の軌道  $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する.
- (iv)  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) に対する  $F_{S10}$  の時間発展パターンにおいて、ナナメ断面 ( $\{F_{S10}^{2k} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$ ) は Rule 90 の軌道  $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$  と一致する.



(a)  $\{F_{S5}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$



(b)  $\{F_{S6}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$



(c)  $\{F_{S7}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$



(d)  $\{F_{S8}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$



(e)  $\{F_{S9}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$



(f)  $\{F_{S10}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

Figure 7: Sym-2dECA  $F_{S5}$  から  $F_{F_{S10}}$  の時間発展パターン

## 5 おわりに

Sym-2dECA の初期値  $x_o$  からの軌道に Rule 150, Rule 90 が現れるケースをそれぞれ見てきた。Sym-2dECA の 346 種の時間発展パターンのうち、時間発展パターンのタテヨコ断面が Rule 150 の時間発展パターンと一致するのは  $F_{S1}$ ,  $F_{S2}$ ,  $F_{S3}$  の 3 つであり、さらに  $F_{S3}$  はナナメ断面も Rule 150 と一致することを示した。Rule 90 に対しては、 $F_{S4}$  のタテヨコ断面とナナメ断面がいずれも Rule 90 の時間発展パターンと一致することを示した。同様の議論により、タテヨコ断面のみかナナメ断面のみが Rule 90 で表されるものは  $F_{S5}$  から  $F_{S10}$  までの 6 個あることが分かった。

## 謝辞

本研究は科研費 (18K13457) の助成を受けたものである。

## References

- [1] A. Kawaharada and T. Namiki. Relation between spatio-temporal patterns generated by two-dimensional cellular automata and a singular function. *International Journal of Networking and Computing*, 9(2):354–369, 2019.