New Duality in $\mathcal{W}$-algebras

アルバータ大学　元良 直輝
Naoki Genra
University of Alberta

1　頂点代数

[FBZ, K] にしたがって頂点代数の基本的な定義や性質を説明する．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V がスーパーベクトル空間であるとは，V が $\mathbb{Z}_2$ 次数付けされている，すなわち $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ ($\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$) のような分解をもつことである．このとき $A \in V_{\bar{i}}$ に対して次数 $\bar{i} \in \mathbb{Z}_2$ を A のパリティと呼び，$\bar{i} = \bar{0}$ のとき偶（even），$\bar{i} = \bar{1}$ のとき奇（odd）という．$\operatorname{End} V$ は V の次数付けから自然な次数付け，すなわち $(\operatorname{End} V)_{\bar{0}} = \operatorname{End} V_{\bar{0}} \oplus \operatorname{End} V_{\bar{1}}$, $(\operatorname{End} V)_{\bar{1}} = \operatorname{Hom}(V_{\bar{0}}, V_{\bar{1}}) \oplus \operatorname{Hom}(V_{\bar{1}}, V_{\bar{0}})$ が誘導されスーパーベクトル空間になる．さらに $\operatorname{End} V$ はスーパー括弧積 $[A, B] = A \circ B - (-1)^{\bar{A}\bar{B}} B \circ A$ によってスーパー Lie 代数の構造をもつ．ただし $\bar{A}$ は A のパリティである．（スーパー）ベクトル空間 V が（スーパー）頂点代数であるとは，0 でない偶ベクトル $|0\rangle \in V$, 偶線形写像 $\partial \in \operatorname{End} V$ さらに偶線形写像

$$Y(\cdot, z) \colon V \in A \mapsto Y(A, z) = A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \in \operatorname{End} V[\![z, z^{-1}]\!]$$

が存在し，次のような条件を満たす：

1. 任意の $A, B \in V$ に対し，$A(z)B = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} B\ z^{-n-1} \in V(\!(z)\!)$.
2. $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{Id}_V$．また任意の $A \in V$ に対し $A(z)|0\rangle \in V[z]$ であって，$A(z)|0\rangle|_{z=0} = A$.
3. $\partial|0\rangle = 0$．また任意の $A \in V$ に対し $[\partial, A(z)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\partial, A_{(n)}] z^{-n-1} = \partial_z A(z)$.
4. 任意の $A, B \in V$ に対し，ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し，

$$(z - w)^N [A(z), B(w)] = (z - w)^N \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} [A_{(m)}, B_{(n)}] z^{-m-1} w^{-n-1} = 0.$$

$|0\rangle$ を V の真空ベクトル，∂ を V の変換作用素，$Y(\cdot, z)$ を V の頂点作用素という．1. の条件を満たす $\operatorname{End} V$ 値の形式的べき級数 $A(z)$ を V 上の場と呼ぶ．2 つの場 $A(z)$ と $B(z)$ に対して 4. の条件が成り立つとき $A(z)$ と $B(z)$ は局所的であるという．2. の条件から $Y(\cdot, z)$ は単射であることがわかる．また $Y(\partial A, z) = \partial_z A(z)$ かつ $\partial A = A_{(-2)}|0\rangle$ であることも導出される．さらに任意の $A, B \in V$ に対し，ある N が存在して

$$[A(z), B(w)] = \sum_{n=0}^{N} \frac{Y(A_{(n)}B, w)}{(z - w)^{n+1}} \bigg|_{|z| > |w|}$$

が成り立つ．このとき

$$A(z)B(w) \sim \sum_{n=0}^{N} \frac{Y(A_{(n)}B, w)}{(z - w)^{n+1}}$$

と表し $A(z)$ と $B(w)$ の OPE（Operator Product Expansion）という．任意の $A,B\in V$ に対し，

$$:A(z)B(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\geq 0}A_{(n-m)}B_{(m)}+(-1)^{\bar{A}\bar{B}}\sum_{m<0}B_{(m)}A_{(n-m)}\right)z^{-n-2}$$

を $A(z)$ と $B(z)$ の NOP（Normally Ordered Product）という．1. および 4. の条件から $:A(z)B(z):$ は well-defined な場であることがわかる．一般に任意の $A^1,\dots,A^s\in V$ に対し $:A^1(z)A^2(z)\cdots A^s(z):=:A^1(z)(:A^2(z)\cdots A^s(z):):$ と帰納的に定義する．すると任意の $A^1,\dots,A^s\in V$ および $n_1,\dots,n_s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，

$$Y(A^1_{(-n_1)}\cdots A^s_{(-n_s)}|0\rangle,z)=\frac{:\partial_z^{n_1-1}A^1(z)\cdots\partial_z^{n_s-1}A^s(z):}{(n_1-1)!\cdots(n_s-1)!}\tag{1.1}$$

が成り立つ．逆に（スーパー）ベクトル空間 V の 0 でない偶ベクトル $|0\rangle$，パリティをもつ V の可算部分集合 S，そして任意の $A\in S$ に対し A と同じパリティをもつ V 上の場 $A(z)$ たちであって次の条件を満たすものが存在すると仮定する：

1. 任意の $A\in S$ に対し，$A(z)|0\rangle\in V[z]$ かつ $A(z)|0\rangle|_{z=0}=A$.
2. 任意の $A,B\in S$ に対し，$A(z)$ と $B(z)$ は局所的.
3. $V=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{A^1_{(-n_1)}\cdots A^s_{(-n_s)}|0\rangle\mid A^1,\dots,A^s\in S,\ n_1,\dots,n_s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\}$.

このとき任意の V の元 $A^1_{(-n_1)}\cdots A^s_{(-n_s)}|0\rangle$（$A^1,\dots,A^s\in S$，$n_1,\dots,n_s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$）の頂点作用素による行き先を (1.1) によって定義することで V が（スーパー）頂点代数の構造をもつことが証明できる（再構成定理）．ただし変換作用素は $\partial A=A_{(-2)}|0\rangle$ で定義される．このとき V は $A(z)$（$A\in S$）たちで生成される（スーパー）頂点代数という．

$(z-w)^{-1}$ の $|z|>|w|$ および $|z|<|w|$ の領域での展開はそれぞれ

$$\left.\frac{1}{z-w}\right|_{|z|>|w|}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}w^n,\quad \left.\frac{1}{z-w}\right|_{|z|<|w|}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}z^{-n-1}w^n$$

である．これを用いて $V[\![z,w]\!][z^{-1},w^{-1},(z-w)^{-1}]$ の元をそれぞれ $V(\!(z)\!)(\!(w)\!)$，$V(\!(w)\!)(\!(z)\!)$ に埋め込むことができる．これは z,w 上の形式的な有理関数のなす環の w 進位相および z 進位相による完備化に他ならない．同様にして $|w|>|z-w|$ の領域で z^{-1} を展開する式を用いることで $V[\![z,w]\!][z^{-1},w^{-1},(z-w)^{-1}]$ の元を $V(\!(w)\!)(\!(z-w)\!)$ に埋め込むことができ，これは $w,z-w$ 上の形式的な有理関数のなす環の $z-w$ 進位相による完備化になる．これまで述べた（スーパー）頂点代数の性質は次に述べる性質として集約される：

- 任意の $A,B,C\in V$ に対し，ある $V[\![z,w]\!][z^{-1},w^{-1},(z-w)^{-1}]$ の元であって，$V[\![z,w]\!][z^{-1},w^{-1},(z-w)^{-1}]$ の異なる完備化による埋め込みの像がそれぞれ

$$\begin{aligned}Y(A,z)Y(B,w)C&\in V(\!(z)\!)(\!(w)\!),\\(-1)^{\bar{A}\bar{B}}Y(B,w)Y(A,z)C&\in V(\!(w)\!)(\!(z)\!),\\Y(Y(A,z-w)B,w)C&\in V(\!(w)\!)(\!(z-w)\!)\end{aligned}$$

　となるようなものが存在する．

より標語的には，「$Y(A,z)Y(B,w)C$，$(-1)^{\bar{A}\bar{B}}Y(B,w)Y(A,z)C$，$Y(Y(A,z-w)B,w)C$ の 3 つの元は $V[\![z,w]\!][z^{-1},w^{-1},(z-w)^{-1}]$ において一致する」と表現できる．これを（スーパー）頂点代数の結合性という．この性質をもとに（スーパー）頂点代数の表現が定義される．すなわち，（スーパー）ベクトル空間 M が（スーパー）頂点代数 V の表現であるとは，V の元を M 上の場に写す偶線型写像 $Y_M(\cdot,z)\colon V\to\mathrm{End}\,M[\![z,z^{-1}]\!]$ が存在し，次の条件を満たすことである：

- $Y_M(|0\rangle, z) = \mathrm{Id}_M$.
- 任意の $A, B \in V$ および任意の $C \in M$ に対し，ある $M[\![z,w]\!][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の元であって，$M[\![z,w]\!][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の異なる完備化による埋め込みの像がそれぞれ

$$\begin{aligned} Y_M(A,z)Y_M(B,w)C &\in M(\!(z)\!)(\!(w)\!), \\ (-1)^{\bar{A}\bar{B}} Y_M(B,w)Y_M(A,z)C &\in M(\!(w)\!)(\!(z)\!), \\ Y_M(Y(A,z-w)B,w)C &\in M(\!(w)\!)(\!(z-w)\!) \end{aligned}$$

  となるようなものが存在する．

記号の濫用ではあるが，V の表現 M が定める頂点作用素 Y_M を V の定める頂点作用素と同じ記号 Y で表すことが多く，ここでもそのルールに従うこととする．

2 頂点代数の例

以下では (スーパー) 頂点代数およびその表現の例について述べる．Virasoro 代数 $\mathrm{Vir} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$ とは

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}C, \quad [C, \mathrm{Vir}] = 0$$

で定義される無限次元の Lie 代数である．Vir の部分代数 $\mathrm{Vir}_+ = \bigoplus_{n\geq -1} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_c$ を $L_n = 0$（$n \geq -1$），$C = c \in \mathbb{C}$ で定義する．$\mathbb{C}_c$ が誘導する Vir の表現を

$$V^c = U(\mathrm{Vir}) \underset{U(\mathrm{Vir}_+)}{\otimes} \mathbb{C}_c$$

と表す．このとき $U(\mathrm{Vir})$ の PBW 基底を用いて $U(\mathrm{Vir}) \simeq U(\mathrm{Vir}_-) \otimes U(\mathrm{Vir}_+)$ と分解できる．ただし $\mathrm{Vir}_- = \bigoplus_{n\leq -2} \mathbb{C}L_n$ である．この分解を用いることでベクトル空間としての同型 $V^c \simeq U(\mathrm{Vir}_-)|0\rangle$ が誘導される．ただし $|0\rangle = 1 \otimes 1$ である．すると V^c は $|0\rangle$ を真空ベクトルとする，

$$L(z) = Y(L_{-2}|0\rangle, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

で生成される頂点代数の構造をもつ．実際，$L(z)$ は自分自身と局所的であり

$$L(z)L(w) \sim \frac{\partial L(w)}{z-w} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{c/2}{(z-w)^4}$$

なる OPE 関係式を満たす．V^c を中心電荷 c の Virasoro 頂点代数という．

$\mathfrak{g}$ を複素有限次元単純 (スーパー) Lie 代数であって非退化 (スーパー) 対称不変偶双線形形式 $(\cdot|\cdot)$ をもつものとする (スーパーでなければ Killing 形式のスカラー倍をとればよい)．今は $(\theta|\theta) = 2$ を満たすよう正規化しておく．ここで θ は $\mathfrak{g}$ の最高ルートである．このときアファイン（スーパー）Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ が

$$[u_{(m)}, v_{(n)}] = [u, v]_{(m+n)} + m(u|v)\delta_{m+n,0}K, \quad u, v \in \mathfrak{g}; \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0$$

によって定義される．ただし $u_{(m)} = ut^m$ を表す．$\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_k$ を $K = k \in \mathbb{C}$，$\mathfrak{g}[t] = 0$ によって定義する．すると誘導表現

$$V^k(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \underset{U(\widehat{\mathfrak{g}}_+)}{\otimes} \mathbb{C}_k \simeq U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$$

は $|0\rangle = 1 \otimes 1$ とする，

$$u(z) = Y(u_{(-1)}|0\rangle, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{(n)} z^{-n-1}, \quad u \in \mathfrak{g}$$

によって生成される（スーパー）頂点代数の構造をもつ．実際，$u(z)$ たちは互いに局所的であり

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u,v](w)}{z-w} + \frac{k(u|v)}{(z-w)^2}, \quad u, v \in \mathfrak{g}$$

なる OPE 関係式を満たしている．$V^k(\mathfrak{g})$ をレベル k のアファイン（スーパー）頂点代数という．この定義は $\mathfrak{g}$ が簡約（スーパー）Lie 代数の場合に自然に拡張される．$\mathfrak{g}$ が単純のとき，$h^\vee$ を $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数，$\mathfrak{g}$ の基底を $\{u_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$，$(\cdot|\cdot)$ に関する双対基底を $\{u^i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ とする．$k + h^\vee \neq 0$ のとき，$V^k(\mathfrak{g})$ 上の場 $L^{\mathfrak{g}}(z)$ を

$$L^{\mathfrak{g}}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L^{\mathfrak{g}}_n z^{-n-2} = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} (-1)^{\bar{u}_i} :u^i(z)u_i(z):$$

で定義する．このとき $L^{\mathfrak{g}}_0$ は $V^k(\mathfrak{g})$ 上半単純で，$L^{\mathfrak{g}}_{-1} = \partial$ が成り立ち，さらに $L^{\mathfrak{g}}_n$ たちは中心電荷 $c(k) = k\,\mathrm{sdim}\,\mathfrak{g}/(k+h^\vee)$ の Virasoro 代数の関係式を満たす．したがって $V^k(\mathfrak{g})$ は中心電荷 $c(k)$ の Virasoro 頂点代数の表現になる．Virasoro 頂点代数の表現を与えるような場を含む（スーパー）頂点代数を共形的，Virasoro 頂点代数の表現を与える場を共形場という．よって $V^k(\mathfrak{g})$ は $k + h^\vee \neq 0$ のとき共形的であり，$L^{\mathfrak{g}}(z)$ はその共形場であることがわかる．E を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする．このとき E は $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ の表現に $K = k \in \mathbb{C}$，$\mathfrak{g}[t]t = 0$ によって拡張される．すると誘導表現

$$V^k(E) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \underset{U(\widehat{\mathfrak{g}}_+)}{\otimes} E$$

は自然に $V^k(\mathfrak{g})$ の表現になる．$V^k(E)$ を E から誘導される Weyl 表現という．

$\mathfrak{c}$ を対称双線形形式をもつ可換な Lie 代数とすると $U(\widehat{\mathfrak{c}})$ は $\mathfrak{c}$ に付随する Heisenberg 代数と呼ばれ，$\pi^k := V^k(\mathfrak{c})$ を $\mathfrak{c}$ に付随するレベル k の Heisenberg 頂点代数という．任意の $\lambda \in \mathfrak{c}$ に対して，$\mathfrak{c}$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_\lambda$ を $\mathfrak{c} \ni \mu \mapsto (\lambda|\mu) \in \mathbb{C}$ で定義する．そのとき $\mathbb{C}_\lambda$ が誘導する π^k の表現を最高ウェイト λ の Fock 表現と呼び，π^k_λ で表す．有限ランクの整数格子 L に対し，$\mathfrak{c} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に付随するレベル 1 の Heisenberg 頂点代数 π を考える．π の Fock 表現たちの直和

$$V_L = \bigoplus_{\lambda\in L} \pi_\lambda$$

にスーパーベクトル空間の構造を，π_λ のパリティが $(\lambda|\lambda)$ mod.(2) となるように与える．すると V_L は π の表現の構造を自然に拡張して（スーパー）頂点代数の構造をもつ．その際，π_λ の最高ウェイトベクトル $|\lambda\rangle$ に対応する場は

$$Y(|\lambda\rangle, z) = \mathrm{e}^\lambda(z) := S_\lambda z^{\lambda_{(0)}} \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{\lambda_{(n)} z^{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{\lambda_{(n)} z^{-n}}{n}\right)$$

で定義される．ただし S_λ は任意の $\mu_{(n)}$（$\mu \in L, n \neq 0$）と可換かつ $S_\lambda|\mu\rangle = |\lambda + \mu\rangle$ を満たす作用素である．V_L を L に付随する（スーパー）格子頂点代数と呼ぶ．

$\mathfrak{u}$ を有限次元（スーパー）ベクトル空間，$\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ をパリティ次数をもつ $\mathfrak{u}$ の基底とする．$\mathrm{Cl}(\mathfrak{u})$ を，u_α と異なるパリティをもつ元 $\varphi_{\alpha,n}, \varphi^\alpha_n$（$\alpha \in I, n \in \mathbb{Z}$）によって生成され，

$$[\varphi_{\alpha,m}, \varphi^\beta_n] = \delta_{m+n,-1}, \quad [\varphi_{\alpha,m}, \varphi_{\beta,n}] = [\varphi^\alpha_m, \varphi^\beta_n] = 0, \quad \alpha, \beta \in I,\ m, n \in \mathbb{Z}$$

なる関係式を満たす（スーパー）$\mathbb{C}$ 代数として定義する．$\mathrm{Cl}(\mathfrak{u})$ の Fock 表現を $\varphi_{\alpha,n}|0\rangle = \varphi^\alpha_{n+1}|0\rangle = 0$ なる偶ベクトル $|0\rangle$ によって生成される表現として定義し，$\Lambda(\mathfrak{u})$ で表す．このとき $\Lambda(\mathfrak{u})$ は

$$Y(\varphi_{\alpha,-1}|0\rangle, z) = \varphi_\alpha(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_{\alpha,n} z^{-n-1}, \quad Y(\varphi^\alpha_0|0\rangle, z) = \varphi^\alpha(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^\alpha_n z^{-n}, \quad \alpha \in I$$

によって生成される（スーパー）頂点代数の構造をもつ．実際，$\varphi_\alpha(z), \varphi^\alpha(z)$ たちは互いに局所的であり，

$$\varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(w) \sim \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w}, \quad \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(w) \sim 0 \sim \varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(w), \quad \alpha,\beta \in I$$

なる OPE 関係式を満たしている．

3 $\mathcal{W}$ 代数

[?] にしたがって $\mathcal{W}$ 代数の定義を説明する．$\mathfrak{g}$ を非退化 (スーパー) 対称不変偶双線形形式 $(\cdot|\cdot)$ をもつ複素有限次元単純 (スーパー) Lie 代数，f をパリティが偶のベキ零元とする．双線形形式は $(\theta|\theta) = 2$ となるように正規化する（θ は $\mathfrak{g}$ の最高ルート）．$\mathfrak{g}$ の f に関する good な次数付けとは $\mathfrak{g}$ の $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 次数付け $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ であって次の条件を満たすものである：

- 任意の $i, j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$．
- $f \in \mathfrak{g}_{-1}$．
- 線型写像 $\mathrm{ad}(f)\colon \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j-1}$ は $j \geq \frac{1}{2}$ のとき単射かつ $j \leq \frac{1}{2}$ のとき全射.

Jacobson-Morozov の定理から f を含む $\mathfrak{sl}_2$ 三つ組 $\{e, h, f\}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合としてとれる．このとき $\mathrm{ad}(\frac{1}{2}h)$ は $\mathfrak{g}$ の f に関する good な次数付けを与えるので，good な次数付けはいつでも存在する．今，$\mathfrak{g}$ が good な $\mathbb{Z}$ 次数付け

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

が存在することを仮定する．$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}_0$ に含まれるようにとる．このとき，$\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数を $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ に含まれるようにとることができる．Δ を $\mathfrak{g}$ のルート系，Δ_+ を正ルートの集合，Π を単純ルートの集合とする．任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し，$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}$，$\Pi_j = \Pi \cap \Delta_j$ とおくと，$\Delta_+ \subset \Delta_{\geq 0}$ かつ $\Pi = \Pi_0 \sqcup \Pi_1$ が成り立つ．スーパー頂点代数

$$C^k(\mathfrak{g}, f) := V^k(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_{>0})$$

および $C^k(\mathfrak{g}, f)$ 上の奇な場

$$d(z) = \sum_{\alpha\in\Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}}(e_\alpha(z) + (f|e_\alpha)) \otimes \varphi^\alpha(z) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} c^\gamma_{\alpha,\beta} \otimes :\varphi_\gamma(z)\varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(z):$$

を考える．ただし e_α は α に対応するルートベクトル, $\bar{\alpha}$ は e_α のパリティ, $c^\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ は $[e_\alpha, e_\beta] = \sum_{\gamma\in\Delta_{>0}} c^\gamma_{\alpha,\beta} e_\gamma$ で定義される構造定数である．このとき $d(z)d(w) \sim 0$ が成り立ち，特に $d^2_{(0)} = 0$ がわかる．$\Lambda(\mathfrak{g}_{>0})$ に電荷次数を $\deg \varphi^\alpha(z) = 1 = -\deg \varphi_\alpha(z)$ で定義し，電荷次数に関する次数付けを $\Lambda(\mathfrak{g}_{>0}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda(\mathfrak{g}_{>0})_j$ で表す．$C^k(\mathfrak{g}, f)$ に電荷次数による次数付けを $\deg V^k(\mathfrak{g}) = 0$ で誘導し，$C^k(\mathfrak{g}, f)_j = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_{>0})_j$ とおく．このとき $d(z)$ の定義から $d_{(0)} \cdot C^k(\mathfrak{g}, f)_j \subset C^k(\mathfrak{g}, f)_{j+1}$ がわかる．したがって $(C^k(\mathfrak{g}, f), d_{(0)})$ は電荷次数に関してコチェイン複体の構造をもち，そのコホモロジーを

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H^\bullet(C^k(\mathfrak{g}, f), d_{(0)})$$

で表す．$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は $C^k(\mathfrak{g}, f)$ から誘導される（スーパー）頂点代数の構造をもち，$\mathfrak{g}, f$ に付随するレベル k の $\mathcal{W}$ 代数という．任意の $u \in \mathfrak{g}$ に対し，$C^k(\mathfrak{g}, f)$ 上の場 $J^u(z)$ を

$$J^u(z) = u(z) \otimes 1 + \sum_{\alpha,\beta\in\Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}} c^\alpha_{u,\beta} \otimes :\varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(z):$$

で定義する．ただし $c_{u,\beta}^{\alpha}$ は $[u, e_\beta]$ に表れる e_α の係数として定義される定数である．もし $u, v \in \mathfrak{g}_{\geq 0}$ または $u, v \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$ であれば，$J^u(z)$ と $J^v(w)$ は

$$J^u(z)J^v(w) \sim \frac{J^{[u,v]}(w)}{z-w} + \frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

なる OPE 関係式を満たす．ただし τ_k は

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

で定義される $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ または $\mathfrak{g}_{\leq 0}$ 上の不変双線形形式である．ここで $\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式を表す．特に $J^u(z)$（$u \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$）で生成されるスーパー頂点部分代数は $\mathfrak{g}_{\leq 0}$ に付随するレベル τ_k のアファイン（スーパー）頂点代数と同型であり，これを $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0})$ で表す．C_-^k を $\varphi_\alpha(z)$，$d_{(0)} \cdot \varphi_\alpha(z) = J^{e_\alpha}(z) + (f|e_\alpha)$（$\alpha \in \Delta_{>0}$）で生成されるスーパー頂点部分代数，$C_+^k$ を $J^u(z)$（$u \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$），$\varphi^\alpha(z)$（$\alpha \in \Delta_{>0}$）で生成される（スーパー）頂点部分代数とすると，スーパーベクトル空間として $C^k(\mathfrak{g}, f) \simeq C_-^k \otimes C_+^k$ かつ $(C_\pm^k, d_{(0)})$ は部分複体になっている．したがって $C^k(\mathfrak{g}, f) \simeq C_-^k \otimes C_+^k$ は複体の分解に他ならず，定義より

$$H^\bullet(C^k(\mathfrak{g}, f)) \simeq H^\bullet(C_-^k) \otimes H^\bullet(C_+^k) = \mathbb{C} \otimes H^\bullet(C_+^k) \simeq H^\bullet(C_+^k).$$

一方で任意の $i \neq 0$ に対して，$H^i(C^k(\mathfrak{g}, f)) = 0$ となることが知られているので $H^\bullet(C^k(\mathfrak{g}, f)) \simeq H^0(C_+^k) = \mathrm{Ker}_{V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0})}\, d_{(0)}$ が成り立つ．特に $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0})$ の部分代数になる．射影 $\mathfrak{g}_{\leq 0} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_0$ が誘導する（スーパー）頂点代数の射 $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0}) \twoheadrightarrow V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathcal{W}$ 代数に制限することで（スーパー）頂点代数の射

$$\mu^k \colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \to V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$$

が得られ，これを三浦写像という．三浦写像 μ^k は k によらずいつでも単射である．Q_0 を $\mathfrak{g}_0$ のルート格子，Π^Γ を $\Delta_{>0}$ の元であって二つの $\Delta_{>0}$ の元の和に分解できないもの全体の集合とする．任意の $\alpha, \beta \in \Pi^\Gamma$ に対し，同値関係 $\alpha \sim \beta$ を

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta \in Q_0$$

で定義し，α を含む同値類を $[\alpha]$ で表す．このとき $\Pi_1 \ni \alpha \mapsto [\alpha] \in \Pi^\Gamma/\sim$ は全単射写像になる．任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対し，$\mathfrak{g}_0$ の表現 $E_\alpha = \bigoplus_{\beta \in [\alpha]} \mathbb{C}v_\beta$ を

$$u \cdot v_\beta = \sum_{\gamma \in [\alpha]} c_{\gamma,u}^{\beta} v_\gamma, \quad u \in \mathfrak{g}_0, \quad \beta \in [\alpha]$$

で定義する．すると E_α は $\mathfrak{g}_0$ の既約表現になる．E_α の誘導する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ の Wely 表現を $V^{\tau_k}(E_\alpha)$ と表す．$k + h^\vee \neq 0$ のとき，$(u^i|u_j) = \delta_{i,j}$ を満たす $\mathfrak{g}_0$ の双対基底を $\{u_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0}$，$\{u^i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0}$ とすると，

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_{i=1}^{\mathfrak{g}_0} (-1)^{\bar{u}_i} :J^{u^i}(z) J^{u_i}(z):$$

は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ 上の共形場を与える．任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対し，$\mathrm{Hom}(V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0), V^{\tau_k}(E_\alpha))$ に係数をもつ形式的べき級数 $S^\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^\alpha z^{-n}$ を

$$S^\alpha(z)A = (-1)^{\bar{\alpha}\bar{A} + \bar{A}} \mathrm{e}^{zL_{-1}} Y(A, -z) v_\alpha, \quad A \in V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$$

で定義する．k が generic のとき，

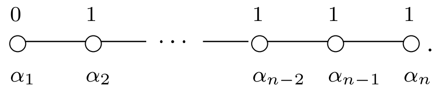
$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \simeq \mathrm{Im}\, \mu = \bigcap_{\alpha \in \Pi_1} \mathrm{Ker} \left(\int S^\alpha(z)\, dz \colon V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \to V^{\tau_k}(E_\alpha) \right)$$

が成り立つ（[G]）．ただし $\int S^\alpha(z)\, dz$ は $S^\alpha(z)$ の形式的留数を表し，$\int S^\alpha(z)\, dz = S_1^\alpha$ である．

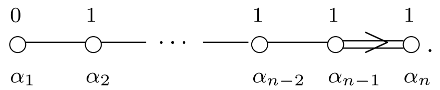
4　副正則 $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ または $\mathfrak{so}_{2n+1}$，$f = f_{\mathrm{sub}}$ を $\mathfrak{g}$ の副正則べき零元とする．このとき次の次数付き Dynkin 図形で表される $\mathfrak{g}$ の f_{sub} に関する good な $\mathbb{Z}$ 次数付けが存在する：

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$:



$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$:



このとき $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{z}$ である．ただし $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}_0$ の中心を表す．すると三浦写像は

$$\mu_1^k \colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{sub}}) \hookrightarrow V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) \otimes \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \tag{4.1}$$

なる埋め込み写像を与える．ただし $\pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{z}$ に付随する Heisenberg 頂点代数，$h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である．$\pi_1^{k+h^\vee}$ を

$$\alpha_1(z)\alpha_1(w) \sim \frac{2(k+h^\vee)}{(z-w)^2}$$

なる OPE 関係式を満たす場 $\alpha_1(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数，$M_{\mathfrak{sl}_2}$ を $\beta\gamma$ システムと呼ばれる

$$\beta(z)\gamma(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \beta(z)\beta(w) \sim 0 \sim \gamma(z)\gamma(w)$$

なる OPE 関係式を満たす偶の場 $\beta(z), \gamma(z)$ で生成される頂点代数とする．$V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2)$ は脇本表現と呼ばれ自由場への埋め込み

$$\begin{aligned}
&\rho_1^k \colon V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) \hookrightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_1^{k+h^\vee},\\
&e(z) \mapsto \beta(z), \quad h(z) \mapsto -2 :\gamma(z)\beta(z): + \alpha_1(z),\\
&f(z) \mapsto - :\gamma(z)^2\beta(z): + (k+h^\vee-2)\partial\gamma(z) + \gamma(z)\alpha_1(z)
\end{aligned}$$

が存在する．ただし $\{e, h, f\}$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三つ組である．したがって

$$\omega_1^k := (\rho_1^k \otimes \mathrm{id}) \circ \mu_1^k \colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{sub}}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

を得る．ただし $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ に付随するレベル $k+h^\vee$ の Heisenberg 頂点代数で $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \simeq \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \otimes \pi_1^{k+h^\vee}$ である．一方で k が generic ならば，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\mu_1^k &= \bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ker}\left(\int S^{\alpha_i}(z)\ dz \colon V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) \otimes \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \to V^k(E_{\alpha_i})\right),\\
\operatorname{Im}\rho_1^k &= \operatorname{Ker}\left(\int \beta(z)\ \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k+h^\vee}}(z)\ dz \colon M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_1^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{1,-\alpha_1}^{k+h^\vee}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $S^{\alpha_i}(z)$ は ρ_1^k を介することで

$$\int S^{\alpha_i}(z)\ dz = \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\ dz \colon V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) \otimes \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}$$

と同一視できる．よって

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \operatorname{Im}\omega_1^k = \bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\ dz\colon M_{\mathfrak{sl}_2}\otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{sl}_2}\otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}\right)\\
\cap\ \operatorname{Ker}\left(\int \beta(z)\ \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k+h^\vee}}(z)\ dz\colon M_{\mathfrak{sl}_2}\otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{sl}_2}\otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_1}^{k+h^\vee}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．次に

$$(x|x) = 1 = -(y|y), \quad (x|y) = 0$$

を満たす x, y で生成されるランク 2 の格子 $L = \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y$ に付随するスーパー格子頂点代数 V_L を考え，V_L 上の場 $x(z), y(z), \mathrm{e}^{x+y}(z), \mathrm{e}^{-x-y}(z)$ たちで生成される部分頂点代数を V_{x+y} で表す．このとき $M_{\mathfrak{sl}_2}$ の自由場実現

$$M_{\mathfrak{sl}_2} = \operatorname{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{x}(z)\ dz\colon V_{x+y} \to V_L\right)$$

が知られている．このとき $\beta(z) \mapsto \mathrm{e}^{x+y}(z)$ で対応する．したがって次の定理を得る：

Theorem 4.1 ([CGN, Theorem 3.2]) k が *generic* ならば

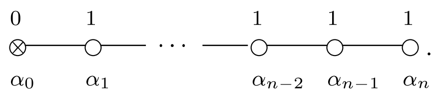
$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{sub}})\ \simeq\ \bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\ dz\colon V_{x+y}\otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to V_{x+y}\otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}\right)\\
\cap\ \operatorname{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k+h^\vee}+x+y}(z)\ dz\colon V_{x+y}\otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to V_{x+y}\otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_1}^{k+h^\vee}\right)\\
\cap\ \operatorname{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{x}(z)\ dz\colon V_{x+y}\otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to V_L\otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

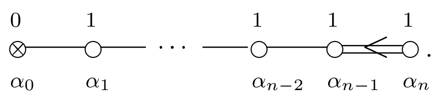
5 スーパー主 $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{1|n+1}$ または $\mathfrak{osp}_{2|2n}$，$f = f_{\mathrm{prin}}$ を $\mathfrak{g}$ の偶部分空間の正則べき零元とする．このとき次の次数付き Dynkin 図形で表される $\mathfrak{g}$ の f_{prin} に関する good な $\mathbb{Z}$ 次数付けが存在する：

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{1|n+1}$:



$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_{2|2n}$:



このとき $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}_{1|1} \oplus \mathfrak{z}$ である．ただし $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}_0$ の中心を表す．すると三浦写像は

$$\mu_2^k\colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{prin}}) \hookrightarrow V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \tag{5.1}$$

なる埋め込み写像を与える．ただし $\pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{z}$ に付随する Heisenberg 頂点代数，κ は

$$
\begin{aligned}
&\kappa(e_{1,1}|e_{1,1}) = 1, \quad \kappa(e_{2,2}|e_{2,2}) = 2r(k+h^\vee)+1,\\
&\kappa(e_{1,1}|e_{2,2}) = -r(k+h^\vee)-1, \quad \kappa(e_{1,2}|e_{2,1}) = -r(k+h^\vee)
\end{aligned}
$$

で定義される $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 上の不変双線形形式，r は $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の lacity，$e_{i,j}$ たちは $\mathfrak{gl}_{1|1}$ の標準基底である．$\pi_2^{k+h^\vee}$ を

$$\chi_1(z)\chi_1(w) \sim 0, \quad \chi_2(z)\chi_2(w) \sim \frac{2r(k+h^\vee)}{(z-w)^2}, \quad \chi_1(z)\chi_2(w) \sim \frac{-r(k+h^\vee)}{(z-w)^2}$$

なる OPE 関係式を満たす場 $\chi_1(z), \chi_2(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数，$M_{\mathfrak{gl}_{1|1}}$ を bc システムと呼ばれる

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad b(z)b(w) \sim 0 \sim c(z)c(w)$$

なる OPE 関係式を満たす奇の場 $b(z), c(z)$ で生成されるスーパー頂点代数とする．

Proposition 5.1 ([CGN, Proposition 2.1, Lemma2.2]) $V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$ の自由場への埋め込み

$$\begin{aligned}
&\rho_2^k \colon V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_2^{k+h^\vee}, \\
&e_{1,2}(z) \mapsto b(z), \quad e_{2,1}(z) \mapsto c(z)(\chi_1(z)+\chi_2(z)) - r(k+h^\vee)\partial c(z), \\
&e_{1,1}(z) \mapsto -:c(z)b(z): + \chi_1(z), \quad e_{2,2}(z) \mapsto :c(z)b(z): + \chi_2(z),
\end{aligned}$$

が存在する．

よって

$$\omega_2^k := (\rho_2^k \otimes \mathrm{id}) \circ \mu_2^k \colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{prin}}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

を得る．ただし $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ に付随するレベル $k+h^\vee$ の Heisenberg 頂点代数で $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \simeq \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \otimes \pi_{\chi}^{k+h^\vee}$ である．一方で k が generic ならば，

$$\mathrm{Im}\,\mu_2^k = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\left(\int S^{\alpha_i}(z)\ dz \colon V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \to V^\kappa(E_{\alpha_i})\right)$$

が成り立つ．

Proposition 5.2 ([CGN, Proposition 2.5]) $k \neq -h^\vee$ ならば

$$\mathrm{Im}\,\rho_2^k = \mathrm{Ker}\left(\int b(z)\ \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_0}{k+h^\vee}}(z)\ dz \colon M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_2^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{2,-\alpha_0}^{k+h^\vee}\right)$$

が成り立つ．ただし $\alpha_0(z) = -r^{-1}(\chi_1(z)+\chi_2(z))$ である．

ここで $S^{\alpha_i}(z)$ は ρ_2^k を介することで

$$\int S^{\alpha_i}(z)\ dz = \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\ dz \colon V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}$$

と同一視できる．よって

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{prin}}) \simeq \mathrm{Im}\,\omega_2^k = &\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\ dz \colon M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}\right) \\
&\cap\ \mathrm{Ker}\left(\int b(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_0}{k+h^\vee}}(z)\ dz \colon M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_0}^{k+h^\vee}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．次に $V_{\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{Z}$ に付随するスーパー格子頂点代数とし，$\mathbb{Z}$ の生成元を ϕ とする．$(\phi|\phi) = 1$ である．このとき boson-fermion 対応と呼ばれる同型写像

$$M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \xrightarrow{\simeq} V_{\mathbb{Z}}, \quad b(z) \mapsto \mathrm{e}^{\phi}(z), \quad c(z) \mapsto \mathrm{e}^{-\phi}(z)$$

が存在する．したがって次の定理が証明された．

Theorem 5.3 ([CGN, Theorem 3.4]) k が *generic* ならば

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{prin}}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\ dz \colon V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}\right)$$
$$\cap\ \mathrm{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_0}{k+h^\vee}+\phi}(z)\ dz \colon V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_0}^{k+h^\vee}\right)$$

が成り立つ．

6 $\mathcal{W}$ 代数の双対性

$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{sl}_{1|n+1})$ または $(\mathfrak{so}_{2n+1}, \mathfrak{osp}_{2|2n})$ とし，$\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$（$i=1,2$）の Cartan 部分代数，$h_i^\vee$ を $\mathfrak{g}_i$（$i=1,2$）の双対 Coxeter 数，α_i（$i=1,\dots,n$）を $\mathfrak{g}_1$ の単純ルート，β_i（$i=0,\dots,n$）を $\mathfrak{g}_2$ の単純ルート，r を $\mathfrak{g}_1$ の lacity，$\pi_{\mathfrak{h}_i}^{k_i+h_i^\vee}$ をレベル $k_i+h_i^\vee$ の $\mathfrak{h}_i \simeq \mathfrak{h}_i^*$（$i=1,2$）に付随する Heisenberg 頂点代数とする．定理 4.1 および定理 5.3 から $\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \hookrightarrow V_{x+y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_1}^{k_1+h_1^\vee}$ および $\mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \hookrightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_2}^{k_2+h_2^\vee}$ なる埋め込みがあって，k_i が generic のとき

$$\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \bigcap_{i=2}^{n} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k_1+h_1^\vee}}(z)\ dz\ \cap\ \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k_1+h_1^\vee}+x+y}(z)\ dz\ \cap\ \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{x}(z)\ dz,$$
$$\mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\beta_i}{k_2+h_2^\vee}}(z)\ dz\ \cap\ \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\beta_0}{k_2+h_2^\vee}+\phi}(z)\ dz$$

である．$\omega_1^\vee \in \mathfrak{h}_1$ を $\mathfrak{g}_1$ の第 1 基本コウェイト，$\omega_0^\vee \in \mathfrak{h}_2$ を $\mathfrak{g}_2$ の第 0 基本コウェイトとする．$H_1(z), H_2(z)$ を上の自由場への埋め込みのもとで

$$H_1(z) = \omega_1^\vee(z) - y(z), \quad H_2(z) = \omega_0^\vee(z) + \phi(z)$$

で定義される $\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}), \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}})$ 上のそれぞれの場，π_{H_i} を $H_i(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数，$\pi_{x,y}$ を $x(z), y(z)$ で生成される V_{x+y} の Heisenberg 部分頂点代数，π_ϕ を $\phi(z)$ で生成される $V_{\mathbb{Z}}$ の Heisenberg 部分頂点代数，$\pi_{\widetilde{\alpha}}$ を

$$\widetilde{\alpha}_0(z) = x(z), \quad \widetilde{\alpha}_1(z) = \alpha_1(z) - (k_1+h_1^\vee)(x(z)+y(z)), \quad \widetilde{\alpha}_i(z) = \alpha_i(z), \quad (i=2,\dots,n-1), \quad \widetilde{\alpha}_n(z) = r\alpha_n(z)$$

で生成される $\pi_{x,y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_1}^{k_1+h_1^\vee}$ の Heisenberg 部分頂点代数，$\pi_{\widetilde{\beta}}$ を

$$\widetilde{\beta}_0(z) = -\frac{1}{k_2+h_2^\vee}\beta_0(z) + \phi(z), \quad \widetilde{\beta}_i(z) = -\frac{1}{k_2+h_2^\vee}\beta_i(z), \quad (i=1,\dots,n)$$

で生成される $\pi_\phi \otimes \pi_{\mathfrak{h}_2}^{k_2+h_2^\vee}$ の Heisenberg 部分頂点代数とする．このとき

$$\pi_{H_1} \otimes \pi_{\widetilde{\alpha}} \simeq \pi_{x,y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_1}^{k_1+h_1^\vee}, \quad \pi_{H_2} \otimes \pi_{\widetilde{\beta}} \simeq \pi_\phi \otimes \pi_{\mathfrak{h}_2}^{k_2+h_2^\vee}$$

が成り立つ．この同型から埋め込み

$$\mathrm{Com}\left(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})\right) \hookrightarrow \pi_{\widetilde{\alpha}}, \quad \mathrm{Com}(\left(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}})\right) \hookrightarrow \pi_{\widetilde{\beta}}$$

が誘導され，この埋め込みの像は k_i が generic ならば

$$\mathrm{Com}\left(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})\right) \simeq \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_0}(z)\ dz \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{\alpha}_i}{k_1+h_1^\vee}}(z)\ dz\ \cap\ \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{\alpha}_n}{r(k_1+h_1^\vee)}}(z)\ dz,$$
$$\mathrm{Com}\left(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}})\right) \simeq \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\widetilde{\beta}_i}(z)\ dz$$

と表される．さらに Feigin-Frenkel 双対性から

$$\mathrm{Ker}\int \mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{\alpha}_i}{k_1+h_1^\vee}}(z)\ dz = \mathrm{Ker}\int \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_i}(z)\ dz\ (i=1,\dots,n-1),\quad \mathrm{Ker}\int \mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{\alpha}_n}{r(k_1+h_1^\vee)}}(z)\ dz = \mathrm{Ker}\int \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_n}(z)\ dz$$

が成り立つ．よって

$$\mathrm{Com}\left(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})\right) \ \simeq\ \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{Ker}\int \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_i}(z)\ dz$$

となる．今，$k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ の間に関係式

$$r(k_1+h_1^\vee)(k_2+h_2^\vee)=1 \tag{6.1}$$

が成り立つとき，Heisenberg 頂点代数の間の同型 $\pi_{\widetilde{\alpha}} \xrightarrow{\sim} \pi_{\widetilde{\beta}}$ が対応 $\widetilde{\alpha}_i \mapsto \widetilde{\beta}_i$（$i=0,\dots,n$）によって与えられる．したがって次の定理が証明された：

Theorem 6.1 ([CGN, Theorem 4.3]) k_1, k_2 が *generic* かつ関係式を満たすとき，同型

$$\mathrm{Com}\left(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})\right) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}})\right)$$

が成り立つ．

$V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}$ を $\sqrt{-1}\,\mathbb{Z}$ に付随するスーパー格子頂点代数，ψ を $\sqrt{-1}\,\mathbb{Z}$ の生成元とする．$(\psi|\psi) = -1$ である．$\widetilde{H}_1(z), \widetilde{H}_2(z)$ を

$$\widetilde{H}_1(z) = \phi(z) - H_1(z), \quad \widetilde{H}_2(z) = \psi(z) + H_2(z)$$

で定義される $\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}$ 上のそれぞれの場，$\pi_{\widetilde{H}_i}$ を $\widetilde{H}_i(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数とする．上と同様に $\mathcal{W}$ 代数の自由場表示と Feigin-Frenkel 双対性を用いることで，次の定理が証明される：

Theorem 6.2 ([CGN, Theorem 4.4]) k_1, k_2 が *generic* かつ関係式 (6.1) を満たすとき，同型

$$\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\widetilde{H}_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}\right),$$
$$\mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\widetilde{H}_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}\right)$$

が成り立つ．

[CL] により定理 6.1 および定理 6.2 に表れる Heisenberg コセットの次数付き指標は k_1, k_2 によらず不変であることがわかる．特に $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現を用いることで [T] の意味で連続変形族になることがわかる．よって [AFO] で用いられた手法を用いれば，k_1, k_2 を動かして generic な点で同型な二つの（スーパー）頂点代数は k_1, k_2 が定義される範囲でいつでも同型になる．$(H_i|H_i) = 0$ を満たす k_i の値を γ_i（$i=1,2$）とする．一方で $(\widetilde{H}_i|\widetilde{H}_i) = 0$ を満たす k_i の値は $-h_i^\vee$ である．したがって次の定理が成り立つ：

Theorem 6.3 ([CGN, Corollary 5.15]) $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{sl}_{1|n+1})$ または $(\mathfrak{so}_{2n+1}, \mathfrak{osp}_{2|2n})$，$k_1, k_2$ が関係式 (6.1) を満たしていると仮定する．このとき次が成り立つ：

1. $k_i \neq -h_i^\vee, \gamma_i$ ならば，$\mathrm{Com}\left(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})\right) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}})\right)$.
2. $k_i \neq -h_i^\vee$ ならば，$\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\widetilde{H}_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}\right)$.
3. $k_i \neq -h_i^\vee$ ならば，$\mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\widetilde{H}_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}\right)$.

参考文献

[AFO] M. Aganagic, E. Frenkel, and A. Okounkov, Quantum q-Langlands correspondence, Trans. Moscow Math. Soc., **79**, 2018, 1–83.

[CGN] T. Creutzig, N. Genra, S. Nakatsuka, Duality of subregular $\mathcal{W}$-algebras and principal $\mathcal{W}$-superalgebras, arXiv:2005.10713 [math.QA].

[CL] T. Creutzig and A. R. Linshaw, Cosets of affine vertex algebras inside larger structures, J. Algebra **517** (2019) 396.

[FBZ] E. Frenkel and D. Ben-Zvi, Vertex algebras and algebraic curves, Mathematical Surveys and Monographs, **88**, American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[FF] B. L. Feigin, E. Frenkel. Quantization of Drinfel'd-Sokolov reduction. *Phys. Lett., B* 246(1–2):75–81, 1990.

[G] N. Genra, Screening operators for $\mathcal{W}$-algebras, Sel. Math. New. Ser., **23**, 2017, 3, 2157–2202.

[K] V. Kac, Vertex algebras for beginners, University Lecture Series, **10**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, viii+141.

[KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[T] C. Taubes, Differential geometry, Oxford Graduate Texts in Mathematics, **23**, Oxford University Press, Oxford, 2011, xiv+298.