各点創発に関する交叉安定クラスについて
Large intersection classes for pointwise emergence

東海大学 理学部数学科

中野雄史

概要

非正則集合（エルゴード平均が存在しないような点からなる集合）の複雑さを定量的に測るものとして，近年，桐木紳氏，相馬輝彦氏，および報告者によって各点創発の概念が導入された．そこではフルシフトについて，高創発集合（各点創発が超多項式的である点からなる集合；非正則集合の部分集合となる）が位相的に大きい，つまり通有的であることが示された．本稿では，報告者が最近 A. Zelerowicz 氏と共同で得た次の結果について報告する：有限型部分シフトについて，高創発集合の位相的エントロピーは力学系の位相的エントロピーと一致し，高創発集合の Hausdorff 次元は相空間の Hausdorff 次元と一致し，任意の Hölder 連続なポテンシャルに関して高創発集合の位相的圧力は力学系の位相的圧力と一致する（つまり，高創発集合は熱力学形式的に大きい集合である）．これらはすべて，Carathéodory 次元の交叉安定性に関するより一般的な結果の系として得られる．

1　研究の背景と主結果

X をコンパクトな距離空間とし，$f : X \to X$ を連続写像とする．$\mathcal{P}(X)$ を X 上の Borel 確率測度全体からなる集合とし，弱位相を備えているとする．点 $x \in X$ が**非正則的である**（*irregular*）とは，x の前方軌道に沿ったエルゴード平均が存在しないこと，つまり，経験測度

$$\delta_x^n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}, \quad n \geq 1,$$

の極限が $\mathcal{P}(X)$ 内で存在しないことを言う．この用語法は例えば [1, 36] で用いられているものであるが，このような点は**歴史的である**（*historic*；[32, 34]），**非典型的である**（*non-typical*；[3]），または**発散的である**（*divergent*；[14]）とも言われる．

Birkhoff のエルゴード定理から，非正則的な点からなる集合（以後**非正則集合**と呼び，I と書く）は任意の不変測度 μ に関して μ-零測度になってしまうため，エルゴード理論研究の初期ではこの集合はあまり関心を持たれていなかった．しかし，比較的近年になりこの集合は多くの力学系について “大きい” 集合であることが判明してきた．Pesin-Pitskel’ [29] は非正則集合が熱力学形式の観点から興味深い集合であることをはじめて示した．彼らは，非正則集合が位相的エントロピーおよび Hausdorff 次元の最大値を取ること，つまり，

$$h_{\mathrm{top}}(I) = h_{\mathrm{top}}(X) \quad \text{かつ} \quad \dim_H(I) = \dim_H(X)$$

となることを示した．ここで，$h_{\mathrm{top}}(Z)$ は（必ずしもコンパクトとは限らない）Borel 集合 Z に関する位相的

エントロピーである（正確な定義は [21, 29] または本稿の 4.1 節参照；この定義は Bowen による古典的な位相的エントロピー [11] の非コンパクト集合への一般化である）．この結果は，[3] で位相混合的な有限型部分シフトに，[19] でグラフ Markov 系に，[14, 36] で明記性を持つ連続写像に，[37] で概明記性を持つ連続写像に拡張された．その他，別の視点からの非正則集合の研究については [1, 2, 5, 10, 12, 13, 22, 25, 32, 34, 38, 41] およびその中の参考文献を参照されたい．

上記の先行研究で考えられた非正則的な点は，(1) で与えられた測度の列が 2 つ（ないし高々有限）のエルゴード的測度の間を振動するようなものとして得られていた．そのため，(1) の測度列の集積点からなる集合は有限次元となる．一方で本稿では，より複雑性の高い正則点たち，つまり (1) の測度列が無限個のエルゴード的測度の間を振動するような点を考察の対象とする．より正確には，与えられた無限個の異なるエルゴード的測度たちについて，(1) の測度列の集積点全体がそのエルゴード測度たちが貼る無限次元単体を含むような点全体を考える．我々は，そのような点全体からなる集合の次元が，与えられたエルゴード的測度たちの次元の下限以上であるという結果を得た（定理 11）．

最近，P. Berger 氏は “系を統計的に近似する上で避けられない複雑さを評価する” ために，[6] で測度論的創発の概念を導入した．測度論的創発は Newhouse 現象や KAM 現象などを定量的に研究するための決定的な手法を提供した．測度論的創発の概念は大変新規のものであるが，すでに活発な研究分野となりつつある [7–9, 15, 35]．この Berger の仕事に触発されて，[24] で報告者は桐木紳氏と相馬輝彦氏と共同で，非正則性を定量化するために各点創発の概念を導入した．点 $x \in X$ におけるスケール $\epsilon > 0$ の**各点創発** $\mathscr{E}_x(\epsilon)$ は，

$$\mathscr{E}_x(\epsilon) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} \mid \text{there exists } \{\mu_j\}_{j=1}^N \subset \mathcal{P}(X) \text{ such that } \limsup_{n\to\infty} \min_{1\le j\le N} d\left(\delta_x^n, \mu_j\right) \le \epsilon \right\} \tag{1.1}$$

で与えられる．ただし，d は $\mathcal{P}(X)$ 上の 1 次の Wasserstein 距離である（Wasserstein 距離の定義や基本的な性質については [39, 40] を参照；ここでは単に d が $\mathcal{P}(X)$ の弱位相の距離化になっていることに注意する）．点 x が非正則的であることと

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathscr{E}_x(\epsilon) = \infty$$

となることは同値である（[24, Proposition 1.2]）．また，(1.1) の $\min_j d\left(\delta_x^n, \mu_j\right)$ を $\int_X \min_j d\left(\delta_x^n, \mu_j\right) m(dx)$（$m \in \mathcal{P}(X)$）で置き換えたものは m に関する測度論的創発と呼ばれる．測度論的創発と各点創発の間の基本的な関係は次となる（[24, Proposition 1.4]）：任意の $\epsilon > 0$，Borel 集合 D および $m \in \mathcal{P}(X)$ について，

$$\min_{x\in D} \mathscr{E}_x(\epsilon) \le \mathscr{E}_m(m(D)\,\epsilon). \tag{1.2}$$

さらに，$x \in X$ における各点創発は，

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\log \mathscr{E}_x(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \infty$$

となるとき**超多項式的**（または**複雑な**）と言われる．[6] で指摘されたように，超多項式的アルゴリズムは計算機科学者の間で実行性のないクラスとして広く受け入れられている．Berger はこの意味で，複雑な測度論的創発を持つ力学系を数値計算によって研究することは本質的に不可能であると考えた．同様に，複雑な各点創発を持つ点全体からなる集合は統計的に解析することが困難であると考えることができる．それゆえ，複雑な創発を持つ点全体からなる集合がどの程度大きいかを研究することは大変興味が持たれることとなる（複雑な創発を持つ力学系の研究に関する別の動機については [7, 9] を参照されたい）．

本稿の主結果は次である（A. Zelerowicz 氏との共同研究）．

定理 1. $X \subset \{1, 2, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$（$m \geq 2$）を有限型部分シフトとし，$f : X \to X$ をその上の左シフト作用とする．さらに，$E \subset X$ を

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \mathscr{E}_x(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \infty$$

を満たすような点 x 全体からなる集合とする．このとき，

$$h_{\mathrm{top}}(E) = h_{\mathrm{top}}(X) \quad \text{かつ} \quad \dim_H(E) = \dim_H(X).$$

[27] では定理 1 について 2 つの異なる証明が与えられている（本稿では 1 の方法のみ紹介する）:

1. 1 つ目の方法は [19] のアイディアの一般化である．[19] では次を満たすような集合のクラス $\mathcal{G}^s$（$0 < s < \dim_H(X)$）が導入された : (a) $\mathcal{G}^s$ から取られた可算個の集合たちの和集合は $\mathcal{G}^s$ に属する（交叉安定），(b) $\mathcal{G}^s$ の Hausdorff 次元は s 以上．このクラスは [19] の力学系の非正則集合が最大 Hausdorff 次元を取ることの証明に用いられた．我々はまず，位相的エントロピーや Hausdorff 次元の一般化である Carathéodory 次元に関して (a) および (b) の類似が成立するような集合のクラスを導入する（2, 3 節）．その後，複雑な各点創発を持つような点全体の集合 E がこの交叉安定クラスに属することを示す．副産物として，適切な条件を満たす任意の Carathéodory 次元に対して E が最大 Carathéodory 次元を取るという，定理 1 より一般の結果が得られる（定理 13）．特にその応用として，任意の Hölder 連続なポテンシャル φ について，E が φ に関する位相的圧力の最大値を取ることが示される．
2. 2 つ目の方法は次の 2 種類の構成を組み合わせる：
   (a) Barreira-Schmeling によって [3] で与えられた，最大位相的エントロピーかつ最大 Hausdorff 次元を持つ非正則集合の部分集合 I_0 の構成．この構成の欠点は， 各点創発が高々 1 次の多項式的増大となることである : 任意の $x \in I_0$ について

   $$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \mathscr{E}_x(\epsilon)}{-\log \epsilon} = 1.$$

   (b) [24, Theorem A] で与えられた，超多項式的な各点創発を持つ点からなる通有的な集合 E_0 の構成．この構成の欠点は，位相的エントロピー 0 となることである : [24, Theorem A] と [30, Theorem 4.1] から，

   $$h_{\mathrm{top}}(E_0) = 0.$$

注意 2. [24, Theorem A] の集合 E_0 の利点は，E_0 での各点創発が超多項式であるだけでなく**最大拡張指数的**であることにある（[24, Subsection 1.4] 参照）．それゆえ我々は「E の部分集合 E_1 であって，その上で位相的エントロピーおよび Hausdorff 次元が最大であり，かつ各点創発が最大拡張指数的であるようなものが構成できるか」という問いについて非常に強い興味を持っている．

注意 3. （Hausdorff 次元に関する）定理 1 の主張からすぐに，任意の $t < \dim_H(X)$ について $m_H^t(E) > 0$ となることがわかる．ただし，m_H^t は t 次元 Hausdorff 測度である（正確な定義は 2, 4 節参照）．ゆえに Frostman の補題から，$m \in \mathcal{P}(X)$ が存在して，m の台が E に含まれ， 任意の $x \in X$ と $r > 0$ について中心が x で半径が r の球 $B(x, r)$ は $m(B(x, r)) \leq r^t$ を満たす（m の次元は t 以上）．前者の性質と (1.2) から

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \mathscr{E}_m(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \infty$$

となる．$\mathscr{E}_{\mathrm{Leb}}(\epsilon)$ の超多項式的増大の典型性に関する Berger 予想 [6] と比較されたい．

2 Carathéodory 次元

まず，[28] で Pesin によって導入された Carathéodory 次元について復習する．

2.0.1 集合と測度の Carathéodory 次元

X を集合とし，$\mathcal{F}$ を X の部分集合からなる集合（その元は**認容集合**と呼ばれる）とする．次の条件を満たす 2 つの集合関数 $\eta, \psi : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ が存在すると仮定する：

(A1) $\emptyset \in \mathcal{F}$; $\eta(\emptyset) = \psi(\emptyset) = 0$ であり任意の $U \in \mathcal{F}, U \neq \emptyset$ について $\eta(U), \psi(U) > 0$;

(A2) 任意の $\delta > 0$ について $\varepsilon > 0$ が存在して，$\psi(U) \leq \varepsilon$ となる任意の $U \in \mathcal{F}$ について $\eta(U) \leq \delta$;

(A3) 0 に収束する正数の列 $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して X を被覆する有限集合 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ が存在して，任意の $U \in \mathcal{G}$ について $\psi(U) = \epsilon_n$.

$\xi : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ を集合関数とする．条件 (A1), (A2), (A3) を満たす $\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi$ は X 上の *Carathéodory* **構造**（または短く C-**構造**）τ を定めると言い，$\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$ と書くこととする．

各 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対して $\psi(\mathcal{G}) := \sup\{\psi(U) | U \in \mathcal{G}\}$ とする．与えられた $Z \subset X$，$t \in \mathbb{R}$ および $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mathfrak{M}_C^t(Z, \varepsilon) := \inf_{\mathcal{G}, \psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U) \eta(U)^t \right\}$$

と定める．ただし下限は Z を被覆する有限または可算の部分集合族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ についてのものである．

$$m_C^t(Z) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathfrak{M}_C^t(Z, \varepsilon)$$

とする．$m_C^t(\emptyset) = 0$ であるならば $m_C^t(\cdot)$ は X の外測度となり，その可測集合からなる σ-加法族上で測度となる．この測度は t-*Carathéodory* **測度**と呼ばれる．一般にこの測度は σ-有限測度でなく，また零測度となることもある．以下は [28] で示された．

命題 4. 任意の $Z \subset X$ に対して $t_C \in \mathbb{R}$ が存在して，$t < t_C$ のとき $m^t(Z) = \infty$，$t > t_C$ のとき $m_C^t(Z) = 0$ となる（一方で $m_C^{t_C}(Z)$ は 0, ∞, 有限値のいずれにもなりうる）．

$\dim_C Z := t_C$ を集合 Z の *Carathéodory* **次元**と言う．さらに，X が可測空間であって μ がその上の測度であるとき，

$$\dim_C \mu := \inf\{\dim_C Z \colon \mu(Z) = 1\} = \lim_{\delta \to 0} \inf\{\dim_C Z \colon \mu(Z) > 1 - \delta\}$$

は μ の *Carathéodory* **次元**と呼ばれる．

2.1 Carathéodory 外測度の修正

以下ではサブシフト X の上の C-構造 $\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$ に話を限定する．$X \subset \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ は有限型のサブシフトであることを思い出す．つまり，各要素が 0 または 1 である行列 $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ が存在して，X は M に関する認容語 $x = (x_1 x_2 \ldots) \in \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ 全体の集合となっている．ここで $x = (x_1 \cdots x_n) \in \{1, \ldots, m\}^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が認容語であるとは，任意の $1 \leq j < n$ について $M_{x_j x_{j+1}} = 1$ が成り立つことを言う．語 x の長さ n を $|x|$ と書く．さらに，各認容語 $u = (u_1 \ldots u_n)$ に対して円筒集合 $C(u)$

を $C(u) = \{x \in X \mid [x]_n = u\}$ によって定める．ただし，$[x]_n$ は $x = (x_1 x_2 \ldots)$ の裁断 $[x]_n = (x_1 x_2 \ldots x_n)$ である．$\mathcal{F}$ を円筒集合全体からなる集合とする：

$$\mathcal{F} := \{\emptyset\} \cup \{C(u) \mid u \text{ is an admissible word}\}.$$

円筒集合 $C \in \mathcal{F}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$q(C,t) := \xi(C)\eta(C)^t$$

とし，$l(C)$ をある長さ n の認容語 u について $C = C(u)$ となるような最小の自然数 n とする（C の長さと呼ばれる）．

交叉安定なクラスを構成するという目的上，Carathéodory 外測度について（[19] が Hausdorff 外測度に対して行ったような）適切な修正を行うことが必要になる．この新しい外測度の利点はそれが常に有限になるということである．$\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$ を X 上の C-構造とする．各 $Z \subset X$ と $t \in \mathbb{R}$ について

$$M_C^t(Z) := \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U)\eta(U)^t \right\}$$

と定める．ただし下限は Z を被覆する有限または可算の部分集合族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ についてのものである．

注意 5. 測度 M_C^t, m_C^t は [31] で考えられている抽象的な測度のクラスの特別な例となっている．[31] の用語法を用いると, 集合関数 $q(\cdot, t)$ は前測度（[31, Definition 5]）であり, 測度 M_C^t はその前測度から Method I（[31, Theorem 4]）によって得られたものであり, m_C^t は Method II（[31, Theorem 15]）によって得られたものであると言える．

M_C^t の主要な性質は以下にまとめられる．

定理 6. 集合関数 M_C^t は次を満たす：

(1) $t \in \mathbb{R}$ のとき，$M_C^t(\emptyset) = 0$ ならば M_C^t は外測度を定め，任意の $Z \subset X$ について $M_C^t(Z) \le m_C^t(Z)$.
(2) $t > \dim_C Z$ のとき，$M_C^t(Z) = m_C^t(Z) = 0$.
(3) $t < \dim_C Z$ のとき，$0 < M_C^t(Z) < \infty$.
(4) $t = \dim_C Z$ のとき，$0 < m_C^t(Z) \le \infty$ ならば $0 < M_C^t(Z) < \infty$，$m_C^t(Z) = 0$ ならば $M_C^t(Z) = 0$.

証明. [27, Theorem 2.3] を参照されたい．

記号の簡単のため，以下混乱がない場合は m^t, M^t のように簡略化して書く．我々の議論では，C-構造がさらなる（技術的な）条件を満たすことが必要となる：

(C1) 定数 $Q_1 > 0$ が存在して，任意の $t < \dim_C(X)$ と円筒集合 C について円筒集合 $\tilde{C}^t$ が存在して $C \subseteq \tilde{C}^t$ であり，

$$Q_1 q(\tilde{C}^t, t) \le M^t(C) \le \min\{q(C,t), q(\tilde{C}^t, t)\};$$

(C2) 任意の $t < \dim_C(X)$ について $m = m(t) \in \mathbb{N}$ が存在して，長さが m の倍数であるような任意の円筒集合 C について，長さが m の倍数である円筒集合 $\tilde{C}_m^t$ が存在して $C \subseteq \tilde{C}_m^t$ であり，

$$N_m^t(C) = q(\tilde{C}_m^t, t);$$

(C3) 定数 $Q_3 > 1$ が存在して， uv が認容語になるような任意の 2 つの語 u, v および $t \in \mathbb{R}$ について

$$Q_3^{-1} q(C(u), t) q(C(v), t) \le q(C(uv), t) \le Q_3 q(C(u), t) q(C(v), t);$$

(C4) 任意の 2 つの円筒集合 $A \subset B$ について $\eta(A) \le \eta(B)$.

3　交叉安定クラス

前述の通り，定理 1 は（複雑な各点創発を持つ点全体の集合である）E がある**交叉安定クラス**（*large intersection class*）に属しているというより強い結果から導かれる．Färm-Persson [19] は Falconer [18] の交叉安定クラスの一般化を考えたが，我々は次のように更なる一般化を考える．

定義 7. 各 $t < \dim_C(X)$ について，$\mathcal{G}^t(X)$ を G_δ-集合 $F \subset X$ であって，任意の円筒集合 C について

$$M^t(F \cap C) = M^t(C)$$

を満たすようなもの全体からなる集合とする．

以下で与えられる，このクラスに関する 1 つ目の主定理は [19, Theorem 1] の拡張である．

定理 8. *考えている Carathéodory 構造が条件 $(C1)$ および $(C4)$ を満たすとする．このとき，クラス $\mathcal{G}^t(X)$ は可算個の共通部分を取るという操作について閉じていて，さらにこのクラスに属する任意の集合の Carathéodory 次元は t 以上となる．*

注意 9. 交叉安定性の重要な応用として，Färm-Persson は可算個の**異なる**力学系の非正則集合の共通部分の Hausdorff 次元を計算した（[20, Proposition 1]）．

定理 8 の証明については [27] の 5 節を参照されたい．以下の補題から，後半の Carathéodory 次元に関する主張は定義 7 からの簡単な帰結であることがわかる．

補題 10. *$F \in \mathcal{G}^t(X)$ のとき，$\dim_C(F) \geq t$.*

証明. $t < \dim_C(X)$ であるので，定理 6 の (3) から $M^t(X) > 0$ となる．ゆえに円筒集合 C が存在して $M^t(C) > 0$ となる．定義 7 から $M^t(F) > 0$ である．したがって，定理 6 の (2) から $\dim_C(F) \geq t$ を得る．

$\mathcal{A}_x$ を $\{\delta_x^n\}_{n\geq 1}$ の集積点全体からなる集合とする．X 上の確率測度の列 $\mathcal{J} = \{\mu^{(\ell)}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ に対して，$\Delta(\mathcal{J})$ を

$$\Delta(\mathcal{J}) = \bigcup_{L\geq 1} \Delta_L(\mathcal{J}), \quad \Delta_L(\mathcal{J}) = \{\mu_{\mathbf{t}}(\mathcal{J}) \mid \mathbf{t} \in A_L\}$$

によって定める．ただし，$A_L = \left\{(t_0, t_1, \ldots, t_L) \in [0,1]^{L+1} \mid \sum_{\ell=0}^{L} t_\ell = 1\right\}$ であり，各 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_L) \in A_L$ に対して $\mu_{\mathbf{t}}(\mathcal{J}) = \sum_{\ell=0}^{L} t_\ell \mu^{(\ell)}$ である．さらに $\mathcal{J}$ の**飽和集合** $E(\mathcal{J})$ を

$$E(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \Delta(\mathcal{J}) \subset \mathcal{A}_x\}$$

によって定める（[16, 30] 参照）．また，X 上の確率測度 μ に対してその**通有集合** $G(\mu)$ を

$$G(\mu) = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} \delta_x^n = \mu\}$$

によって定める．次の結果は [19, Theorem 2] の拡張となっている．

定理 11. *考えている Carathéodory 構造は条件 $(C1) - (C4)$ を満たすとする．このとき任意のエルゴード的不変確率測度の列 $\mathcal{J} = \{\mu^{(\ell)}\}_{\ell\geq 0}$ について以下が成り立つ：*

(1) *任意の $t < \inf\left\{\dim_C(\mu^{(\ell)}) \mid \ell \geq 0\right\}$ について $E(\mathcal{J}) \in \mathcal{G}^t$;*

(2) $\dim_C(E(\mathcal{J})) \geq \inf\left\{\dim_C(\mu^{(\ell)}) \mid \ell \geq 0\right\}$.

定理 11 の証明については [27] の 6 節参照．定理 11 の (2) は Chen-Zhou [16, Theorem 1.2] による飽和集合の位相的圧力に関する結果の特別な場合の証明を与えている．ただし証明の手法は大きく異なり，特に，(2) での Hausdorff 次元に関する下からの評価や (1) での交叉安定性が彼らの手法から得られるかは不明である．

以上の定理を用いると，定理 1 は以下の命題からすぐに得られる．

命題 12. $\mathcal{J} = \{\mu^{(\ell)}\}_{\ell \geq 0}$ を線型独立な X 上の不変確率測度の列とする．このとき，任意の $x \in E(\mathcal{J})$ について

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \mathscr{E}_x(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \infty.$$

証明．[27, Proposition 3.5] を参照されたい．

次の定理はこの節のまとめであり（定理 8, 11, 命題 12 より），本稿の主結果を与える．

定理 13. *X, f, E を定理 1 の通りとする．考えている Carathéodory 構造は条件 $(C1)-(C4)$ を満たし，さらに次を満たすとする：*

(C5) 任意の $t < \dim_C(X)$ に対して線型独立な X 上の不変確率測度の列 $\{\mu^{(\ell)}\}_{\ell \geq 0}$ が存在して，任意の $\ell \geq 0$ について $\dim_C(\mu^{(\ell)}) > t$.

このとき，任意の $t < \dim_C(X)$ について集合 $E_t \subset E$ が存在して，$E_t \in \mathcal{G}^t$ となる．特に，

$$\dim_C(E) = \dim_C(X).$$

最後に定理 1 の証明を与える：4 節で位相的エントロピー，Hausdorff 次元，位相的圧力に対応する C-構造はすべて条件 $(C1)$-$(C4)$ を満たすことが示される．これらの C-構造がさらに条件 $(C5)$ も満たすことは [3, Theorem 6.6] から従う．したがって，定理 1 は定理 13 からただちに導かれる．

4　応用

4.1　位相的圧力

Hölder 連続関数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ を固定し，以下で定義される（X 上の）C-構造 $\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$ を考える：与えられた円筒集合 C に対して，

$$\xi(C) := \exp\left(S_{l(C)}\varphi(C)\right) := \exp\left(\sup_{x \in C} \sum_{k=0}^{l(C)-1} \varphi(f^k(x))\right),$$
$$\eta(C) := e^{-l(C)}, \quad \psi(C) := \frac{1}{l(C)}$$

と定め，さらに $\eta(\emptyset) = \psi(\emptyset) = \xi(\emptyset) = 0$ とする．この $\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi$ たちが条件 (A1), (A2), (A3) を満たすことを確認することは簡単なので，これらは X 上の Carathéodory 次元を導く．対応する外測度たちは，

$$\mathfrak{M}_C^t(Z, 1/n) := \inf\left\{\sum_i e^{S_{l(C_i)}\varphi(C_i) - l(C_i)t} \mid l(C_i) \geq n, Z \subset \bigcup_i C_i\right\},$$

$$m_C^t(Z) := \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \sum_i e^{S_{l(C_i)}\varphi(C_i) - l(C_i)t} \mid l(C_i) \geq n, Z \subset \bigcup_i C_i \right\},$$

$$M_C^t(Z) := \inf \left\{ \sum_i e^{S_{l(C_i)}\varphi(C_i) - l(C_i)t} \mid Z \subset \bigcup_i C_i \right\}$$

となる．対応する集合 Z の Carathéodory 次元は（Pesin-Pitskel [29] の意味での）Z 上の位相的圧力 $P(\varphi, Z)$ と一致する．$P = P(\varphi) := P(\varphi, X) = \dim_C(X)$ と書く．さらに，$\varphi = 0$ のとき $P(\varphi)$ は位相的エントロピーと一致することに注意されたい．

補題 14. 上記の *Carathéodory* 構造は条件 $(C1) - (C4)$ を満たす．

証明．[27, Lemma 4.1] を参照されたい．

4.2 Hausdorff 次元

定理 13 は Hausdorff 次元にも適用することができる．実際，任意の円筒集合 C について $\xi(C) = 1$，$\eta(C)$ を C の半径，$\psi(C) = 1/l(C)$ とすれば，これらは Carathéodory-構造を定め，さらに条件 $(C1) - (C4)$ を満たすことが容易に確認できる．

参考文献

[1] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, *Nonuniform hyperbolicity for C^1-generic diffeomorphisms*, Israel Journal of Mathematics **183** (2011), 1–60.

[2] V. Araújo, V. Pinherio, *Abundance of wild historic behavior*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series (2019), 1–36.

[3] L. Barreira, J. Schmeling, *Sets of "non-typical" points have full topological entropy and full Hausdorff dimension*, Israel Journal of Mathematics **116** (2000), 29–70.

[4] L. Barreira, J. Li, C. Valls, *Topological entropy of irregular sets*, Revista Matemática Iberoamericana **34** (2018), 853–878.

[5] P. Barrientons, S. Kiriki, Y. Nakano, A. Raibekas, T. Soma, *Historic behavior in non-hyperbolic homoclinic classes*, Proceedings of the American Mathematical Society **148** (2020), 1195–1206.

[6] P. Berger, *Emergence and non-typicality of the finiteness of the attractors in many topologies*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **297** (2017), 1–27.

[7] P. Berger, *Complexities of differentiable dynamical systems*, Journal of Mathematical Physics (2020).

[8] P. Berger, S. Biebler, *Emergence of wandering stable components*, arXiv preprint arXiv:2001.08649 (2020).

[9] P. Berger, J. Bochi, *On Emergence and Complexity of Ergodic Decompositions*, arXiv preprint arXiv:1901.03300 (2019).

[10] T. Bomfim, P. Varandas, *Multifractal analysis for weak Gibbs measures: from large deviations to irregular sets*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **37** (2017), 79–102.

[11] R. Bowen, *Topological entropy for noncompact sets*, Transactions of the American Mathematical Society **184** (1973), 125–136.

[12] Y. Cao, L. Zhang, Y. Zhao, *The asymptotically additive topological pressure on the irregular set for asymptotically additive potentials*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **74** (2011), 5015–5022.

[13] E. Catsigeras, X. Tian, E. Vargas, *Topological entropy on points without physical-like behaviour*, Mathematische Zeitschrift (2015), 1–13.

[14] E. Chen, T. Küpper, L. Shu, *Topological entropy for divergence points*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2005), 1173–1208.

[15] E. Chen, Y. Ji, X. Zhou, *Entropy and Emergence of Topological Dynamical Systems*, arXiv preprint arXiv:2005.01548 (2020).

[16] E. Chen, X. Zhou, *Multifractal analysis for the historic set in topological dynamical systems*, Nonlinearity **26** (2013), 1975–1997.

[17] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund, Ergodic theory on compact spaces, Lecture Notes in Mathematics 527, Springer-Verlag, 1976.

[18] K. J. Falconer, *Sets with large intersection properties*, Journal of the London Mathematical Society **49** (1994), 267–280.

[19] D. Färm, T. Persson, *Large intersection classes on fractals*, Nonlinearity **24** (2011), 1291–1309.

[20] D. Färm, T. Persson, *Non-typical points for β-shifts*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Mathematics **61** (2013), 123–132.

[21] B. Hasselblatt, Z. Nitecki, J. Propp, *Topological entropy for non-uniformly continuous maps*, Discrete & Continuous Dynamical Systems-A **22** (2008), 201–213.

[22] F. Hofbauer, G. Keller, *Quadratic maps without asymptotic measure*, Communications in mathematical physics **127** (1990), 319–337.

[23] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, **54**, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1995.

[24] S. Kiriki, Y. Nakano, T. Soma, *Emergence via non-existence of averages*, arXiv preprint arXiv:1904.03424 (2019).

[25] S. Kiriki, T. Soma, *Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains*, Advances in Mathematics **306** (2017), 524–588.

[26] Y. Nakano, K. Yamamoto, *Irregular sets for piecewise monotonic maps*, arXiv preprint arXiv:1912.12081 (2019).

[27] Y. Nakano, A. Zelerowicz, *Highly irregular orbits for subshifts of finite type: large intersections and emergence*, arXiv preprint arXiv:2009.00182 (2020).

[28] Ya. Pesin, Dimension theory in dynamical systems: Contemporary Views and Applications, University of Chicago Press, 1997.

[29] Y. Pesin, B. Pitskel', *Topological pressure and the variational principle for noncompact sets*, Functional Analysis and its Applications **18** (1984), 307–318.

[30] C-E. Pfister, W. G. Sullivan, *On the topological entropy of saturated sets*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **27** (2007), 929–956.

[31] C. A. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge University Press, 1970.

[32] D. Ruelle, *Historical behaviour in smooth dynamical systems*, Global Analysis of Dynamical Systems (eds. H. W. Broer et al), Institute of Physics Publishing (2001), 63–66.

[33] K. Sigmund, *On dynamical systems with the specification property*, Transactions of the American Mathematical Society (190), 285-299.

[34] F. Takens, *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages*, Nonlinearity **21** (2008), 33–36.

[35] A. Talebi, *Non-statistical rational maps*, arXiv preprint arXiv:2003.02185 (2020).

[36] D. Thompson, *The irregular set for maps with the specification property has full topological pressure*, Dynamical Systems **25** (2010), 25–51.

[37] D. Thompson, *Irregular sets, the β-transformation and the almost specification property*, Transactions of the American Mathematical Society **364** (2012), 5395–5414.

[38] X. Tian, *Topological pressure for the completely irregular set of Birkhoff averages*, Discrete & Continuous Dynamical Systems-A **37** (2017), 2745–2763.

[39] C. Villani, Topics in optimal transportation, American Mathematical Soc., 2003.

[40] C. Villani, Optimal transport: old and new, Springer Science & Business Media, 2008.

[41] D. Yang, *On the historical behavior of singular hyperbolic attractors*, Proceedings of the American Mathematical Society **148** (2020), 1641–1644.