二次元共形場理論とカレントカレント変形

(Two-dimensional conformal field theory and current-current deformation)

カブリ数物連携宇宙研究機構　森脇 湧登

Yuto Moriwaki

Kavli institute for the physics and mathematics of the universe

1 序文

場の量子論は素粒子の世界から宇宙規模まで広範な物理現象を記述する物理理論である。物理理論としての重要性もさることながら、数学に対しても新しい幾何学や組み合わせ論、表現論的予想など豊かな話題を提供してきた。しかしながら、現時点では高次元の場の量子論を数学的に構成することは極めて困難である。難しい理由の一つは、物理で場の量子論を構成する強力な手法である「変形」(摂動論) が基本的には近似であり、変形したものが厳密に公理を満たしているか証明できないことにある。私は [Mo2, Mo3] において、二次元共形場理論 (二次元のよいクラスの場の量子論) の数学的定式化を与え、その (カレントカレント) 変形を構成した。本稿では二次元共形場理論の定式化の動機やその変形の構成と具体例を概説する。

1.1 なぜ二次元か？

場の量子論は一般に多様体 (境界や角を考えることもある) の上で定義され、多様体の次元 d に応じて d 次元の場の理論と呼ばれる。本稿では平坦な $\mathbb{R}^d$ 上の場の量子論のみを考える。$\mathbb{R}$ 上の場の量子論は、量子力学と同値であり数学的にかなり整備されている。他方高次元 (三次元以上) の場の量子論は難しく、非自明かつ「厳密」な具体例は未だに構成されていない。その中間である二次元の場の量子論は非常に豊かであり、多くの例が知られている。なかでも二次元の共形場理論と呼ばれる特別なクラスの場の量子論はかなり扱いやすく、変形などといった物理で予想される様々な場の量子論の性質を数学的に検証し証明するのに適している。たとえば、図 1 は中心電荷 $(1,1)$(理論の不変量) の二次元共形場理論の物理で予想されているモジュライ空間である [Gi, DVV1, DVV2]。図の各点が、共形場理論に対応し線は理論の変形に対応している。

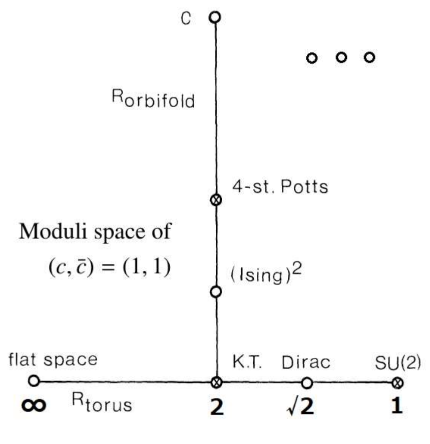

図 1: $(1,1)$ モジュライ空間

本稿では二次元共形場理論を数学的定式化した代数 (full 頂点代数) を導入し、図のモジュライ空間の横線に対応する変形を一般的な設定で構成する。

1.2 なぜ full か？

二次元の共形場理論における状態全体はベクトル空間 F (ユニタリな理論ならばヒルベルト空間) をなす。また場は $\mathbb{R}^2$ 上の $\mathrm{End}F$ に値を持つ (極を持った) 実解析的関数になる。正則な場のなす F の部分空間は部分代数になりカイラル共形場理論と呼ばれている。カイラル共形場理論は Borcherds によって数学的に定

式化され頂点代数と呼ばれ [B]、数学的に非常によく調べられてきた。本稿で紹介する full 頂点代数は頂点代数の非カイラル (full) な共形場理論への一般化である。「full」への一般化を考えるメリットは、full の場は実解析的であり、正則関数よりも自由度が高いことが挙げられる。たとえば図にあるような変形 (exactly marginal 変形と呼ばれる) はカイラル共形場理論の世界 (正則関数) では考えることができない。よってカイラルの世界だけでは、一見関係のないように見えていた頂点代数たちが full の世界に行くことで変形で連続的に移りあうということがあり得るのである。本稿でもその一例を紹介する。

2 二次元共形場理論の定式化

先述のように二次元の共形場理論における場 (End$F$ 値の実解析的関数) は極を持つ。しかし共形場理論の高い対称性 (共形対称性) のおかげで、場は極において (1) にあるような「級数展開」を持つ。

$$\sum_{p\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}} a_{(p,n)}(z\bar{z})^{p/2}(z/\bar{z})^{k/2} = \sum_{p\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}} a_{(p,n)}R^p\exp(2\pi ikT), \quad (a_{p,n}\in \mathrm{End}F), \tag{1}$$

ただし $z = R\exp(2\pi iT)$ は $z\in\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ の極座標表示。私は共形場理論に現れる特異性を共形特異性とよびそれを元に二次元の共形場理論を数学的に定義した。この章では二次元の共形場理論の定式化について概説する。

2.1 共形特異性

共形対称性の基本的なアイディアは正則関数のローラン級数展開である。$\mathbb{C}[[z^\pm]]$ を (下に有界とは限らない) 形式的級数 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ のなす空間とし、$\mathbb{C}((z))$ を下に有界な形式的級数のなす空間とする。すなわち $f(z)\in\mathbb{C}((z))$ ならばある $N\in\mathbb{R}$ で、$a_n=0$ が全ての $n<N$ に対して成り立つものが存在する。有理形関数は、定義域の各点で $\mathbb{C}((z))$ の元による級数展開を唯一もつ。

この形式的級数の実解析的な類似を考えると、$z,\bar{z}$ を形式的変数として $\mathbb{C}[[z^\pm,\bar{z}^\pm]]$、すなわち $f(z)=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m}z^n\bar{z}^m$ のなす空間が考えられる。しかし実はこの空間では共形場理論に現れる関数をとらえるには小さすぎる。$z^r=\exp(r\log z)$ は $r\in\mathbb{Z}$ でない限り一価でないが、$(z\bar{z})^r$ は任意の $r\in\mathbb{R}$ に対して一価な関数を定める。級数展開ではこのような関数も許すことにする。そこで $r-s\in\mathbb{Z}$ でないならば $a_{r,s}=0$ を満たす形式的級数 $f(z)=\sum_{r,s\in\mathbb{R}} a_{r,s}z^r\bar{z}^s$ たちのなす空間を $\mathbb{C}[[z,\bar{z},|z|^\mathbb{R}]]$ とおく。ただし $|z|=(z\bar{z})^{\frac{1}{2}}$ とする。これが $\mathbb{C}[[z]]$ の実解析的な類似になる。

次に、高々極という条件 $\mathbb{C}((z))$ の実解析的な類似を考える。$\mathbb{C}((z,\bar{z},|z|^\mathbb{R}))$ を $\mathbb{C}[[z,\bar{z},|z|^\mathbb{R}]]$ の部分空間であって、以下の条件を満たす $\sum_{r,s\in\mathbb{R}} a_{r,s}z^r\bar{z}^s\in\mathbb{C}[[z,\bar{z},|z|^\mathbb{R}]]$ たちのなす空間とする:

CS1) ある $N\in\mathbb{R}$ が存在して、任意の $r\le N$ または任意の $s\le N$ に対して、$a_{r,s}=0$ を満たす。

CS2) 任意の $H\in\mathbb{R}$ にたいして、$\{(r,s)\mid r+s\le H$ かつ $a_{r,s}\neq 0\}$ は有限集合。

Remark 2.1 コンパクトな共形場理論に現れる関数 *(*物理量*)* の特異点でのふるまいは全て条件 *(CS1)* および *(CS2)* を満たしていることが分かる。ここで共形場理論のコンパクト性とは、状態のなす空間のエネルギースペクトラムに対する条件である。$r+s$ はエネルギーに関係した量であり、*(CS2)* はあるエネルギー以下の状態が有限であるという仮定から従う。また *(CS1)* は正則な場合の高々極という条件の自然な類似であり、これもまたコンパクト性から従う。

$f(\underline{z})\in\mathbb{C}((z,\bar{z},|z|^\mathbb{R}))$ とする ($\underline{z}$ は z と $\bar{z}$ の二つの形式的変数を持つことを表す)。条件 (CS1) からある $N\in\mathbb{R}$ で $(z\bar{z})^N f(\underline{z})=\sum_{r,s\ge 0} a_{r,s}z^r\bar{z}^s$ となるものが存在する。$f(\underline{z})$ が $z=0$ 周りで絶対収束するとは、ある実数 $R>0$ が存在して、和 $\sum_{r,s\ge 0}|a_{r,s}|R^{r+s}$ が有限になることをいう。絶対収束するかどうかは N

の取り方によらない。絶対収束する $f(\underline{z}) \in \mathbb{C}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ たちは、$\mathbb{C}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ の部分環をなし、これを $\mathrm{Conv}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ とかく。またそのような $f(\underline{z})$ はアニュラス $\{0<|z|<R\}$ 上の連続関数になる。

$U \subset \mathbb{C}$ を $\alpha \in \mathbb{C}$ の開近傍とし、$\chi : U \to \mathbb{C}$ を $\chi(\alpha)=0$ を満たす α 周りの双正則写像とする (座標近傍)。$U \setminus \alpha$ 上の実解析的関数 ϕ が α で共形特異点を持つとは、$\phi \circ \chi^{-1}$ が $\mathrm{Conv}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ の元による級数展開を持つことをいう。より正確に述べると、ある $f(\underline{z}) \in \mathrm{Conv}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ で $f(\underline{z})$ の定める連続関数がアニュラス上 $\phi \circ \chi^{-1}$ と一致するものが存在することをいう。このような級数 $f(\underline{z})$ は α 周りの複素座標近傍 χ を決めると一意であるため、これを ϕ の (α,χ) での級数展開とよび、$j(\chi,\phi) \in \mathbb{C}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ とかく。たとえば $j(1/z,\phi)$ や $j(1-z^{-1},\phi)$ はそれぞれ $\phi(1/z)$ と $\phi(\frac{1}{1-z})$ の $z=0$ 周りの展開である。

$\mathbb{C}P^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上の実解析的関数であって、$\{0,1,\infty\}$ で共形特異性を持つ関数の空間を $F_{0,1,\infty}$ とおく。コンパクト共形場理論の任意の四点相関関数 (の極限) は $F_{0,1,\infty}$ に入る。

Remark 2.2 たとえば、コンパクト共形場理論の例である臨界イジング模型を考える。その四点相関関数の一つは

$$\frac{1}{2}(|1-\sqrt{1-z}|+|1+\sqrt{1-z}|)$$

である *[Mo4]*。その $z=0$ 周りの展開は、

$$1+\frac{1}{4}|z|-\frac{1}{8}(z+\bar{z})+\frac{1}{32}|z|(z+\bar{z})+\frac{1}{64}z\bar{z}+\dots.$$

で与えられる。

最後にベクトル空間 F に対して、$F[[z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}]]$ や $F((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ を F を係数に持つ上記の形式的級数とする。

2.2 full 頂点代数

$\mathbb{R}^d$ 上の場の量子論はポアンカレ群 $\mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d)$ の対称性を持つが、共形場理論はより大きな大域的対称性 (共形対称性) $\mathrm{SO}(d+1,1)^+$ を持つ。二次元の場合 $\mathrm{SO}(3,1)^+$ であり、これは空間 $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ の対称性であるスケール変換 $z \mapsto R\cdot z$ と、回転 $z \mapsto \exp(2\pi i\theta)z$ を含んでいる。共形場理論の状態のなすベクトル空間 F はこれらの同時固有空間になっているとしてよい、 $F=\bigoplus_{h,\bar{h}\in\mathbb{R}} F_{h,\bar{h}}$ (この条件を緩めた共形場理論、logarithmic 共形場理論を考えることもある)。ただし $a \in F_{h,\bar{h}}$ に対して、スケール変換は $a \mapsto r^{h+\bar{h}}a$、回転は $a \mapsto \exp(2\pi i(h-\bar{h})\theta)a$ と作用する。回転の作用が well-defined であるためには、$F_{h,\bar{h}}=0$ が $h-\bar{h}\notin\mathbb{Z}$ に対して成り立つ必要がある。また線形作用素 $L(0),\overline{L}(0) \in \mathrm{End}F$ を、$L(0)|_{F_{h,\bar{h}}}=h$ 、$\overline{L}(0)|_{F_{h,\bar{h}}}=\bar{h}$ で定める。

以上の下、full 頂点代数とは $\mathbb{R}^2$ 次数付けを持つ $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $F=\bigoplus_{h,\bar{h}\in\mathbb{R}} F_{h,\bar{h}}$ と、ゼロでないベクトル $\mathbf{1}\in F_{0,0}$ および線形作用素

$$Y(-,\underline{z}) : F \to \mathrm{End}F[[z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}]], \qquad a \mapsto \sum_{r,s\in\mathbb{R}} a(r,s)z^{-r-1}\bar{z}^{-s-1}$$

であって以下の条件を満たすものである。

FV1) 任意の $a,b \in F$ に対して、$Y(a,\underline{z})b \in F((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$;

FV2) $h-\bar{h}\notin\mathbb{Z}$ ならば $F_{h,\bar{h}}=0$;

FV3) 任意の $a \in F$ に対して、$Y(a,\underline{z})\mathbf{1} \in F[[z,\bar{z}]]$ かつ $\lim_{\underline{z}\to 0} Y(a,\underline{z})\mathbf{1}=a(-1-1)\mathbf{1}=a$;

FV4) $Y(\mathbf{1},\underline{z})=\mathrm{id}_F$;

FV5) 任意の $h_i, \bar{h}_i \in \mathbb{R}$、$a_i \in F_{h_i,\bar{h}_i}$ $(i=1,2,3)$ と $u \in F^*_{h_0,\bar{h}_0}$ に対して、ある $f \in F_{0,1,\infty}$ で以下の条件を満たすものが存在する。

$$
\begin{aligned}
z_2^{-h_0+h_1+h_2+h_3}\bar{z}_2^{-\bar{h}_0+\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3}u(Y(a_1,\underline{z}_1)Y(a_2,\underline{z}_2)a_3) &= \lim_{z \to z_2/z_1} j(z,f),\\
z_2^{-h_0+h_1+h_2+h_3}\bar{z}_2^{-\bar{h}_0+\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3}u(Y(Y(a_1,\underline{z}_0)a_2,\underline{z}_2)a_3) &= \lim_{z \to -z_0/z_2} j(1-z^{-1},f),\\
z_2^{-h_0+h_1+h_2+h_3}\bar{z}_2^{-\bar{h}_0+\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3}u(Y(a_2,\underline{z}_2)Y(a_1,\underline{z}_1)a_3) &= \lim_{z \to z_1/z_2} j(1/z,f).
\end{aligned}
$$

FV6) 任意の $a \in F_{h,\bar{h}}$ に対して、$[L(0),Y(a,\underline{z})] = (z\frac{z}{dz}+h)Y(a,\underline{z})$、$[\overline{L}(0),Y(a,\underline{z})] = (\bar{z}\frac{z}{d\bar{z}}+\bar{h})Y(a,\underline{z})$.

条件 (FV5) が full 頂点代数を定義する上で最も大切な条件であり共形場理論 (より一般に場の量子論) の consistency と呼ばれている。また (FV5) によって得られる関数 $f \in F_{0,1,\infty}$ は (四点) 相関関数と呼ばれる場の量子論における重要な物理量である。

Remark 2.3 $z_2^{-h_0+h_1+h_2+h_3}\bar{z}_2^{-\bar{h}_0+\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3}$ の項が煩雑だが、これは *full* 頂点代数の定義に必要な準備を少なくするためであり、適切な準備の下同値でより簡潔な定義を与えることができる *[Mo2]*。

場の合成 $Y(a,\underline{z}_1)Y(b,\underline{z}_2)c$、$Y(b,\underline{z}_2)Y(a,\underline{z}_1)c$ および $Y(Y(a,\underline{z}_0)b,\underline{z}_2)c$ を $z,\bar{z}$ を忘れて、$a(bc)$、$b(ac)$ および $(ab)c$ と書くと、条件 (FV5) は積が結合的かつ可換であることを意味していることが分かる。よって共形場理論とは、場の積が「解析接続すると」結合的かつ可換になる代数のことである。条件 (FV5) についてのより詳しい解説は [Mo2] のイントロダクションを参照されたい。

Remark 2.4 *full* 頂点代数 F が以下の二条件を満たすときコンパクトであるという：

C1) ある $N \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $h \leq N$ または任意の $\bar{h} \leq N$ に対して $F_{h,\bar{h}} = 0$;

C2) 任意の $H \in \mathbb{R}$ に対して、$\sum_{h,\bar{h} \leq H} \dim F_{h,\bar{h}}$ が有限。

*(*理論物理における*)* 共形場理論がスペクトラムに関する上記の条件 *(C1)*、*(C2)* を満たすとき、その代数はコンパクト *full* 頂点代数になることが分かる。よってコンパクト *full* 頂点代数は条件 *(C1)*、*(C2)* を満たす共形場理論の数学的定式化になっている *((C1)*、*(C2)* は物理における共形場理論のコンパクト性とほぼ同じだが若干異なる*)*。後に登場する有理的共形場理論と呼ばれる共形場理論は全て *(C1)* と *(C2)* を満たすため、コンパクト共形場理論は良い共形場理論を十分に含んでいると言える。

上記の公理は実際には共形場理論を定義するには少し弱く、より強い公理を満たす代数 ((局所) 共形対称性を含む) を full 頂点作用素代数と呼ぶ [Mo2]。

2.3 頂点代数との関係

F を full 頂点代数とする。full 頂点代数の $\mathbf{1} \in F_{0,0}$ は真空状態にあたるベクトルであり、結合代数の類似として見る場合は代数の単位元に相当する。線形作用素 $D, \bar{D} \in \mathrm{End}F$ を $z, \bar{z}$ の係数

$$Y(a,\underline{z})\mathbf{1} = a + (Da)z + (\bar{D}a)\bar{z} + \ldots$$

によって定義する。実は $D, \bar{D}$ を用いると高次の項は

$$Y(a,\underline{z})\mathbf{1} = \sum_{n,m \geq 0} (D^n \bar{D}^m a)\frac{z^n}{n!}\frac{\bar{z}^m}{m!} = \exp(Dz + \bar{D}\bar{z})a$$

と書けることが分かる。さらに

Proposition 2.1 ([Mo2]) 任意の $a, b \in F$ に対して以下が成立する。

1.

$$Y(Da, \underline{z}) = [D, Y(a, \underline{z})] = \frac{d}{dz} Y(a, \underline{z}),$$
$$Y(\bar{D}a, \underline{z}) = [\bar{D}, Y(a, \underline{z})] = \frac{d}{d\bar{z}} Y(a, \underline{z}).$$

2. $Y(a, \underline{z})b = \exp(Dz + \bar{D}\bar{z})Y(b, -\underline{z})a$.

物理の言い方を借りれば、$D, \bar{D} \in \mathrm{End}F$ は、平行移動の生成演算子になる。$a \in F$ が $\bar{D}a = 0$ を満たすとする。すると、$0 = Y(\bar{D}a, \underline{z}) = \frac{d}{d\bar{z}} Y(a, \underline{z})$ より、$Y(a, \underline{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n, -1) z^{-n-1}$ と z のみの級数になることが分かる。さらに命題 2.1 より、$\bar{D}$ は代数の微分であるから、$\ker \bar{D}$ は部分代数になり、$Y(-, \underline{z})$ は $\ker \bar{D}$ 上、線形作用素 $Y(-, z) : \ker \bar{D} \to \mathrm{End} \ker \bar{D}[[z^{\pm}]]$ を定める。

正則な場のなす共形場理論の代数は、Borcherds によって定式化され頂点代数と呼ばれている [B] (共形対称性に対するより強い仮定を満たす代数は頂点作用素代数と呼ばれる [FLM])。$\phi \in F_{0,1,\infty}$ が正則関数 (コーシーリーマンの関係式を満たす) ならば、それは $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の正則関数で $0, 1, \infty$ で高々極を持つことが分かる。このような関数 ϕ は多項式環 $\mathbb{C}[z^{\pm}, (1-z)^{\pm}]$ の元である。頂点代数の公理は、相関関数が $\mathbb{C}[z^{\pm}, (1-z)^{\pm}]$ に入ることを要求する。このことから次の命題を得る。

Proposition 2.2 $\ker \bar{D}$ は自然に頂点代数の構造を持ち、F は $\ker \bar{D}$ 上の *(*頂点代数の*)* 加群になる。また $Y(-, \underline{z}) : F \to \mathrm{End}F[[z, \bar{z}, |z|^{\mathbb{R}}]]$ は頂点代数の加群の *intertwining* 作用素である。また F が *full* 頂点作用素代数ならば、$\ker \bar{D}$ は頂点作用素代数である。

上記の命題より full 頂点代数からは頂点代数が自然に現れる。他方、任意の $\mathbb{Z}$ 次数付き頂点代数は full 頂点代数である。よって full 頂点代数は頂点代数の一般化である。

full 頂点代数 F_1 と F_2 が与えられると、適切な条件の下 (たとえばコンパクト性) $F_1 \otimes F_2$ も full 頂点代数になる。命題 2.2 と同様に $\ker D$ も形式的変数 $\bar{z}$ を持つ頂点代数であり、テンソル積 $\ker \bar{D} \otimes \ker D$ は full 頂点代数になる。

Proposition 2.3 *[Mo2]* $t : \ker \bar{D} \otimes \ker D \to F,\ \ a \otimes b \to a(-1, -1)b$ は *full* 頂点代数の準同型になる。

自然な設定においては $\ker \bar{D} \otimes \ker D$ は単純 full 頂点代数であり、t は単射になる。このとき $\ker \bar{D} \otimes \ker D$ は単に F の部分代数である。

Remark 2.5 命題 *2.3* は「共形場理論は正則部分と反正則部分 *(*カイラル共形場理論と呼ばれる*)* を部分代数として持ち、理論全体はその上の加群である。」という物理においてよく知られている事実の数学的定式化になっている。

頂点代数が full 頂点代数にどのように一般化されたかを下記の表にまとめる。

	頂点代数	full 頂点代数
状態の空間	$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$	$F = \bigoplus_{h, \bar{h} \in \mathbb{R}} F_{h, \bar{h}}$
頂点作用素	$\mathrm{End}V[[z^{\pm}]]$	$\mathrm{End}F[[z, \bar{z}, \|z\|^{\mathbb{R}}]]$
特異性	$\mathbb{C}((z))$	$\mathbb{C}((z, \bar{z}, \|z\|^{\mathbb{R}}))$
相関関数	$\mathbb{C}[z^{\pm}, (1-z)^{\pm}]$	$F_{0,1,\infty}$

2.4　ほかの共形場理論の数学的定式化との関係

命題 2.2 および命題 2.3 から、full 頂点作用素代数 F は正則部分の頂点作用素代数 $\ker \bar{D}$ と反正則部分の頂点作用素代数 $\ker D$ の加群による拡大として理解できる。既約加群の同型類が有限個で、任意の加群が完全可約な頂点作用素代数は、regular 頂点作用素代数と呼ばれている。正則-反正則部分の代数が regular 頂点作用素代数になる共形場理論は物理において有理的共形場理論と呼ばれる。有理的共形場理論は、$\ker \bar{D} \otimes \ker D$ の有限拡大になる。Moore-Seiberg は $\ker \bar{D}$ および $\ker D$ の表現論を用いて、有理的共形場理論の定義を与えた [MS]。Lepowsky と Huang による regular 頂点作用素代数の表現の一般論 [HL, Hu] などに基づいて、物理における有理的共形場理論の Moore-Seiberg 流の定義は Huang と Kong によって数学的に定式化された [HK]。ただし有理的共形場理論のエネルギースペクトラムは有理数になることが知られており、変形はエネルギーを連続的に変化させるため、有理的共形場理論の範疇では変形を考えることができない。full 頂点代数の公理は非有理的な共形場理論を自然に含んでいるため変形を考える上で便利な枠組みを与えている。

2.5　affine Heisenberg full 頂点代数

この章では、full 頂点代数の (自明な) 例を与える。H を実ベクトル空間で非退化な内積 $(-,-)$ を持つとする。このとき affine Heisenberg リー代数 $\hat{H} = H \otimes \mathbb{C}[t^{\pm}] \oplus \mathbb{C}c$ を次の交換関係で定義する：任意の $n, m \in \mathbb{Z}$ と $h, h' \in H$ に対して

$$[h \otimes t^n, h' \otimes t^m] = n(h, h')\delta_{n+m,0}c$$
$$[c, h \otimes t^n] = 0.$$

このとき $\hat{H}_{\geq 0} = H \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}c$ は $\hat{H}$ の部分代数である。$\alpha \in H$ に対して、$\hat{H}_{\geq 0}$ の一次元表現 $\mathbb{C}\left|\alpha\right\rangle$ を、任意の $h \in H$ と $n \geq 1$ に対して、

$$h \otimes t^n \left|\alpha\right\rangle = 0$$
$$h \otimes t^0 \left|\alpha\right\rangle = (h, \alpha)\left|\alpha\right\rangle.$$

で定める。また $M_H(\alpha)$ を $\hat{H}_{\geq 0}$ 加群 $\mathbb{C}\left|\alpha\right\rangle$ から誘導される $\hat{H}$ 加群とする。$h \otimes t^n$ の $M_H(\alpha)$ への作用を $h(n) \in \mathrm{End} M_H(\alpha)$ とかく。

$p \in \mathrm{End} H$ を H の射影作用素 $(p^2 = p)$ であって、$\ker(p)$ と $\ker(1-p)$ が直交しているものとする。このとき $h \in H$ に対して頂点作用素を

$$h(\underline{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big((ph)(n) z^{-n-1} + (\bar{p}h)(n) \bar{z}^{-n-1} \Big) \in \mathrm{End} M_H(0)[[z^{\pm}, \bar{z}^{\pm}]]$$

で定義する。ただし $\bar{p} = 1 - p$。

Proposition 2.4 *$M_H(0)$ 上には以下の条件を満たす唯一の full 頂点代数の構造が入る:*

- *$\left|0\right\rangle$ が真空元;*
- *任意の $h \in H$ に対して $Y(h(-1)\left|0\right\rangle, \underline{z}) = h(\underline{z})$.*

この full 頂点代数を affine Heisenberg full 頂点代数と呼び、$M_{H,p}$ で表す。射影 p は $M_{H,p}$ のどの部分が正則でどの部分が反正則化を決めている。

Remark 2.6 $H_p = \ker \bar{p}$、$H_{\bar{p}} = \ker p$ とおくと、$M_{H,p}$ は正則な *affine Heisenberg* 頂点代数 $M_{H_p}(0)$ と反正則な *affine Heisenberg* 頂点代数 $\overline{M_{H_{\bar{p}}}(0)}$ のテンソル積 $M_{H_p}(0) \otimes \overline{M_{H_{\bar{p}}}(0)}$ と *full* 頂点代数として同型である。特に、$M_{H,p}$ の代数としての同型類は $\ker p$ の次元のみによっている。しかしながら後に分かるようにカレントカレント変形を考えるときは、$M_{H,p}$ という記号は自然である。

3　共形場理論のカレントカレント変形

序文で述べた通り場の量子論の変形を考えることは数学物理の双方において重要である。ただし一般の共形場理論の変形を考えると共形対称性は壊れてしまう。ここでは共形対称性を保つ変形を考える。物理において以下の予想が知られている。

Conjecture 3.1 $\{$ 共形場理論 F の変形 $\} = \{a \in F_{1,1} \mid a$ は *exactly marginal*$\}$.

正規順序積 $F_{1,0} \otimes F_{0,1} \to F_{1,1}$, $a \otimes b \mapsto a(-1,-1)b$ によって、$F_{1,0} \otimes F_{0,1}$ は $F_{1,1}$ の部分空間と見做せる。Chaudhuri と Schwartz は、$a \in F_{1,0} \otimes F_{0,1} \subset F_{1,1}$ が exactly marginal になることは、a が可換なカレント代数に属していることと同値であることを示した [CS]。この変形はカレントカレント変形と呼ばれ、物理においてよく調べられてきた。可換なカレント代数は我々の文脈ではまさに affine Heisenberg full 頂点代数 $M_{H,p}$ のことである。

そこで我々はカレントカレント変形を数学的に定式化するために full $\mathcal{H}$-点代数という概念を導入した。これは full 頂点代数 F とその「良い」部分代数 $M_{H,p} \subset F$ の組のことである。

F が $M_{H,p}$ を部分代数に持つとする。このとき F は affine Heinsenberg リー代数 $\hat{H}$ の加群になる。各 $\alpha \in H$ に対して $\Omega_{F,H}^{\alpha}$ を以下の条件を満たす $v \in F$ 全体のなす F の部分空間とする。

1. 任意の $h \in H$ と $n \geq 1$ に対して、$h(n)v = 0$;
2. 任意の $h \in H$ に対して、$h(0)v = (h,\alpha)v$。

$\Omega_{F,H} = \bigoplus_{\alpha \in H} \Omega_{F,H}^{\alpha}$ は F の $\hat{H}$ 加群としての最低ウェイトのなす空間である。

Definition 1 *full* $\mathcal{H}$-頂点代数とは、以下の条件を満たす *full* 頂点代数 F とその部分代数 $M_{H,p}$ の組である。

- F は最低ウェイト空間 $\Omega_{F,H}$ から $\hat{H}$ 加群として生成される。
- 任意の $\alpha \in H$ に対してある実数 N_α で次の条件を満たすものが存在する*:*
  もし $h \leq N_\alpha$ または $\bar{h} \leq N_\alpha$ ならば、$\Omega_{F,H}^{\alpha} \cap F_{h,\bar{h}} = 0$。

Remark 3.1 F が *full* 頂点作用素代数のとき $F_{1,0}$ と $F_{0,1}$ はリー代数になる。よい共形場理論ならば、これらは *reductive* リー代数であり、最大の $M_{H,p}$ はおおよそ正則部分 $F_{1,0}$ と反正則部分 $F_{0,1}$ のリー代数のカルタン部分代数が生成する。たとえばコンパクトリー群 G に付随するレベル $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ の *WZW* 模型 $F = F_{G,k}$ を考えると、$F_{1,0}$ と $F_{0,1}$ は共に G のリー代数 $\mathfrak{g}$ であり、$F_{G,k}$ に含まれる最大の *affine Heisenberg full* 頂点代数は、$\mathfrak{g} = F_{1,0} = F_{0,1}$ のカルタン部分代数から生成される。

full $\mathcal{H}$-頂点代数 $M_{H,p} \hookrightarrow F$ に対して、$H_p = \ker \bar{p}$、$H_{\bar{p}} = \ker p$ とおく。我々の目標は full $\mathcal{H}$-頂点代数が直交グラスマン多様体 $\mathrm{O}(H_p \oplus -H_{\bar{p}})/\mathrm{O}(H_p) \times \mathrm{O}(H_{\bar{p}})$ によってパラメトライズされた変形族を持つことを示すことである ($\mathrm{O}(H)$ は H 上の直交群)。F の full 頂点代数構造 $Y(-,\underline{z})$ を変形することで、最低ウェイト空間 $\Omega_{F,H}$ に「代数構造」が入ることを示すのが証明の鍵である。この代数構造は full 頂点代数の公理を満たさないが、full 頂点代数を一般化した代数になっている。我々はこれを一般化された full 頂点代数 (generalized full vertex algebra) とよんでいる。すると対応 $(M_{H,p} \hookrightarrow F) \mapsto \Omega_{F,H}$ は full $\mathcal{H}$-頂点代数の圏 $\underline{\text{Full H-Valg}}$ から一般化された full 頂点代数の圏 $\underline{\text{Gen Full-Valg}}$ への関手を与える。この関手はある情報を忘れてしまうため圏同値ではない。しかしながら一般化された full 頂点代数に「チャージ構造」と呼んでいる構造を加えることで、圏同値になる、$\Omega(-) : \underline{\text{Full H-Valg}} \to \underline{\text{Gen Full-Valg}_p}$。可能なチャージ構造全体 $P(H)$ には自然に位相が入り、連結成分一つ一つが直交グラスマン多様体になっている。

full $\mathcal{H}$-頂点代数の変形族は以下の三つのステップで作られる。full $\mathcal{H}$-頂点代数 $(M_{H,p} \hookrightarrow F)$ に対して、

1. 関手 $\Omega(-) : \underline{\text{Full H-Valg}} \to \underline{\text{Gen Full-Valg}}$ によって一般化された full 頂点代数 $\Omega_{F,H}$ を得る。

2. 新しい可能なチャージ構造を選ぶ (直交グラスマン多様体の点)。

3. 逆関手 $F(-):\underline{\text{Gen Full-Valg}_p} \to \underline{\text{Full H-Valg}}$ によって新しい full $\mathcal{H}$-頂点代数を得る。

次の章では一般化された full 頂点代数の定義と関手の構成について概説する。

3.1 一般化された full 頂点代数

full $\mathcal{H}$-頂点代数 $M_{H,p} \hookrightarrow F$ とその最低ウェイト空間 $\Omega_{F,H} \subset F$ を考える。一般に $a, b \in \Omega_{F,H}$ のとき、$Y(a,\underline{z})b \in F((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ であり、$Y(a,\underline{z})b$ は $\Omega_{F,H}$ に入らない (積で閉じていない)。しかし、頂点作用素 $Y(-,\underline{z})$ を適切に変形すると $\Omega_{F,H}$ が積で閉じているようにできる。

$\alpha,\beta \in H$ に対して、以下の作用素を考える：

$$E^-(\alpha,z) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty}(p\alpha)(-n)\frac{z^n}{n} + (\bar{p}\alpha)(-n)\frac{\bar{z}^n}{n})$$
$$E^+(\alpha,z) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty}(p\alpha)(n)\frac{z^{-n}}{-n} + (\bar{p}\alpha)(n)\frac{\bar{z}^{-n}}{-n})$$
$$z^{p\alpha(0)}\bar{z}^{\bar{p}\alpha(0)}|_{\Omega^\beta} = z^{(p\alpha,p\beta)_l}\bar{z}^{(\bar{p}\alpha,\bar{p}\beta)_r}.$$

このとき、$a \in \Omega_{F,H}^{\alpha}$ $(\alpha \in H)$ に対して、変形された頂点作用素 $\hat{Y}(-,\underline{z})$ を以下で定義する：

$$\hat{Y}(a,\underline{z}) = E^-(-\alpha,\underline{z})Y(a,\underline{z})E^+(-\alpha,\underline{z})z^{-p\alpha(0)}\bar{z}^{-\bar{p}\alpha(0)}. \tag{2}$$

このとき、$\hat{Y}(-,\underline{z})$ は $[h(n),\hat{Y}(a,\underline{z})] = 0$ を任意の $n \neq 0$ と $h \in H$ に対して満たす。よって $\hat{Y}(-,\underline{z})$ は最低ウェイト空間を保ち、線形写像 $\hat{Y}(-,\underline{z}) : \Omega_{F,H} \to \mathrm{End}\Omega_{F,H}[[z^{\mathbb{R}},\bar{z}^{\mathbb{R}}]]$ を定める。

よって $\Omega_{F,H}$ には $\hat{Y}(-,\underline{z})$ を用いてある種の代数構造が入ることになる。問題は「この代数はどんな公理を満たしているか？」である。

Remark 3.2 この変形された頂点作用素 $\hat{Y}(-,\underline{z})$ は、*integrable level* の *affine* 頂点代数の研究において *Dong* と *Lepowsky* によって初めに導入された *[DL]*。彼らは最低ウェイト空間の代数構造を公理化し、一般化された頂点代数と呼んだ。本稿で導入される一般化された *full* 頂点代数は彼らの代数への非カイラルへの一般化になっている。なお最低ウェイト空間に代数構造が入ることの証明は彼らのアプローチと異なっており、我々の結果は *integrable level* の *affine* 頂点代数に限らず、*Heisenberg* 頂点代数を部分代数に持つような任意の頂点代数や *full* 頂点代数に適応できる。

full 頂点代数の公理において最も大切なのが、(FV5) である。そこで変形された頂点作用素 $\hat{Y}(-,\underline{z})$ の相関関数がどうなっているかを考える。$u \in \Omega_{F,H}^{\vee}$、$a_i \in \Omega_{F,H}^{\alpha_i}$ と $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in H$ に対して、相関関数を計算すると

$$\begin{aligned}
&u(\hat{Y}(a_1,\bar{z}_1)\hat{Y}(a_2,\underline{z}_2)a_3) \\
&= z_1^{-(p\alpha_1,p\alpha_3)_l}\bar{z}_1^{-(\bar{p}\alpha_1,\bar{p}\alpha_3)_r}z_2^{-(p\alpha_2,p\alpha_3)_l}\bar{z}_2^{-(\bar{p}\alpha_2,\bar{p}\alpha_3)_r} \\
&\times (z_1-z_2)^{-(p\alpha_1,p\alpha_2)_l}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{-(\bar{p}\alpha_1,\bar{p}\alpha_2)_r}u(Y(a_1,\underline{z}_1)Y(a,\underline{z}_2)a_3).
\end{aligned}$$

となる。よって $\hat{Y}(-,\underline{z})$ の相関関数と元の $Y(-,\underline{z})$ の相関関数の違いは単純な「多項式」でかける。ただし $z_1^{-(p\alpha_1,p\alpha_3)_l}\bar{z}_1^{-(\bar{p}\alpha_1,\bar{p}\alpha_3)_r}$ の項に注目してみると、$z_1^{-(p\alpha_1,p\alpha_3)_l}\bar{z}_1^{-(\bar{p}\alpha_1,\bar{p}\alpha_3)_r} = z_1^{-(p\alpha_1,p\alpha_3)_l+(\bar{p}\alpha_1,\bar{p}\alpha_3)_r}(z_1\bar{z}_1)^{-(\bar{p}\alpha_1,\bar{p}\alpha_3)_r}$ より、この関数が一価関数であることと、$-(p\alpha_1,p\alpha_3)_l + (\bar{p}\alpha_1,\bar{p}\alpha_3)_r \in \mathbb{Z}$ が同値である。

そこで、$H = H_p \oplus H_{\bar{p}}$ 上に新しい双線形形式 $(-,-)_{\mathrm{lat}}$ を

$$(\alpha,\beta)_{\mathrm{lat}} = (p\alpha,p\beta)_l - (\bar{p}\alpha,\bar{p}\beta)_r$$

によって定める。

$Y(-,\underline{z})$ の相関関数は一価であるから、$\hat{Y}(-,\underline{z})$ の相関関数は必ずしも一価でない。そのモノドロミーは上記の双線形形式を用いると次の項から来る：

$$z_1^{-(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}} z_2^{-(\alpha_2,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}} (z_1-z_2)^{-(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}}.$$

そこで、モノドロミーを打ち消す項を $\hat{Y}(-,\underline{z})$ の相関関数に加える：

$$z_1^{(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}} z_2^{(\alpha_2,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}} (z_1-z_2)^{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}} u(\hat{Y}(a_1,\underline{z}_1)\hat{Y}(a,\underline{z}_2)a_3).$$

するとこの関数は一価な実解析的関数である。

Remark 3.3 *full* $\mathcal{H}$-頂点代数 $M_{H,p} \hookrightarrow F$ の定義から $\hat{H}$ 加群として、F は次の分解を持つ：

$$F = \bigoplus_{\alpha\in H} M_{H,p}(\alpha)\otimes \Omega_{F,H}^{\alpha}.$$

変形された頂点作用素 $\hat{Y}(-,\underline{z})$ の補正項 $E^-(-\alpha,\underline{z})$ たちは、加群としての分解の左側 $M_{H,p}(\alpha)$ を打ち消すためのものであり、結果として $\hat{Y}(-,\underline{z})$ は純粋に $\Omega_{F,H}$ 上の頂点作用素になっている。このような最低ウェイト空間に入る代数構造は非アーベルな場合も考えることができる *[Mo4]*。

一般化された full 頂点代数を上記の観察の下で定義する。一般化された full 頂点代数とは、非退化な対称双線形形式を持つ実ベクトル空間 $(H,(-,-)_{\mathrm{lat}})$ と $\mathbb{R}^2\times H$ 次数付けを持つベクトル空間 $\Omega=\bigoplus_{t,\bar{t}\in\mathbb{R},\alpha\in H}\Omega_{t,\bar{t}}^{\alpha}$ と、線形作用素 $\hat{Y}(-,\underline{z}):\Omega\to \mathrm{End}\Omega[[z^{\mathbb{R}},\bar{z}^{\mathbb{R}}]]$ であって以下の条件を満たす：

GFV1) 任意の $\alpha,\beta\in H$ と $a\in\Omega^{\alpha}$, $b\in\Omega^{\beta}$ に対して、$z^{(\alpha,\beta)_{\mathrm{lat}}}\hat{Y}(a,z)b\in\Omega((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$;

GFV2) $(\alpha,\alpha)_{\mathrm{lat}}/2+t-\bar{t}\notin\mathbb{Z}$ ならば、$\Omega_{t,\bar{t}}^{\alpha}=0$;

GFV3) 任意の $a\in\Omega$ に対して、$\hat{Y}(a,\underline{z})\mathbf{1}\in\Omega[[z,\bar{z}]]$ であり $\lim_{z\to 0}\hat{Y}(a,\underline{z})\mathbf{1}=a(-1,-1)\mathbf{1}=a$;

GFV4) $\hat{Y}(\mathbf{1},\underline{z})=\mathrm{id}\in\mathrm{End}\Omega$;

GFV5) 任意の $\alpha_i\in H$、$a_i\in\Omega_{t_i,\bar{t}_i}^{\alpha_i}$ $(i=1,2,3)$ と $u\in\Omega^{\vee}=(\Omega_{t_0,\bar{t}_0}^{\alpha})^*$、 ある $f\in F_{0,1,\infty}$ で以下の条件を満たすものが存在する。

$$\begin{aligned}
&z_2^{t_0-t_1-t_2-t_3+(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}+(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}}\bar{z}_2^{\bar{t}_0-\bar{t}_1-\bar{t}_2-\bar{t}_3}\lim_{z\to z_2/z_1} j(z,f)\\
&=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}}{k} z_1^{(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}+(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}-k}z_2^k\Big)u(\hat{Y}(a_1,\underline{z}_1)\hat{Y}(a_2,\underline{z}_2)a_3),\\
&z_2^{t_0-t_1-t_2-t_3+(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}+(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}}\bar{z}_2^{\bar{t}_0-\bar{t}_1-\bar{t}_2-\bar{t}_3}\lim_{z\to -z_0/z_2} j(1-z^{-1},f)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}}{k} z_0^{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}+(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}+k}z_2^{-k}u(\hat{Y}(\hat{Y}(a_1,\underline{z}_0)a_2,\underline{z}_2)a_3),\\
&z_2^{t_0-t_1-t_2-t_3+(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}+(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}}\bar{z}_2^{\bar{t}_0-\bar{t}_1-\bar{t}_2-\bar{t}_3}\lim_{z\to z_1/z_2} j(1/z,f)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}}{k} z_1^{(\alpha_1,\alpha_3)_{\mathrm{lat}}+k}z_2^{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}-k}u(\hat{Y}(a_2,\underline{z}_2)\hat{Y}(a_1,\underline{z}_1)a_3);
\end{aligned}$$

GFV6) 任意の $r,s,t,\bar{t},t',\bar{t}'\in\mathbb{R}$ と $\alpha,\beta\in H$ に対して、$\Omega_{t,\bar{t}}^{\alpha}(r,s)\Omega_{t',\bar{t}'}^{\beta}\subset\Omega_{t+t'-r-1,\bar{t}+\bar{t}'-s-1}^{\alpha+\beta}$;

GFV7) 任意の $\alpha\in H$ に対して、ある $N_\alpha\in\mathbb{R}$ で $\Omega_{t,\bar{t}}^{\alpha}=0$ が任意の $t\le N_\alpha$ または $\bar{t}\le N_\alpha$ に対して成立するものが存在する。

すなわち、一般化された full 頂点代数は $U(1)$ モノドロミーを持つ full 頂点代数であり、そのモノドロミーは次数付け $(H,(-,-)_{\mathrm{lat}})$ で制御されているものである。

Remark 3.4 *(GFV5)* の $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}}{k}z_1^{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}-k}z_2^k$ は、$(z_1-z_2)^{(\alpha_1,\alpha_2)_{\mathrm{lat}}}$ の領域 $|z_1|>|z_2|$ における展開である。両辺の煩雑な項は *Remark 2.3* と同様に、適切な準備の下より簡潔な定義に置き換えることができる *[Mo3]*。

	頂点代数	full 頂点代数	一般化された full 頂点代数
状態の空間	$V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$	$F=\bigoplus_{h,\bar{h}\in\mathbb{R}}F_{h,\bar{h}}$	$\Omega=\bigoplus_{t,\bar{t}\in\mathbb{R},\alpha\in H}\Omega_{t,\bar{t}}^{\alpha}$
頂点作用素	$\mathrm{End}V[[z^{\pm}]]$	$\mathrm{End}F[[z,\bar{z},\lvert z\rvert^{\mathbb{R}}]]$	$\mathrm{End}\Omega[[z^{\mathbb{R}},\bar{z}^{\mathbb{R}}]]$
特異性	$\mathbb{C}((z))$	$\mathbb{C}((z,\bar{z},\lvert z\rvert^{\mathbb{R}}))$	$\mathbb{C}((z^{\mathbb{R}},\bar{z}^{\mathbb{R}}))$
相関関数	$\mathbb{C}[z^{\pm},(1-z)^{\pm}]$	$F_{0,1,\infty}$	$F_{0,1,\infty}\otimes\mathbb{C}[z^{\mathbb{R}},(1-z)^{\mathbb{R}}]$

Proposition 3.1 対応 $\Omega:\underline{\textit{Full H-Valg}}\to\underline{\textit{Gen Full-Valg}}$, $(M_{H,p}\hookrightarrow F)\mapsto\Omega_{F,H}$ は関手である。

大切なことは一般化された full 頂点代数 $\Omega_{F,H}$ は、Heisenberg full 頂点代数のどの部分が正則かを決める射影 $p\in\mathrm{End}H$ の情報を忘れてしまっていることである (H 上の「新しい」双線形形式 $(-,-)_{\mathrm{lat}}$ のことしか覚えていない)。そこで $P(H)$ を、以下の条件を満たす全ての $p\in\mathrm{End}H$ のなす集合とする：

- $p^2=p$、すなわち p は射影作用素。
- $\ker(p)$ と $\ker(1-p)$ は $(-,-)_{\mathrm{lat}}$ に関して直交する。

チャージ構造を持つ一般化された full 頂点代数とは、一般化された full 頂点代数 $(\Omega,H,(-,-)_{\mathrm{lat}})$ と射影 $p\in P(H)$ の組のことである。チャージ構造を持つ一般化された full 頂点代数の間の射を一般化された full 頂点代数の準同型であってチャージ構造を保つものとして定めることで、チャージ構造を持つ一般化された full 頂点代数の圏 $\underline{\text{Gen Full-Valg}_p}$ を定義できる (詳しくは [Mo3])。このとき次の定理を得る。

Theorem 3.1 関手 $\Omega(-):\underline{\textit{Full H-Valg}}\to\underline{\textit{Gen Full-Valg}_p}$, $(M_{H,p}\hookrightarrow F)\mapsto(\Omega_{F,H},p)$ は圏同値を与える。

証明は逆関手 $F(-):\underline{\text{Gen Full-Valg}_p}\to\underline{\text{Full H-Valg}}$ を明示的に構成することで与えられる [Mo3]。

3.2 カレントカレント変形と両側剰余類表示

この章では full $\mathcal{H}$-頂点代数 $M_{H,p}\hookrightarrow F$ のカレントカレント変形を構成する。

圏同値から $F\cong F\circ\Omega(M_{H,p}\hookrightarrow F)=F(\Omega_{F,H},H,p)$ である。ここでチャージ構造を取り替えて異なる $p'\in P(H)$ を取ると、新しい full $\mathcal{H}$-頂点代数 $F(\Omega_{F,H},H,p')$ を得る。

$P(H)$ に行列環の部分集合としての位相を入れると、p の連結成分は直交グラスマン多様体 $\mathrm{O}(H_p\oplus-H_{\bar{p}})/\mathrm{O}(H_p)\times\mathrm{O}(H_{\bar{p}})$ になる。よって、任意の full $\mathcal{H}$-頂点代数 $M_{H,p}\hookrightarrow F$ に対して、直交グラスマン多様体でパラメトライズされた full $\mathcal{H}$-頂点代数の族を得た。これを full $\mathcal{H}$-頂点代数のカレントカレント変形と呼ぶ。

二つのチャージ構造 $p_1,p_2\in P(H)$ に対して、いつ $F(\Omega_{F,H},H,p_1)$ と $F(\Omega_{F,H},H,p_2)$ は同型になるだろうか? $\Omega(-)$ は圏同値を与えるため、この条件はチャージ構造を持つ一般化された full 頂点代数 $(\Omega_{F,H},H,p_1)$ と $(\Omega_{F,H},H,p_2)$ が $\underline{\text{Gen Full-Valg}_p}$ において同型になることと同値である。これはさらに、(チャージ構造を忘れた) 一般化された full 頂点代数 $\Omega_{F,H}$ の自己同型写像 ϕ で p_1 を p_2 に移すものが存在することと同値である。

ゆえに $\mathrm{Aut}\,\Omega_{F,H}$ から定義されるある $\mathrm{O}(H_p\oplus-H_{\bar{p}})$ の部分群 $D_{F,H}$ があって、カレントカレント変形の同型類は次の定理で得られる。

Theorem 3.2 カレントカレント変形の *full* $\mathcal{H}$*-*頂点代数としての同型類と両側剰余類

$$D_{F,H}\backslash \mathrm{O}(H_p \oplus -H_{\bar{p}})/\mathrm{O}(H_p)\times \mathrm{O}(H_{\bar{p}})$$

の間に一対一対応が存在する。

後に見るように共形場理論 F を、格子 full 頂点代数にとると、カレントカレント変形の同型類は弦理論のコンパクト化のモジュライ空間の一部を与える (Narain モジュライ空間)。このとき群 $D_{F,H}$ の作用は一見異なる弦理論の間の同型を与える T 双対と一致する [P]。そのため群 $D_{F,H}$ を双対群 (duality group) とよぶ。この両側剰余類表示は物理の文脈で [FR] によって研究されており、我々の結果は、$D_{F,H}$ の数学的定義を一般化された full 頂点代数代数の自己同型群として与えている。

Remark 3.5 カレントカレント変形が *exactly marginal* であることが示された *[CS]* では、変形に関する摂動計算が *cut off* スケールを含んでいる *(*素朴には積分が発散している*)*。我々のカレントカレント変形の構成では発散が現れない。その理由は端的に述べると、$\hat{Y}(-,\underline{z})$ の定義式 *(2)* が正規順序積で与えられているからである。いいかえるとカレントカレント変形の場合は正規順序積を用いて正規化することで、*consistent* に発散を取り除くことができる。

3.3 例 – Narain モジュライ空間

この章では full $\mathcal{H}$-頂点代数の例とそのカレントカレント変形を考察する (さらに非自明な例については [Mo4] を参照)。すでに説明したように、full 頂点代数 F に対してその正則部分 $\ker \bar{D}$ は頂点代数になる。$a \in \ker D \cap \ker \bar{D}$ のとき、命題 2.1 より $Y(a,\underline{z})$ は $\frac{d}{dz}Y(a,\underline{z}) = \frac{d}{d\bar{z}}Y(a,\underline{z}) = 0$ を満たす。よって、$Y(a,\underline{z})$ は定数項のみからなる。この $Y(a,\underline{z}) \in \mathrm{End}F$ は $\ker D \cap \ker \bar{D}$ 上に積を与えるが、これは可換結合的な $\mathbb{C}$ 代数になる (この意味で full 頂点代数は可換代数の一般化である)。もし full 頂点代数が単純性などの自然な仮定を満たすとき、$\ker D \cap \ker \bar{D}$ は単に $\mathbb{C}$ になる。よって定数項のみを持つ頂点作用素で非自明な full 頂点を作ることはできない。しかしながら一般化された full 頂点代数で、頂点作用素が定数項のみのものを考えると事情は異なる。

Definition 2 *[Mo1, Mo3]* 偶 AH ペアとは、非退化な対称双線形形式を持つ実ベクトル空間 $(H,(-,-)_{\mathrm{lat}})$ と H 次数付き結合代数 $A = \bigoplus_{\alpha\in H} A^\alpha$ であって以下の条件を満たすものである。

1. $\alpha \in H$ が $A^\alpha \neq 0$ を満たすならば、$(\alpha,\alpha)_{\mathrm{lat}} \in 2\mathbb{Z}$*;*
2. $\alpha,\beta \in H$ と $e_\alpha \in A^\alpha, e_\beta \in A^\beta$ に対して、$e_\alpha e_\beta = (-1)^{(\alpha,\beta)_{\mathrm{lat}}} e_\beta e_\alpha$ が成り立つ。

このとき A 上の頂点作用素 $Y(-,\underline{z})$ を $Y(a,\underline{z}) = l_a$ で定義する。ただし l_a は左からの積。すると A は一般化された full 頂点代数であることが分かる。偶 AH ペアの積は非可換であるが、非可換性は $(H,(-,-)_{\mathrm{lat}})$ で制御されている。これは一般化された full 頂点代数がモノドロミーを持っていることに対応している。

Remark 3.6 $\underline{AH\ pair}$ を偶 AH ペアのなす圏とする。実は包含関手 $i : \underline{AH\ pair} \hookrightarrow \underline{Gen\ Full\text{-}Valg}$ と $\underline{Gen\ Full\text{-}Valg} \to \underline{AH\ pair}$, $(\Omega,H) \mapsto (\ker D \cap \ker \bar{D}, H)$ は随伴関手対を与える *[Mo3]*。

偶 AH ペアは偶格子から構成できる。偶格子とは有限階数の自由アーベル群 L と対称双線形形式 $(-,-)_{\mathrm{lat}} : L\times L \to \mathbb{Z}$ の組で、$(\alpha,\alpha)_{\mathrm{lat}} \in 2\mathbb{Z}$ を任意の $\alpha \in L$ に対して満たすものである。

このとき、ある群のコホモロジーの two-cocycle $\epsilon(-,-) \in Z^2(L,\mathbb{C}^\times)$ で以下の条件を満たすものが存在する [FLM]。

AHC1) 任意の $\alpha,\beta \in L$ に対して、$\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\beta,\alpha) = (-1)^{(\alpha,\beta)_{\mathrm{lat}}}$。

AHC2) 任意の $\alpha \in L$ に対して、$\epsilon(0,\alpha) = \epsilon(\alpha,0) = 1$。

この two-cocycle を用いて、$\mathbb{C}[\hat{L}] = \bigoplus_{\alpha \in L} \mathbb{C}e_\alpha$ に積を $e_\alpha \cdot e_\beta = \epsilon(\alpha, \beta)e_{\alpha+\beta}$ によって定める。cocycle 条件から積は結合的であり、(AHC1) より偶 AH ペアになる。この偶 AH ペアは twisted 群環と呼ばれる。

Remark 3.7 本稿では述べないが、*twisted* 群環は *[Mo1]* で一般化され *lattice pair* と呼ばれている。実は上記の随伴関手を用いて *lattice pair* の圏と「良い」*full* $\mathcal{H}$-頂点代数の圏の間に随伴関手が構成される *[Mo3]*。すなわちこの関手を用いることで共形場理論から偶格子を取り出すことができる。

$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする。以下格子として、符号 (N, N) ユニモジュラー偶格子 $II_{N,N}$ を考える。明示的に与えると、$II_{1,1}$ は階数 2 自由アーベル群 $II_{1,1} = \mathbb{Z}\beta \oplus \mathbb{Z}\gamma$ であり、双線形形式は次で与えられる。

$$(\beta, \beta)_{\mathrm{lat}} = (\gamma, \gamma)_{\mathrm{lat}} = 0$$
$$(\beta, \gamma)_{\mathrm{lat}} = -1.$$

また、$II_{N,N} = {II_{1,1}}^{\oplus N}$ である。$\mathbb{C}[\hat{II_{N,N}}]$ は偶 AH ペアであるから、チャージ構造 $p \in P(II_{N,N} \otimes \mathbb{R})$ を選ぶと full 頂点代数 $F(\mathbb{C}[\hat{II_{N,N}}], II_{N,N} \otimes \mathbb{R}, p)$ を得る。これを格子 full 頂点代数とよび単に $F_{II_{N,N},p}$ とかく。

チャージ構造としては、p が最大正定値空間への射影になるものを考えるのが普通である。このような射影たちは $P(II_{N,N} \otimes \mathbb{R})$ の一つの連結成分をなし、$\mathrm{O}(N, N)/\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(N)$ と一致する。この場合双対群 $D_{F_{II_{N,N},p}, II_{N,N} \otimes \mathbb{R}}$ は格子の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, II_{N,N}$ に一致しており、カレントカレント変形の同型類は、

$$\mathrm{Aut}\, II_{N,N} \backslash \mathrm{O}(N, N)/\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(N)$$

とかける。これはターゲット空間が $\mathbb{R}^N$ の弦理論のトロイダルコンパクト化に現れる共形場理論の族であり、物理では Narain モジュライ空間と呼ばれている [N, NSW]。また近年三次元量子重力との関係で興味深い対象である [MW]。

以下 $N = 1$ の場合をより詳しく調べる。このときチャージ構造のなす直交グラスマン多様体は $\mathrm{O}(1, 1)/\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \cong \mathbb{R}_{>0}$ である。この正の実数との同型は双曲回転で与えられより明示的には、$R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して、ベクトル $v_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(R\beta - R^{-1}\gamma) \in II_{1,1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ への射影 p_R として与えることができる。対応する full 頂点代数を $C_R = F_{\mathbb{C}[\hat{II_{1,1}}], II_{1,1} \otimes \mathbb{R}, p_R}$ とおく。共形場理論 C_R はターゲット空間が一次元の弦理論を半径 R でコンパクト化した $S^1_R = \mathbb{R}/R\mathbb{R}$ ときに現れる理論である。とくにカレントカレント変形は半径を変える変形になっている。また双対群 $D_{C_R, II_{1,1} \otimes \mathbb{R}}$ はこの場合格子の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, II_{1,1} = D_4$ である。$\mathrm{Aut}\, II_{1,1}$ は $\mathbb{R}_{>0}$ に対して $R \leftrightarrow R^{-1}$ で作用している (弦理論の T-双対 [P])。

$\mathrm{Aut}\, II_{1,1} \backslash O(1, 1)/O(1) \times O(1)$ は半直線 $[1, \infty)$ であり、モジュライ空間の横の線と一致する (図 2 参照)。

最後に C_R の正則部分と反正則部分 (カイラル代数) について議論する。

Proposition 3.2 もし $R^2 \notin \mathbb{Q}$ ならば、$\ker \bar{D}_R \otimes \ker D_R \cong M_{H_{II_{1,1}}, p_R}$ となる。もし $R^2 = \frac{p}{q}$ *(*ただし p と q は互いに素な自然数*)* ならば、$\ker \bar{D}_R \otimes \ker D_R \cong V_{\sqrt{2pq}\mathbb{Z}} \otimes \overline{V_{\sqrt{2pq}\mathbb{Z}}}$ となる。ここで、$V_{\sqrt{2pq}\mathbb{Z}}$ は一次元偶格子 $\mathbb{Z}\alpha$ *(*$(\alpha, \alpha) = 2pq$*)* に付随する格子頂点代数。

Remark 3.8 上記の命題にある通り、C_R のカイラル代数は基本的には *affine Heisenberg full* 頂点代数である。ただし $R^2 \in \mathbb{Q}$ のときに限り、カイラル代数が格子頂点代数をふくむほど大きく拡大されている。いいかえると $R^2 \in \mathbb{Q}$ であることと C_R が有理的共形場理論であることは同値であり、それ以外の

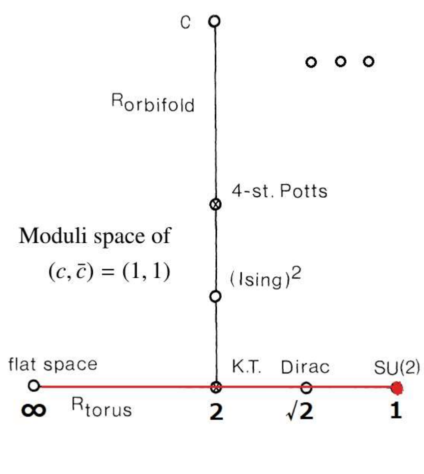

図 2: $(c, \bar{c}) = (1, 1)$

点は非有理的共形場理論になっている。このように
有理的共形場はモジュライ空間の中で離散的に存在しており、カレントカレント変形は「偶格子から来る離散的な有理的共形場理論」を連続的につないでいる。

たとえば半径が $R=\sqrt{6}$ と $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ の場合、カイラル代数は同じ $V_{\sqrt{12}\mathbb{Z}}$ である。しかし $C_{\sqrt{6}}$ と $C_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ は同型でない。これらの代数 $C_{\sqrt{6}}$ と $C_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ を $V_{\sqrt{12}\mathbb{Z}} \otimes \overline{V_{\sqrt{12}\mathbb{Z}}}$-加群として既約分解すると

$$C_{\sqrt{6}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}} V_{\sqrt{12}\mathbb{Z}+\frac{i}{\sqrt{12}}} \otimes \overline{V_{\sqrt{12}\mathbb{Z}+\frac{i}{\sqrt{12}}}}$$
$$C_{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}} V_{\sqrt{12}\mathbb{Z}+\frac{i}{\sqrt{12}}} \otimes \overline{V_{\sqrt{12}\mathbb{Z}+\frac{7i}{\sqrt{12}}}}.$$

となる。すなわち $C_{\sqrt{6}}$ は対角に加群を足し合わせており、$C_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ は 7 でひねって足し合わせている。

Proposition 3.3 互いに素な自然数 p,q に対して、$n_{p,q}\in(\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z})^\times$ を $n_{p,q}\equiv 1$ *modulo* $2q$ と $n_{p,q}\equiv -1$ *modulo* $2p$ を満たすものとして取る。このとき、

$$C_{\sqrt{\frac{p}{q}}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}} V_{\sqrt{2pq}\mathbb{Z}+\frac{i}{\sqrt{2pq}}} \otimes \overline{V_{\sqrt{2pq}\mathbb{Z}+\frac{n_{p,q}i}{\sqrt{2pq}}}}.$$

Remark 3.9 上記の命題の $n_{p,q}$ は、格子頂点代数 $V_{\sqrt{2pq}\mathbb{Z}}$ の表現圏 *(Braided Tensor Category* の構造を持つ*)* の自己同型を与える。有理数 $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ と格子の表現圏の自己同型の間にこのような一対一対応があること自体も興味深い。

Remark 3.10 双対群の固定点である C_1 は、$\sqrt{2}\mathbb{Z}$ が A_1 型のルート格子であることから、SU(2)-WZW 模型のレベル 1 に対応する共形場理論である。

参考文献

[B] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83**, 1986, (10), 3068–3071.

[CS] S. Chaudhuri and J. A. Schwartz, A criterion for integrably marginal operators, Phys. Lett. B, **219**, 1989, (2)-(3), 291–296.

[DL] C. Dong and J. Lepowsky, Generalized vertex algebras and relative vertex operators, Progress in Mathematics, **112**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[DVV1] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde, On moduli spaces of conformal field theories with $c\geq 1$, Perspectives in string theory (Copenhagen, 1987), 1988, 117–137.

[DVV2] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde, $C=1$ conformal field theories on Riemann surfaces, Comm. Math. Phys., 115, 1988, (4), 649–690.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Applied Mathematics, **134**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[FR] S. Förste and D. Roggenkamp, Current-current deformations of conformal field theories, and WZW models, J. High Energy Phys., 2003, **5**.

[Gi] P. Ginsparg, Curiosities at $c=1$, Nuclear Phys. B, **295**, 1988, (2), FS21, 153–170.

[Hu] Y.-Z. Huang, Rigidity and modularity of vertex tensor categories, Comm. Contemp. Math. **10**, 2008, 871–911.

[HK] Y.-Z. Huang, L. Kong, Full field algebras, Comm. Math. Phys., **272**, 2007, (2), 345–396.

[HL] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, I, Selecta Mathematica (New Series), **1**, 1995, 699–756.

[Mo1] Y. Moriwaki, Genus of vertex algebras and mass formula, arXiv:2004.01441 [q-alg].

[Mo2] Y. Moriwaki, Full vertex algebra and bootstrap – consistency of four point functions in 2d CFT, arXiv:2006.15859 [q-alg].

[Mo3] Y. Moriwaki, Full vertex algebra and non-perturbative current-current deformation of 2d CFT, arXiv:2007.07327 [q-alg].

[Mo4] Y. Moriwaki, Code conformal field theory and framed full vertex operator algebra (to appear).

[MS] G. Moore and N. Seiberg, Classical and quantum conformal field theory, Comm. Math. Phys. **123**, 1989, 177–254.

[MW] A. Maloney and E. Witten, Averaging over Narain Moduli Space, arXiv:2006.04855 [hep-th].

[N] K.S. Narain, New heterotic string theories in uncompactified dimensions < 10, Phys. Lett. B, **169**, 1986, (1), 41–46.

[NSW] K.S. Narain, M. H. Sarmadi and E. Witten, A note on toroidal compactification of heterotic string theory, Nuclear Phys. B, **279**, 1987, (3)-(4), 369–379.

[P] J. Polchinski, String theory. Vol. I, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.